КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

Системный анализ

Рассмотрено эмпирическую оценку неизвестного параметра двумерного однородного в узком смысле эргодического случайного поля с непрерывным временем. Приведены условия, при которых имеет место сильная состоятельность данной оценки.

УДК 519.21

Д.А. ГОЛОЛОБОВ

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Введение. В данной работе рассмотрена задача оценивания неизвестного параметра случайного поля. Цель работы – обоснование возможности использования метода эмпири-ческих средних для данной модели.

1. Постановка задачи и вспомога-тельные факты. Пусть

$$\xi(\vec{t}\,) = \xi(\vec{t}\,,\omega) = \xi(t_1, t_2, \omega),$$
$$\vec{t} = \{t_1, t_2\} \in \mathrm{T} \subset \mathrm{R}^2$$

– однородное в узком смысле эргодическое случайное поле с непрерывным временем, определенное на вероятностном простран-стве (Ω, G, P) со значениями в некотором метрическом пространстве $(Y, \mathcal{B}(Y))$. Пусть также I – замкнутое подмножество множе-ства R^l, $l \geq 1$, возможно, $I = \mathrm{R}^l$; $f : X \times Y \to \mathrm{R}^2$ – неотрицательная функция, удовлетворяющая таким условиям:

1) функция $f(\vec{u}, z)$, $u \in I$ непрерывна для всех $z \in Y$;

2) для каждого $\vec{u} \in I$ отображение $f(\vec{u}, z)$, $z \in Y$ является $\mathcal{B}(Y)$-измеримым.

Рассмотрим наблюдения

$$\left\{\xi(\vec{t}), \vec{t} \in [0, T]^2\right\}, T > 0; T \in \mathrm{R}^2.$$

Задача состоит в следующем: найти

$$\min_{\vec{u} \in I} \mathrm{E}\left\{ f(\vec{u}, \xi(\vec{0}))\right\} = \min_{\vec{u} \in I} F(\vec{u}).$$

Данная задача аппроксимируется задачей: найти

$$\min_{\vec{u}\in I}\frac{1}{T^2}\iint\limits_{[0,T]^2} f(\vec{u},\xi(\vec{t}))d\vec{t}=\min_{\vec{u}\in I}\frac{1}{T^2}\iint\limits_{[0,T]^2} f(\vec{u},\xi(t_1,t_2))dt_1dt_2 =$$

$$=\min_{\vec{u}\in I} F_T(\vec{u},\omega)=\min_{\vec{u}\in I} F_T(\vec{u}). \tag{1}$$

Приведем ряд вспомогательных утверждений, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма. [*, с. 15] Пусть $(X,\mathcal{X},\mu)$ пространство с конечной мерой, $\mu(X)>0$; $\{f_n=f_n(x):X\to \mathrm{R},n\in \mathrm{N}\}$ – последовательность неотрицательных $\mathcal{X}$-измеримых функций. Допустим, что μ – почти везде на X $f_n(x)\to\infty, n\to\infty.$ Тогда

$$\int\limits_X f_n(x)d\mu\to\infty, n\to\infty.$$

Теорема 1. Пусть T произвольное замкнутое или открытое подмножество R^l, $l\ge 1;(X,\mathcal{U})$ некоторое измеримое пространство. Положим, что $f:\mathrm{T}\times X\to[-\infty,+\infty]$ есть функция, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t,x), t\in\mathrm{T}$ непрерывна для всех $x\in X$;

2) $f(t,x), x\in X$ есть $\mathcal{U}$-измеримой для каждого $t\in\mathrm{T}$;

