КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

Оптимизация вычислений

*Для решения задачи оптимизации структуры посевных площадей предложено использовать подход, принятый в теории портфельной оптимизации. В рамках этого подхода сформулирована задача максимизации средней урожайности сельскохозяйственных культур при ограничениях на риск недобора урожая вследствие реализации неблагоприятных погодных условий.*



УДК 631.153.3

Н.А. ГОЛОДНИКОВА

# ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОСЕВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ С УЧЕТОМ РИСКА

**Введение**. Оптимизация структуры посевных площадей под сельскохозяйственными культурами – одна из составляющих стабильного производства продукции растениеводства. На практике размещение культур осуществляется на основе детальной агроклиматической оценки их возможной продуктивности. Для каждой природной зоны выделялись свои культуры, которые в данных природных условиях на современном уровне селекции и технологии выращивания отличаются относительно высоким и стабильным урожаем [1]. Математически данная проблема формулировалась в виде задачи линейного программирования, в которой максимизировался валовый сбор урожаев в многолетнем разрезе при ограничениях, исключающих производство монокультуры. В данной работе предлагается использовать подход, принятый в теории портфельной оптимизации. Согласно данному подходу максимизируется прибыль при ограничениях на риск потерь. В терминах оптимизации структуры посевных площадей задача состоит в поиске такого распределения общей посевной площади между разными сельскохозяйственными культурами, при котором максимизируется среднегодовая урожайность при ограничении на риск недобора урожая вследствие реализации неблагоприятных погодных условий. Предлагаемый подход может быть реализован как на уровне отдельного хозяйства, так и на уровне административных районов, областей и страны в целом.

**Постановка задачи.** По своей природе, задача оптимизации структуры посевных площадей аналогична задаче портфельной оптимизации. Поэтому для ее решения целесообразно воспользоваться хорошо развитым математическим аппаратом портфельной оптимизации, широко применяемый финансовыми менеджерами.

По аналогии с теорией портфельной оптимизации при формулировке задачи оптимизации структуры посевных площадей с учетом риска, рассмотрим урожайность сельськохозяйственных культур как набор случайных величин, каждая из которых имеет свою функцию распределения, которая на практике неизвестна. Поэтому, как и в теории портфельной оптимизации, используем исторические данные, т. е. статистические данные об урожайности сельскохозяйственных культур за прошедшие годы.

В случае, когда решается задача распределения посевных площадей между культурами из группы «зерновые и зернобобовые», в качестве показателя используется средняя урожайность группы данных однородных культур за отдельные годы; для группы кормовых культур – средний выход кормовых единиц или протеина на 1 га посевной площади; для группы масличных культур – средний выход растительных жиров на 1 га посевной площади. Более общая постановка задачи приведена в работе [3]. В данной работе рассматривается группа зерновых и зернобобовых культур.

Пусть $I$ обозначает количество рассматриваемых зерновых и зернобобовых культур; $\xi_i$ – случайная величина, моделирующая урожайность $i$-ой культуры, $i=1,\ldots,I$; $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_I)$ – случайный вектор, компонентами которых являются случайные величины $\xi_i$, $i=1,\ldots,I$; $x_i$ – доля земельных площадей, отводимых под $i$-ю культуру; $x=(x_1,x_2,\ldots,x_I)$ – вектор, обозначаюший структуру посевных площадей. Переменные $x_i$, $i=1,\ldots,I$, должны удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^{i} x_i = 1, \tag{1}$$

$$x_i \ge 0. \tag{2}$$

Для моделирования урожайности группы «зерновые и зернобобовые культуры», для любой структуры посевных площадей $x$ рассматривается случайная функция

$$\eta(x,\xi) = \sum_{i=1}^{I} x_i \xi_i . \qquad (3)$$

В дальнейшем будем использовать термин «урожайность зерновых и зернобобовых культур».

При фиксированной структуре посевных площадей $x$ функция

$$\omega(x,\xi) = E[\eta(x,\xi)] - \eta(x,\xi) \qquad (4)$$

представляет собой случайное отклонение урожайности зерновых и зернобобовых культур от среднего значения.

