КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 004.925.8

В.А. СТОЯН, К.В. ДВИРНИЧУК, А.Е. ЕРШОВ, А.С. ЕМЦОВ

О СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Описываются структура и принципы построения программно-моделирующего комплекса по решению задач динамики пространственно распределенных систем, неполно определенных за начально-краевыми наблюдениями.

Введение. Распределенные пространственно-временные системы, исследование которых получило серьезное математическое развитие во второй половине прошлого века, оставались и остаются актуальными и сегодня. Это системы, описывающие динамику сложных механических конструкций, включая и их напряженно-деформированное состояние, это и гидроакустика, и экология, вызванная к жизни современным техническим прогрессом. Известные математические подходы к исследованию таких систем в большинстве случаев позволяют получить точные решения начально-краевых задач, возникающих при работе с ними. Серьезным подспорьем таких подходов есть и численные методы, которые являются не менее эффективными при современном развитии вычислительной техники. Заметим однако, что эти наиболее распространенные подходы к решению задач динамики распределенных систем требуют корректности постановки задач, в частности по количеству и качеству начально-краевых наблюдений за состоянием исследуемого объекта. Такое требование не всегда может быть выполнено на практике, поскольку исследуемый объект часто может быть не наблюдаемым в той степени, которая требуется математической постановкой решаемой задачи – начально-краевые и распреде-

ленные внешнединамические возмущения доступны для наблюдения в ограниченном

объеме (например, без производных от функции состояния) или в ограниченной части (в определенных точках) исследуемой области и ее контура. Математический подход к исследованию таких практически важных систем и процессов был предложен и получил развитие в [1, 2]. Данный подход основывается на математическом моделировании начально-краевых внешнединамических возмущений системой моделирующих функций и векторов их значений. Построены, исследованы и за среднеквадратическим критерием решены системы алгебраических, интегральных и функциональных уравнений относительно моделирующих факторов. Наличие последних позволило построить функцию состояния линейно распределенной динамической системы, удовлетворяющую ее дифференциальной математической модели, а за среднеквадратическим критерием – и имеющимся дискретно и непрерывно определенным наблюдениям за состоянием системы. Расчетные формулы предложенного алгоритма оказались не сложными и апробировались на отдельных динамических системах. Далее, с применением современных компьютерных средств, дается комплексное решение задачи математического моделирования целого класса динамических систем без ограничений на наличие информации об их начально-краевом и поточном состоянии. Данное решение оформлено в виде программного комплекса, позволяющего через удобный для пользователя оконный интерфейс формулировать задачу, вводить исходные наблюдения за состоянием исследуемого объекта, запускать задачу на выполнение и получать результат моделирования – графическое представление функции состояния. Комплекс является открытым и может дополняться, расширяться и модифицироваться.

Математические задачи моделирования состояния распределенных пространственно-временных систем. Рассмотрим распределенную в области

$$S_0^T = \{s = (x,t) = (x_1,...,x_n,t) : x \in S_0, 0 \le t \le T\}$$

динамическую систему, функция состояния $y(s)$ которой удовлетворяет уравнению

$$L(\partial_s)y(s) = u(s)s \in S_0^T, \tag{1}$$

в котором $u(s)$ – распределенное внешнединамическое возмущение, действующее на систему, $L(\partial_s)$ – линейный дифференциальный оператор, а $\partial_s = (\partial_{x_1},...,\partial_{x_n},\partial_t)$ – вектор частных производных по пространственным координатам $x_1,...,x_n$ и времени t. При построении функции $y(s)$ будем предполагать, что исследуемая система допускает начальные (при $t = 0$), краевые (на контуре Γ области S_0) и поточные (при $s \in S_0^T$) наблюдения за состоянием, определяющиеся соотношениями:

начальные наблюдения:

$$L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} = y_r^0(x)(x \in S_0,\ r = \overline{1,R_0}), \tag{2}$$

$$L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0,x=x_l^0} = y_{rl}^0(x_l^0 \in S_0,\ r = \overline{1,R_0}, l = \overline{1,L_0}); \tag{3}$$

краевые наблюдения:

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{s\in\Gamma\times[0,T]} = y_\rho^\Gamma(s)(\rho=\overline{1,R_\Gamma}), \tag{4}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{s=s_l^\Gamma\in\Gamma\times[0,T]} = y_{\rho l}^\Gamma(\rho=\overline{1,R_\Gamma}, l=\overline{1,L_\Gamma}); \tag{5}$$

поточные наблюдения:

$$L_i(\partial_s)y(s)|_{s\in S_0^T} = y_i(s)(i=\overline{1,I}), \tag{6}$$

$$L_i(\partial_s)y(s)|_{s=s_l\in S_0^T} = y_i\ (i=\overline{1,I}). \tag{7}$$

Здесь и далее $L_r^0(\partial_t)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$, $L_i(\partial_s)$ $(i=\overline{1,I})$ – линейные дифференциальные операторы, а соотношения (2), (4), (6) не обязательно определены на всей пространственной области S_0, на всем контуре Γ и временном интервале $[0,T]$, на всей пространственно-временной области S_0^T.