3) для любого $x\in X$ существует элемент $t^*\in\mathrm{T}$; такой, что

$$f(t^*,x)=\inf_{t\in\mathrm{T}} f(t,x).$$

Тогда существует измеримое отображение $\varphi: X\to\mathrm{T}$ такое, что

$$f(\varphi(x),x)=\inf_{t\in\mathrm{T}} f(t,x), x\in X.$$

Теорема 2. [*, с. 16 – 17]. Пусть $(\Omega,\mathcal{U},P)$ – полное вероятностное пространство, K – компактное подмножество некоторого банахового пространства с нормой $\|\cdot\|$. Допустим, что $\mathcal{U}_{\vec{T}},\vec{T}\in\mathrm{R}_+^m(\mathrm{N}^m)$ – семейство σ-алгебр, причем $\mathcal{U}_{\vec{T}}\subset\mathcal{U},\mathcal{U}_{\vec{T}}\subset\mathcal{U}_{\vec{S}},\vec{T}<\vec{S}$,

$$\left\{Q_{\vec{T}}(s)=Q_{\vec{T}}(s,\omega):(s,\omega)\in K\times\Omega,\vec{T}\in\mathrm{R}_+^m(\mathrm{N}^m)\right\}$$

– семейство действительных функций, удовлетворяющее следующим условиям:

* *Knopov P.S., Kasitskaya E.J.* Empirical estimates in stochastic optimization and identification, Kluwer Academic Publishers: Boston\London\Dordrecht. – 2002. – 250 p.

1) для фиксированных $\vec{T}$ и ω функция $Q_{\vec{T}}(s,\omega), s\in K$ – непрерывна;

2) для фиксированного $\vec{T}$ для каждого $s\in K$ функция $Q_{\vec{T}}(s,\omega)$ есть $\cup_{\vec{T}}$-измеримой;

3) для некоторого элемента $s_0 \in K$ и для каждого $s\in K$

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{\vec{T}\to\infty} Q_{\vec{T}}(s,\omega) = \Phi(s;s_0)\right\} = 1,$$

где $\Phi(s;s_0), s\in K$ – действительная функция, которая непрерывна на K и удовлетворяет условию

$$\Phi(s;s_0) > \Phi(s_0;s_0), s\neq s_0;$$

4) для любого $\delta > 0$ существует $\gamma_0 > 0$ и функция $c(\gamma) > 0,$ $\gamma > 0, c(\gamma)\to 0, \gamma\to 0$ такая, что для всякого элемента $s^{'} \in K$ и для любого $\gamma : 0<\gamma<\gamma_0$

$$\mathrm{P}\left\{\overline{\lim_{\vec{T}\to\infty}} \sup_{\left\{\left\|s-s^{'}\right\|<\gamma, \left\|s-s_0\right\|\geq\delta\right\}} \left|Q_{\vec{T}}(s) - Q_{\vec{T}}(s^{'})\right| < c(\gamma)\right\} = 1.$$

Для каждого $\vec{T}\in \mathrm{R}_+^m(\mathrm{N}^m)$ и $\omega\in\Omega$ элемент $s(\vec{T}) = s(\vec{T},\omega)$ определяется соотношением

$$Q_{\vec{T}}(s(\vec{T})) = \min_{s\in K} Q_{\vec{T}}(s).$$

Такой элемент всегда существует. Может существовать более одной точки минимума функции $Q_{\vec{T}}$. В этом случае $s(\vec{T})$ является любой точкой минимума. По теореме 1 элемент $s(\vec{T})$ может быть выбран $\cup_{\vec{T}}$-измеримым.

Тогда

$$\mathrm{P}\left\{\left\|s(\vec{T}) - s_0\right\| \to 0, \vec{T}\to\infty\right\} = 1.$$

Основной результат. Далее рассмотрим условия, необходимые для сильной состоятельности оценки и докажем состоятельность нашей оценки.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) для всех $c>0$

$$\mathrm{E}\left\{\max_{\|\vec{u}\|\leq c} f(\vec{u},\xi(\vec{0}))\right\} < \infty;$$

2) если множество I неограниченное, то для всех $z\in Y^{'}$,

$$\mathrm{P}\left\{\xi(\vec{t}) = \xi(t_1,t_2)\in Y^{'}, \text{ для всех } t_1,t_2\geq 0\right\} = 1,$$

имеем

$$f(\vec{u},z)\to\infty, \left\|\vec{u}\right\|\to\infty;$$

3) существует единственный вектор $\vec{u}_0 \in I$, являющийся точкой минимума функции

$$F(\vec{u}) = \mathrm{E}\left\{ f(\vec{u}, \xi(\vec{0}))\right\}, \vec{u} \in I.$$