Функцию $\omega(x,\xi)\frac{\pi}{4}$ можно трактовать как функцию потерь урожайности. Ее положительные значения соответствуют нежелательным исходам (недобор урожая по отношению к среднему уровню), а отрицательные – благоприятным (урожай, превышающий средний уровень). Учитывая это возникает проблема выбора подходящей меры риска реализации нежелательных исходов. В течение нескольких десятилетий в теории портфельной оптимизации в качестве меры риска использовалось стандартное отклонение. Поскольку данный статистический показатель характеризует ширину вероятностного распределения функции потерь, большие отклонения от среднего как в сторону положительных значений, так и в сторону отрицательных рассматриваются как рискованные, что противоречит здравому смыслу. Поэтому в настоящее время широкое распространение получила мера риска VaR (Value at Risk), учитывающая отклонения только в одну (неблагоприяную) сторону.

Пусть для каждого $x$ вероятностное распределение функции $\omega(x,\xi)$ равно:

$$F(x,z) = P\{\omega(x,\xi) \le z\}. \qquad (5)$$

Тогда VaR при уровне значимости $\alpha$ $(0<\alpha<1)$ функции потерь урожайности $\omega(x,\xi)$, обусловленных выбором структуры урожайности $x$, определяется по формуле [4 – 6]:

$$VaR_\alpha(x) = \min\{z \mid F(x,z) \ge \alpha\}. \qquad (6)$$

Данное определение означает, что при фиксированном $x$ с вероятностью $\alpha$ недобор урожая по отношению к среднему уровню не будет превышать значение $VaR_\alpha(x)$. Если при фиксированном $x$ функция распределения $F(x,z)$ непрерывна и строго монотонна, то $VaR_\alpha(x)$ представляет собой квантиль уровня $\alpha$ для этой функции. Данная мера риска имеет простой интуитивно понятный смысл. Однако она не отображает возможность реализации больших потерь за пределами $VaR_\alpha(x)$ с маленькими вероятностями.

Для учета «тяжелых хвостов» в функции распределения потерь в качестве меры риска используют CVaR (conditional VaR). Эта мера риска определяет средние потери, превышающие соответствующее значение VaR. В случае, когда при фиксированном $x$ функция распределения $F(x,z)$ непрерывна в точке $VaR_\alpha(x)$, CVaR определяется по формуле [6]:

$$CVaR_\alpha(x) = E\{\omega(x,\xi) | \omega(x,\xi) \ge VaR_\alpha(x)\}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь случай, когда при фиксированном $x$ случайная величина $\omega(x,\xi)$ принимает конечное число значений, которые упорядочены следующим образом: $z_1 < z_2 < \ldots < z_N$. При этом вероятность реализации значения $z_k$ равна $p_k > 0$, $k = 1,\ldots,N$. Пусть при этом индекс $k_\alpha$ удовлетворяет условию:

$$\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k \ge \alpha > \sum_{k=1}^{k_\alpha - 1} p_k .$$

Тогда $CVaR_\alpha(x)$ вычисляется по формуле [6]:

$$CVaR_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\left(\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha\right) z_{k_\alpha} + \sum_{k=k_\alpha+1}^{N} p_k z_k\right]. \tag{8}$$

Поскольку на практике распределение $\omega(x,\xi)$ неизвестно, то для вычисления $CVaR_\alpha(x)$ используется широко используемый сценарный подход, основанный на исторических данных. В рамках данного подхода будем считать, что случайная величина $\xi_i$ принимает с равными вероятностями значения $u_{i1},\ldots u_{iJ}$, где $u_{ij}$ – историческая урожайность $i$-ой культуры, $i = 1,\ldots,I$, в $j$-ом году; $J$ – период, за который используются статистические данные об урожайности зерновых и зернобобовых культур за прошедшие годы. При этом случайный вектор $\xi$ принимает с равными вероятностями векторные значения $u^1,\ldots u^J$, где $u^j = (u_{1j},\ldots u_{Ij})$, $j = 1,\ldots,J$. Вектор $u^j$ трактуется как случайная реализация