Заметим, что в [1, 2] предложена методика построения функции $y(s)$, которая:

1) соотношению (1) удовлетворяет точно;

2) с наблюдениями (2), (4), (6) или (3), (5), (7) согласуется за среднеквадратическим критерием.

Эта функция представляется суммой

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s),$$

составляющие $y_\infty(s)$, $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$ которой соответствуют распределенным в области, имеющим место при $t=0$ и на контуре Γ внешнединамическим возмущающим факторам. При этом

$$y_\infty(s) = \int_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds',$$

где $G(s-s')$ – передаточная функция такая, что

$$G(s-s') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{L(p)} e^{p(s-s')}dp$$

при $p = p_1, ..., p_n, q$.

Через данную функцию и функции $u_0(s)(s\in S^0 = S_0\times[-\infty,0])$, $u_\Gamma(s)(s\in S^\Gamma = (R^n\setminus S_0)\times[0,T])$, определенные непрерывно или в точках $s_m^0\in S^0(m=\overline{1,M_0})$ и $s_m^\Gamma\in S^\Gamma(m=\overline{1,M_\Gamma})$, которыми за среднеквадратическим критерием моделируются начально-краевые и распределенные в области S_0^T внешнединамические наблюдения (2) – (7), определяются [1, 2] и составляющие $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$. Расчетные соотношения для построения функций $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, а следовательно и $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$, мы не приводим. Данные соотношения, как и алгоритм их построения, будут закрыты от пользователя описываемого ниже программного комплекса по решению задач построения функции состояния $y(s)$ системы (1), наблюдаемой согласно (2), (4), (6) или (3), (5), (7).

Назначение и общие возможности программного комплекса. Программно-моделирующий комплекс построен как для решения реально поставленных прикладных задач, так и для использования его в режиме лабораторного моделирования. В последнем случае реальное состояние исследуемого процесса, как и наблюдения за ним, имитируются пользователем.

Рабочая часть комплекса реализована на языке C#, интерфейсно-графический модуль комплекса построен на Windows Presentation Foundation (WPF). Существенным элементом комплекса является СУБД MsSQL 2005, взаимодействие с которой выполняется в рамках Entity Framework. Алгоритмическая часть комплекса построена с использованием внутренней математической библиотеки, содержащей свои реализации наиболее используемых математических операций.

Процесс работы с комплексом включает в себя этапы постановки задачи, ее решения, пересмотра и анализа полученных результатов. Работа пользователя на данных этапах выполняется через удобный интерфейс, включающий в себя несколько форм, позволяющих выполнять постановку задачи и сопровождать процесс ее решения с использованием специально разработанного для данных целей формульно-аналитического и графического редакторов.

Формульно-аналитический редактор позволяет вводить, программно формализировать, обрабатывать и показывать на экране дисплея математически заданные выражения. Ввод выражений может выполняться как последовательно – клавиатурным набором символов элементарных функций типа «интеграл», «дифференцирование», «вычисление», «подстановка значения», так и с использованием «Редактора формул», который кнопкой РЕДАКТОР ФОРМУЛ запускается с панели инструментов и имеет калькулятороподобное окно (см. рис. 1). Предусмотрена возможность построения, обработки и программной генерации (по специальным алгоритмам) формульных выражений для визуализации и вычисления значений (сечений).

Интерфейс постановки задачи. Основная форма постановки вышеописанных задач, показана на рис. 2, совместно с формами, показанными на рис. 3 – 5, позволяет в произвольном порядке пройти следующие этапы:

- описание исследуемого процесса, определяющегося оператором $L(\partial_s)$ или функцией $G(s-s')$ ему эквивалентной;
- ввод области функционирования процесса (графически, аналитически);
- аналитический ввод функции $y(s)$, если комплекс используется в лабораторном режиме;
- ввод (аналитически или графически) дискретно и непрерывно определенных наблюдений (2) – (7) за процессом; в лабораторном режиме допускается использование графической подсказки;
- ввод области определения (графически, аналитически и точечно) моделирующих функций или их значений;
- выбор типа задачи – «прямая», вышеописанная и «обратная», о которой будет сказано в последующих публикациях авторов.