Тогда, для всех $T > 0$ и $\omega \in \Omega', P(\Omega') = 1$ существует как минимум один вектор $\vec{u}(T) = \vec{u}(T, \omega) \in I$, являющийся точкой минимума функции $F_T(\vec{u})$ из (1), и для всех $T > 0$ отображение $\vec{u}(T, \omega), \omega \in \Omega'$, может быть выбранным $\mathcal{G}_T'$ - измеримым, где $\mathcal{G}_T' = \mathcal{G}_T \cap \Omega', \mathcal{G}_T = \sigma\{\xi(\vec{t}) = \xi(t_1, t_2), \quad 0 \le t_1, t_2 \le T\}$. Для любого выбора $\mathcal{G}_T'$ -измеримой функции $\vec{u}(T, \omega)$

$$\mathrm{P}\left\{\vec{u}(T) \to \vec{u}_0, F_T(\vec{u}(T)) \to F(\vec{u}_0), T \to \infty\right\} = 1.$$

Доказательство. По условию 1) данной теоремы и теореме Фубини для всех n:

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^n \int_0^n \max_{\|\vec{u}\| \le n} f(\vec{u}, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2 < \infty\right\} = 1.$$

Тогда для всех T, $c > 0$:

$$\int_0^T \int_0^T \max_{\|\vec{u}\| \le c} f(\vec{u}, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2 \le \int_0^n \int_0^n \max_{\|\vec{u}\| \le n} f(\vec{u}, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2 < \infty,$$

где $n \in \mathrm{N}, n \ge T, n \ge c$. Функция $F_T(\vec{u}), \vec{u} \in I$ непрерывна почти наверное для всех $T > 0$ по теореме Лебега о предельном переходе. Если множество I неограниченное, тогда по условию 2) данной теоремы и лемме почти наверное для каждого $T > 0$

$$F_T(\vec{u}) \to \infty, \|\vec{u}\| \to \infty,$$

и существует $\Delta = \Delta(T, \omega) > 0$ такое, что для всех $\|\vec{u}\| \in I, \|\vec{u}\| > \Delta$

$$F_T(\vec{u}) > F_T(\vec{u}_0).$$

Таким образом, с вероятностью 1 для всех T

$$\inf_{\vec{u} \in I} F_T(\vec{u}) = \inf_{\|\vec{u}\| \in I: \|\vec{u}\| \le \Delta} F_T(\vec{u}).$$

Тогда для всех $T>0$ и $\omega\in\Omega', P(\Omega')=1$ существует как минимум одна точка минимума $\vec{u}(T)=\vec{u}(T,\omega)$ функции $F_T(\vec{u}), \vec{u}\in I$. Для любых $T, \vec{u}$ отображение $F_T(\vec{u},\omega), \omega\in\Omega'$ есть $\mathcal{G}_T'$-измеримое. Тогда по теореме 1 для каждого $T>0$ отображение $\vec{u}(T,\omega)$ может быть выбрано $\mathcal{G}_T'$-измеримым.

Докажем, что если множество *I* неограниченное, то существует $c>0$ такое, что начиная с некоторого *T*, зависящего от ω, все точки минимумов функции $F_T(\vec{u}), \vec{u}\in I$ принадлежат множеству

$$K_c=\left\{\vec{u}\in I:\left\|\vec{u}\right\|\le c\right\}$$

с вероятностью 1. По условию 2) с вероятностью 1 для всех $t_1, t_2\ge 0$

$$\varphi(c,\xi(t_1,t_2))\to\infty, c\to\infty,$$

где

$$\varphi(c,z)=\inf_{\left\|\vec{u}\right\|\ge c} f(\vec{u},z), z\in Y, c>0.$$

Отсюда по лемме имеем

$$\mathrm{E}\left\{\varphi(c,\xi(\vec{0}))\to\infty\right\}, c\to\infty.$$

Выберем c_0 так, чтобы

$$\mathrm{E}\left\{\varphi(c_0,\xi(\vec{0}))\right\}>\mathrm{E}\left\{f(\vec{u}_0,\xi(\vec{0}))\right\}.$$