( $j$ -й сценарий) вектора $\xi$. При фиксированном $x$ случайная функция $\eta(x,\xi)$ принимает с равными вероятностями значения $\eta_1(x),\ldots\eta_J(x)$, где

$$\eta_j(x)=\sum_{i=1}^{I}x_i u_{ij}, \quad j=1,2,\ldots,J. \tag{9}$$

Аналогично, функция потерь урожайности $\omega(x,\xi)$ при фиксированном $x$ будет дискретной случайной величиной, принимающей значения $\omega_1(x)$, $\omega_2(x),\ldots\omega_J(x)$, где

$$\omega_j(x)=\sum_{i=1}^{I}x_i\left[\left\{\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}u_{ij}\right\}-u_{ij}\right],\ j=1,2,\ldots,J\ . \tag{10}$$

Используя в качестве меры риска $CVaR_\alpha(x)$, сформулируем задачу оптимизации структуры посевных площадей следующим образом.

Найти структуру посевных площадей $x=(x_1,x_2,\ldots,x_I)$, максимизирующую среднюю урожайность зерновых и зернобобовых культур

$$\max_x E[\eta(x,\xi)] \tag{11}$$

при ограничениях: на риск недобора урожая вследствие реализации неблагоприятных погодных условий

$$CVaR_\alpha(x)\le R, \tag{12}$$

на переменные задачи

$$\sum_{i=1}^{i}x_i=1\,, \tag{13}$$

$$l_i\le x_i\le u_i,\ \ i=1,\ldots I. \tag{14}$$

В работах [5, 6] показано, как свести задачу с $CVaR_\alpha(x)$ к задаче линейного программирования.

**Результаты расчетов.** Для проведения расчетов использованы статистические данные о посевной площади и валовом сборе зерновых и зернобобовых культур в Украине за 1990 – 2009 гг. [7]. Всего имеется $J=20$ различных вариантов размещения рассматриваемых культур по посевным площадям. Рассмотрим какой-нибудь из данных вариантов и предположим, что соответствующая структура $x$ посевных площадей была неизменной за период 1990 – 2009 гг.

Рассматривая набор значений урожайности всех $I$ культур, полученных в $j$-ом году, как $j$-й сценарий $u^j = (u_{1j},\ldots u_{Ij})$ случайной реализации вектора $\xi$, определим по формуле (9) сценарии урожайности зерновых и зернобобовых культур $\eta_1(x),\ldots\eta_J(x)$ и среднюю за 1990 – 2009 гг. урожайность данной группы культур $E[\eta(x,\xi)]$.

Используя формулы (10) и (8), определим сценарии потерь урожайности $\omega_1(x)$, $\omega_2(x),\ldots\omega_J(x)$ и риск таких потерь, выраженный мерой $CVaR_\alpha(x)$ с уровнем значимости $\alpha = 0.75$. Фиксированному варианту структуры посевных площадей $x$ соответствует точка на графике, на котором по оси X откладываются значения риска, $CVaR_{0.75}(x)$, а по оси Y – средняя за 1990 – 2009 гг. урожайность зерновых и зернобобовых культур. На рисунке показаны точки, соответствующие различным историческим вариантам размещения рассматриваемых культур по посевным площадям.