На рис. 3 – 5 приведены примеры оконных форм по определению области функционирования процесса, начально-краевых наблюдений за ним и области определения моделирующих функций.

Обработка введенной информации в соответствии с алгоритмом решения рассматриваемой задачи выполняется аналитически с использованием формульно-аналитического редактора. Допускается аналитический и графический просмотр полученных результатов.

Особенности общей структуры и функционирования комплекса. Особенность построенного программного комплекса – трехуровневая архитектура с тонким клиентом, что позволяет проводить все расчеты на сервере, представленным Web-службой. Для работы с комплексом нужен доступ к сети Интернет. В программном комплексе реализована функция сохранения задач на сервере. Это позволяет ранее введенные задачи просматривать из клиентской части комплекса, а также просчитывать данные задачи на любом персональном ком-пьютере без особых ограничений на мощность. Последним достигается опреде-ленная мобильность данного программного комплекса.

Клиентская часть комплекса (см. рис. 6) состоит из двух библиотек (графической подсистемы и редактора формул) и интерфейса для ввода данных о задаче. Запросы, посылаемые клиентской частью комплекса в серверную часть, могут быть следующими: «получить список сохраненных задач», «загрузить ранее сохраненную в базе данных задачу», «получить список процессов описанных и сохраненных в базе данных», «получить список сохраненных переменных», «сохранить описание нового процесса», «сохранить новую переменную», «сохранить или обновить задачу», «выполнить расчет по отдельной задаче».

Серверная часть комплекса (см. рис. 7) включает в себя алгоритмы решения вышеописанных прикладных задач. Программная реализация этих алгоритмов выполнена универсально с использованием аналитики генерации формул, построенной на базе обратной польской записи (ОПЗ). Рабочая библиотека аналитики универсальная и может быть использована в других проектах. В данную библиотеку вошли: лексический анализатор формул, реализующий операции их разбора и сохранения в ОПЗ; блоки аналитического интегрирования, дифференцирования, логарифмирования, подстановки значений; блок рекурсивного вычисления формул. В библиотеке имеется также полноценный комплект алгоритмов матричной алгебры с элементами-функциями.

К особенностям программной реализации комплекса логично отнести и распараллеливание вычислительных процессов, реализованное как на уровне конкретных расчетных схем, так и через запуск отдельных задач. При этом каждый новый вычислительной запрос к серверу запускается в отдельном процессе, который по мере своего выполнения возвращает результаты вычислений. Задачи, решенные в комплексе, сохраняются в базе данных и при повторном запросе к серверу возвращаются клиенту без вычислений.