По свойствам эргодической случайной функции векторного аргумента с вероятностью 1, начиная с некоторого *T*, зависящего от ω, имеем

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\varphi(c_0,\xi(t_1,t_2))dt_1dt_2>\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T f(\vec{u}_0,\xi(t_1,t_2))dt_1dt_2=F_T(\vec{u}_0)$$

с вероятностью 1. Поскольку

$$\inf_{\left\|\vec{u}\right\|>c}F_T(\vec{u})\ge\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\varphi(c_0,\xi(t_1,t_2))dt_1dt_2,$$

то мы доказали необходимое утверждение.

Далее проверим выполнение условий теоремы 2 для семейства функций:

$$\left\{F_T:K\times\Omega'\to\mathrm{R}^2, T>0\right\},$$

где $K=K_{c_0}$.

Очевидно, что условия 1) и 2) теоремы 2 удовлетворены.

Вследствие эргодичности случайного поля $\xi(\vec{t})$, имеем

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{T\to\infty} F_T(\vec{u}) = F(\vec{u})\right\} = 1, \vec{u} \in I.$$

Согласно условию 1) теоремы 2, функция $F(\vec{u})$ непрерывна. Таким образом, условие 3) теоремы 2 выполнено.

Обозначим

$$\varphi(\gamma, z) = \sup_{\left\{\vec{u},\vec{v}\in K:\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|<\gamma\right\}} \left| f(\vec{u}, z) - f(\vec{v}, z)\right|, \gamma > 0, z \in Y.$$

С вероятностью 1 для всех $T > 0, \vec{u}_1 \in K, \gamma > 0$:

$$\zeta(\vec{u}_1, \gamma) = \sup_{\left\{\vec{u}\in K:\left\|\vec{u}-\vec{u}_1\right\|<\gamma\right\}} \left|F_T(\vec{u}) - F_T(\vec{u}_1)\right| \le \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \psi(\gamma, \xi(t_1, t_2))dt_1dt_2. \qquad (2)$$

Вследствие эргодичности поля

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \psi(\gamma, \xi(t_1, t_2))dt_1dt_2 = \mathrm{E}\{\psi(\gamma, \xi(\vec{0}))\}\right\} = 1. \qquad (3)$$

Обозначим

$$c(\gamma) = \mathrm{E}\{\psi(\gamma, \xi(\vec{0}))\} + \gamma, \gamma > 0.$$

Учитывая (2), (3), для всех $\vec{u}_1 \in K, \gamma > 0$:

$$\mathrm{P}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\, \zeta_T(\vec{u}_1, \gamma) < c(\gamma)\right\} = 1.$$

Если функция непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нем. Отсюда, для любого $z \in Y$

$$\psi(\gamma, z) \downarrow 0, \gamma \to 0.$$

Тогда, по теореме Леви о предельном переходе под знаком интеграла

$$c(\gamma) \to 0, \gamma \to 0.$$

Доказательство завершено.

Заключение. В результате проведенного исследования рассмотрены условия, при которых имеет место сильная состоятельность оценки неизвестного параметра однородного в узком смысле эргодического двумерного случайного поля.

Д.О. Гололобов

ЕМПІРИЧНА ОЦІНКА НЕВІДОМОГО ПАРАМЕТРА ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ
З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

Розглянуто параметричну емпіричну оцінку невідомого параметра однорідного у вузькому сенсі ергодичного двовимірного випадкового поля з неперервним часом. Наведено умови, за яких має місце сильна конзистентність даної оцінки.

D.A. Gololobov

EMPIRICAL ESTIMATE OF INDEFINITE PARAMETER FOR RANDOM FIELD WITH
CONTINUOUS TIME

Parametric estimate for a homogeneous in a strict sense two-dimensional random field with a continuous time is considered. Conditions, under which strong consistency of the parameter empirical estimate holds, are established.

Получено 10.01.2012

Об авторе:

Гололобов Дмитрий Александрович,
аспирант Киевского национального университета им. Тараса Шевченко.