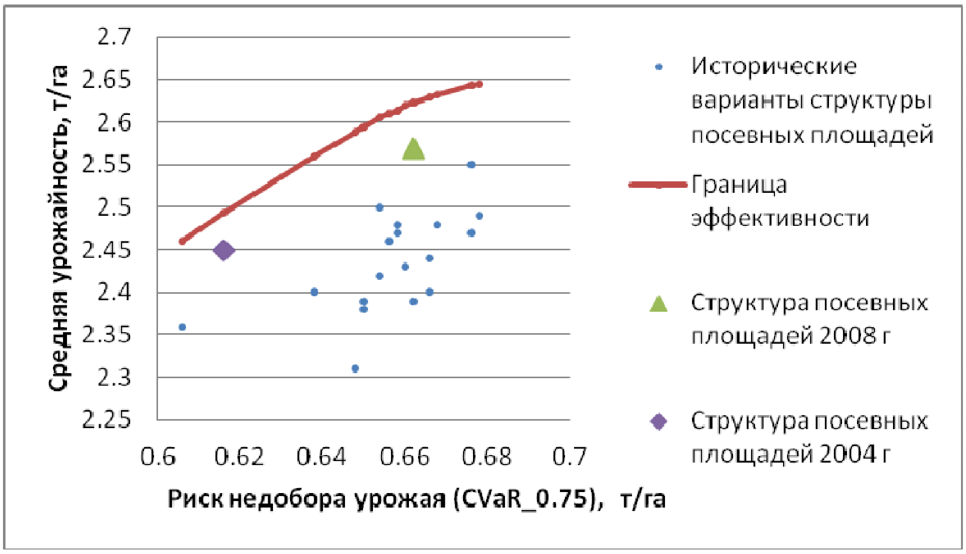


РИСУНОК. Эффективность исторических вариантов структуры посевных площадей

Взаимное расположение точек на графике характеризует относительную эффективность структур посевных площадей, которые им соответствуют. Точки, расположенные выше и левее заданной точки, соответствуют более эффективным структурам посевных площадей, поскольку они характеризуются большими значениями средней урожайности и меньшими значениями риска. Для того чтобы определить множество наиболее эффективных структур посевных площадей, необходимо решить задачи (11) – (14) при разных значениях правой части $R$ в ограничении на риск (12). При расчетах параметр $R$ принимал все значения $CVaR_{0.75}$, соответствующие 20 историческим вариантам структуры посевных площадей.

В результате решения набора задач (11) – (14) построена кривая, аналогичная границе эффективности Марковица (efficient frontier), используемая в теории портфельной оптимизации. Все точки, расположенные на границе эффективности, соответствуют эффективным структурам посевных площадей с наилучшими соотношениями «средняя урожайность – риск недобора урожая». Для любой структуры посевных площадей, изображенной точкой, расположенной ниже границы эффективности, можно построить структуру, которая при том же уровне риска характеризуется более высокой средней урожайностью. Согласно определению границы эффективности, невозможно построить структуру посевных площадей, соответствующую точке, расположенной выше этой кривой.

**Заключение**. Рассмотрено задачу оптимизации структуры посевных площадей с учетом риска. Для ее решения предложено использовать подход, используемый в теории портфельной оптимизации. Показано, что граница эффективности Марковица – удобный инструментарий для анализа полученного решения.

*Н.О. Голоднікова*

ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРИ ПОСІВНИХ ПЛОЩ З УРАХУВАННЯМ РИЗИКУ

Для розв'язання задачі оптимізації структури посівних площ запропоновано використовувати підхід, прийнятий у теорії портфельної оптимізації. У рамках цього підходу сформульовано задачу максимізації середньої врожайності сільськогосподарських культур при обмеженнях на ризик недобору врожаю внаслідок реалізації несприятливих погодних умов.

*N.A. Golodnikova*

OPTIMIZATION OF CROP PATTERNS SUBJECT TO RISK

To solve the problem of optimization of crop patterns, we propose to use an approach, adopted in the theory of portfolio optimization. Within this approach, we formulate the problem of maximization of the average crop capacity subject to the risk of crop losses as a result of adverse weather conditions.

1. *Ляшенко Г.В.* Оптимизация структуры посевов сельскохозяйственных культур в Украине с учетом агроклиматических ресурсов // Український гідрометеорологічний журнал. – 2009. – № 5. – С. 137 – 146.
2. *Luenberger D.G.* Investment Science. New York, Oxford University Press, 1998. – 494 p.
3. *Пепеляев В.А., Голодникова Н.А.* Оптимизация структуры сельскохозяйственного производства для обеспечения продовольственной безопасности Украины // Компьютерная математика. – 2011. – № 1. – С. 46 – 55.
4. *Uryasev. S.* Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications. Financial Engineering News. – 2000. – N 14. – P. 1 – 5.
5. *Rockafellar R.T. and Uryasev S.* Optimization of Conditional Value-At-Risk // The Journal of Risk. – 2000. – Vol. 2, N 3. – P. 21 – 41.
6. *Rockafellar R.T. and Uryasev S.* Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions // Journal of Banking and Finance. – 2002. – Vol. 26. – P. 1443 – 1471.
7. *Рослинництво* України 2009: Статистичний збірник / За ред. Ю.М. Остапчука. – К.: Державна служба статистики України, 2010. – 124 с.

Получено 21.02.2013

*Об авторе:*

*Голодникова Нина Александровна*,
младший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.