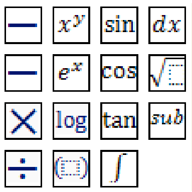

РИС. 1. Окно редактора формул

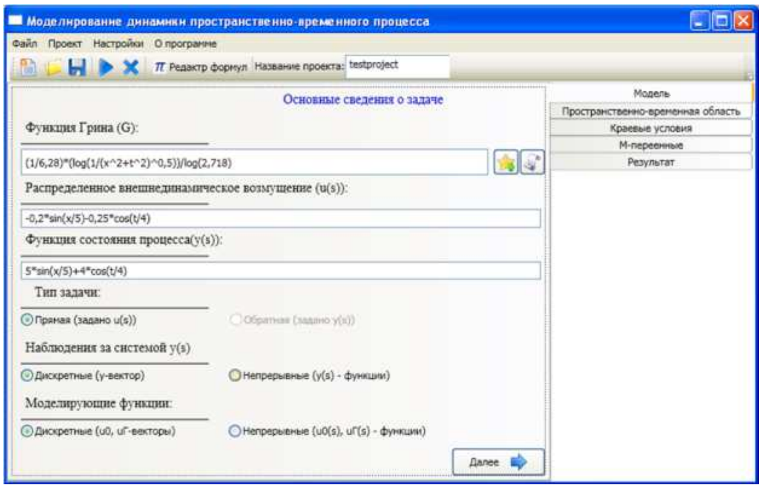

РИС. 2. Форма для ввода информации о задаче

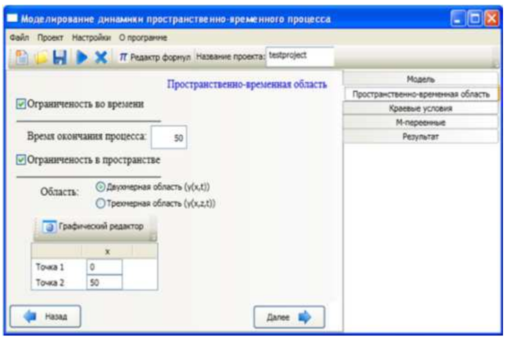

РИС. 3. Форма для ввода информации о пространственно-временной области

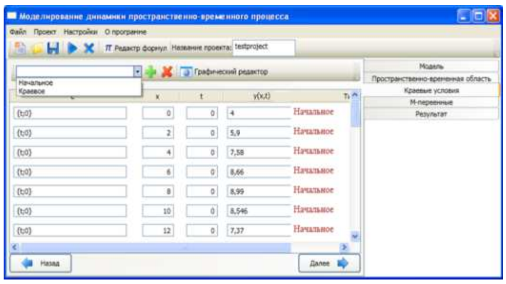

РИС. 4. Форма для ввода начально-краевых условий

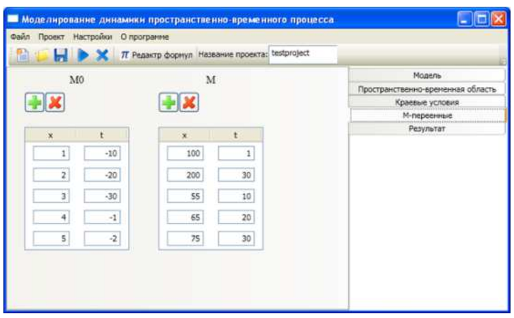

РИС. 5. Форма для ввода точек M_0, $M_Г$

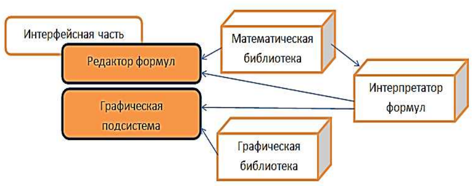

РИС. 6. Структура клиента

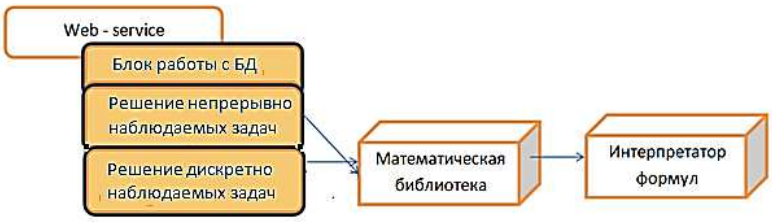

РИС. 7. Структура сервера

Особенности формульно-аналитического обеспечения комплекса. В программном комплексе заложены элементы аналитики, позволяющие выполнять обработку аналитических выражений и реализовывать алгоритмы с непрерывно определенными данными. Последнее позволило обработку исходной информации и формирование конечного результата выполнять в аналитическом виде. Аналитический блок комплекса строится на грамматике вида

$$G = (N, E, P, S),$$

где N – множество нетерминалов, E – алфавит, P – множество продукций, S – начальный нетерминал. В частности у нас $E = \{'1','2','3','4','5','6','7','8','9','0','+','-','*','/','subs','\mathrm{int}','L','\{',',',';','\wedge', '\log','(',')','x','\sin','\cos'\}$, N={A,C,D,F,num,digit,intnum}, а множеством продукций P являются:

S $\to$ A+A| A – A| A*A| A/A| (A)| log(A)| sin(A)| cos(A)| A^A| int(A){D;D;xC}|L(A){xC;F}| subs(A){xC;D};

A $\to$ S|xC|num;

C $\to$ digit digit;

D $\to$ num;

F $\to$ intnum;

num $\to$ digit| num digit, digit digit digit digit;

intnum $\to$ digit| intnum digit;

digit $\to$ 1|2|3|4|5|6|7|8|9|0.

На базе такой грамматики в комплексе реализован однопроходный анализатор, который строчное представление формулы разбирает на лексемы и записывает в стек по правилам ОПЗ. Построенная грамматика позволяет работать с математическими выражениями, содержащими в своей записи интегралы, производные, возведение в степень, логарифмирование, тригонометрические функции, дифференцирование. Вычисление значений выражений выполняется интерпретатором формул на базе их ОПЗ-представления. Интегрирование и дифференцирование при этом выполняются численно.

Заметим, что запрос на выполнение определенной обработки выражения реализуется простыми и привычными для пользователя конструкциями, например:

1) вычисление интеграла:

int (<выражение>){<нижняя граница интегрирования>, <верхняя граница интегрирования>, <переменная интегрирования в формате x**>};

2) дифференциирование выражения:

L (<выражение>){<переменная в формате x**>; <степень производной>};

3) подстановка значения переменной:

subs (<выражение>){<переменная в формате x**>; <значение>}.

При расчете значения <выражения> неопределенные аргументы обнуляются.

Особенности реализации графического блока комплекса. Существенным элементом при постановке, решении и анализе результатов решения рассматриваемых задач есть графическое обеспечение комплекса. В основу внедренного в комплексе графического блока положена методика триангуляции Делоне [3], согласно которой график трехмерной функции представляется набором точек, лежащих на ее поверхности. При построении графика функции графическая система выводит множество треугольников, построенных (триангулированных) на этих точках.

Алгоритм триангуляции функций, принятый для реализации в рамках данного комплекса, покажем на примере функции $f(x,z)$ при $x \in [a,b]$, $z \in [m,n]$. Он включает в себя следующие этапы:

1. Построение множества M точек поверхности:

Шаг 1. $M = \varnothing$.
Шаг 2. $x = a$.
Шаг 3. $z = m$.
Шаг 4. $y = f(x,z)$.
Шаг 5. $M = M \cup y$.
Шаг 6. $z = z + \Delta$.
Шаг 7. Если $z \le n$, то перейти к шагу 4.
Шаг 8. $x = x + \Delta$.
Шаг 9. Если $x \le b$, то перейти к шагу 3.

В результате работы данного алгоритма множество M содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} f(a,m) & \dots & f(a,n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(b,m) & \dots & f(b,n) \end{pmatrix}$$

значений $f(a,m),\dots, f(b,n)$ функции $f(x,z)$.

2. Построение множества T треугольников на базе строк

$$row(a,M) = (f(a,m),\dots, f(a,n)),$$

$$row(a+1,M) = (f(a+1,m),\dots, f(a+1,n))$$

вышепостроенной матрицы. Алгоритм генерации множества T выглядит так:

Шаг 1. $T = \varnothing$.

Шаг 2. $z = m$.

Шаг 3. $x_1 = a$.

Шаг 4. $x_2 = x_1 + 1$.

Шаг 5. $T = T \cup \{M(x_1, f(x_1, z), z), M(x_2, f(x_2, z), z),\ M(x_2, f(x_2, z+1), z+1)\}$.

Шаг 6. $x_1 = x_1 + \Delta$.

Шаг 7. Если $x_1 < b$, то перейти к шагу 4.

Шаг 8. $z = z + \Delta$.

Шаг 9. Если $z \le n$, то перейти к шагу 3.

3. Построение поверхности на базе множества T треугольников.

Особенности вывода результатов решения задачи. Вышеописанные формульно-аналитический и графический блоки комплекса позволяют результат решения задачи (в нашем случае это функция $y(s)$ состояния системы) представить в аналитическом и графическом виде. При аналитическом просмотре результата (рис. 8) последний показывается математической формулой. Предусмотрена возможность вычисления выведенной таким способом функции $y(s)$ в определенной точке. Для сравнения в этой же точке дается и значение функции состояния, принятой для формирования исходных наблюдений за системой. По желанию пользователя возможна визуализация результата (рис. 9). Здесь кроме графика функции $y(s)$ выводятся значения функции, наблюдаемые при постановке задачи. Запускаются описанные формы кнопкой «РЕЗУЛЬТАТ» на панели инструментов.

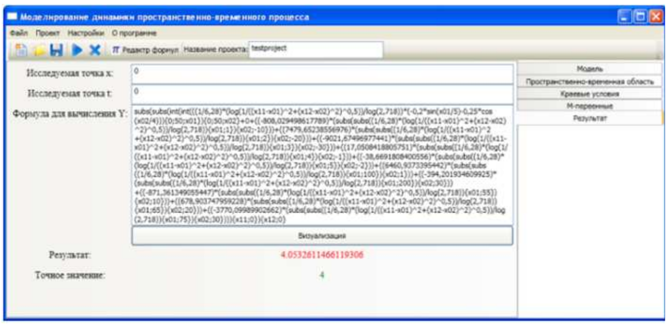

РИС. 8. Аналитический просмотр результата

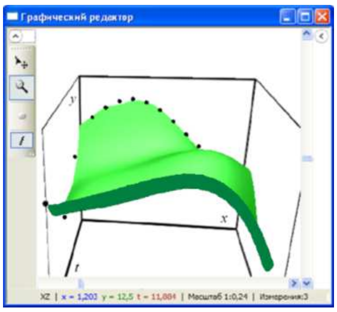

РИС. 9. Графическая визуализация результата

Пример решения задачи. В оконной форме, показанной на рис. 2, представлена информация, введенная пользователем в процессе постановки и решения задачи по построению функции $y(s)$ состояния процесса, динамика которого в области $S_0^T = \{(x,t) : x \in [0;50], t \in [0;50]\}$ (см. рис. 3) описана уравнением

$$(\partial_x^2 + \partial_t^2) y(x,t) = -0,2\sin\left(\frac{x}{5}\right) - 0,25\cos\left(\frac{t}{4}\right),$$

таким, что соответствующая ему передаточная функция [5]

$$G(s-s') = \left(\frac{1}{2\pi} 1n\left(\frac{1}{(x-x')^2 + (t-t')^2}\right)\right).$$

Иммитация наблюдений за процессом выполнялась (см. рис. 4) в точках $(0;0)$, $(2;0)$, …, $(28;0)$ при

$$y(x,t) = 5\sin\left(\frac{x}{5}\right) + 4\cos\left(\frac{t}{4}\right).$$

Для построения вектора значений моделирующих функций $u_0(x,t)$ и $u_\Gamma(x,t)$ были выбраны (см. рис. 5) точки:

$$M_0\!:\!(1;-10),\,(2;-20),\,(3;-30),\,(4;-1),\,(5;-2);$$

$$M_\Gamma\!:\!(100;1),(200;30),(55;10),(65;20),(75;30).$$

Результат решения задачи показан на рис. 8 и рис. 9.

Заключение. В работе сформулированы проблемы исследования динамики распределенных систем, функционирующих в условиях неполноты информации об их начально-краевом и поточном состоянии. Описана структура и особенности функционирования динамики таких систем на базе математических исследований проблемы, выполненных авторами ранее. Программный комплекс позволяет пользователю, не вникая в алгоритмы решения задач построения функций состояния распределенной пространственно-динамической системы, имитировать внешнединамические возмущения на систему, строить и исследовать данную функцию. Построенная функция, точно удовлетворяя математической модели системы, за среднеквадратическим критерием согласуется с начально-краевыми и поточными наблюдениями за системой. Задачи решаются без ограничений на количество и качество таких наблюдений – их количество не обязательно согласуется с порядком дифференциальной модели системы, а по природе они могут быть как непрерывными, так и дискретно определенными.

В.А. Стоян, К.В. Двірничук, О.Є. Єршов, О.С. Ємцов

ПРО СИСТЕМУ КОМП'ЮТЕРНО-АНАЛІТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
ДИНАМІКИ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ПРОЦЕСІВ

Описується структура та принципи побудови програмно-моделюючого комплексу для розв'язання задач динаміки просторово розподілених систем, неповно визначених за початково-крайовими спостереженнями.

V.A. Stoyan, K.V. Dvirnychuk, A.E. Ershov, A.S. Yemtsov

ABOUT SYSTEM COMPUTER-ANALYTICAL SIMULATION OF DISTRIBUTED DYNAMIC SPATIAL PROCESS

The structure and principles of construction of programming-modeling complex on dynamics problems solving of space distributed systems incompletely defined with initial-edge observations is described.

1. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б.* Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. – К.: Вид-во «Сталь», 2008. – 316 с.
2. *Стоян В.А.* Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2011. – 320 с.
3. *Seidel R.* The upper bound theorem for polytopes: an easy proof of it sasymptotic version // Computational Geometry. – 1995. – N 5. – P. 115 – 116.
4. *Бреббия К.* Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1982. – 302 с.

Получено 27.08.2012

Об авторах:

Стоян Владимир Антонович,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования сложных систем Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: v_a_stoyan@ukr.net

Двирничук Констатин Васильевич,
аспирант факультета кибернетики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: K_V_Dvirnychuk@mail.ru

Емцов Александр Сергеевич,
студент факультета информатики и вычислительной техники Национального технического университета Украины «КПИ»,
e-mail: emtcov@gmail.com

Ершов Александр Евгеньевич,
студент факультета информатики и вычислительной техники Национального технического университета Украины «КПИ».
e-mail: aringlot@gmail.com