КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Экспертные системы, методы индуктивного вывода

УДК 004.42:510.69

С.С. ШКІЛЬНЯК

СЕКВЕНЦІЙНІ СИСТЕМИ ЛОГІЧНОГО ВИВЕДЕННЯ ПЕРШОПОРЯДКОВИХ ЛОГІК ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ

Для чистих першопорядкових логік часткових однозначних та часткових неоднозначних предикатів побудовано секвенційні числення. При цьому використано спеціальні предикати-індикатори наявності значення для змінних. Доведено коректність і повноту таких числень.

Вступ. Апарат математичної логіки належить до основних засобів моделювання предметних областей, він є ядром сучасних інформаційних і програмних систем [1]. Зазвичай для цього використовується класична логіка предикатів та базовані на її основі спеціальні логіки (модальні, темпоральні, епістемічні, програмні тощо). Проте класична логіка має принципові обмеження. Вона недостатньо враховує структурованість, неповноту, частковість інформації про предметну область. Тому вельми актуальною стає проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Природною основою такої побудови є спільний для логіки й програмування композиційно-номінативний підхід [2]. На його базі побудовано та досліджено (див., наприклад, [3, 4]) широкий спектр логік часткових предикатів. Такі логіки названо *композиційно-номінативними логіками* (КНЛ). Вони базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на наборах іменованих значень – квазіарних відображень.

Одним із найважливіших застосувань математичної логіки є автоматизація пошуку виведень. Ефективне знаходження виведень необхідне для успішного вирішення низки задач, що виникають в інформатиці та програмуванні. Природним апаратом побудови виведень є числення ґенценівського типу –

секвенційні числення. Для різних класів КНЛ такі числення збудовано, зокрема, в [3, 5–7].

Мета даної роботи – побудова спеціальних секвенційних числень для чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) часткових предикатів. Характерна їх особливість – використання предикатів-індикаторів [8] наявності значення для предметних імен. Для збудованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Основні визначення та позначення. Поняття, які тут не визначено, тлумачимо в сенсі [3, 4, 6]. Для полегшення читання наведемо основні визначення.

V-іменна множина (V-ІМ) над A – це однозначна функція вигляду $\delta : V \to A$.

Клас усіх V-ІМ над A позначимо ${}^{V}\!A$.

V-квазіарний предикат на множині A – це довільна (часткова неоднозначна, взагалі кажучи) функція вигляду $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$, де T та F – істиннісні значення.

Беремо найпростіше математичне уточнення багатоаспектного поняття неоднозначної функції, трактуючи неоднозначні предикати як відношення між ${}^{V}\!A$ та $\{T, F\}$. Такі предикати можна назвати предикатами реляційного типу. Ми трактуємо $P(d)$ як множину значень, які предикат P може прийняти на $d \in {}^{V}\!A$.

Для V-квазіарного предиката P задаємо області істинності та хибності:

$$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid T \in P(d)\};\ \boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid F \in P(d)\}.$$

V-квазіарний предикат P однозначний, якщо $\boldsymbol{T}(P) \cap \boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

V-квазіарний предикат P тотальний, якщо $\boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{F}(P) = {}^{V}\!A$.

Логіка тотальних однозначних предикатів – це класична логіка. Логіки однозначних часткових предикатів – це логіки з неокласичною семантикою, тотальних неоднозначних предикатів – логіки з пересиченою семантикою. Логіки часткових неоднозначних предикатів названі логіками із загальною семантикою

Неокласична семантика та пересичена семантика дуальні (див. [4]), тому в цій роботі логіки тотальних неоднозначних предикатів розглядати не будемо.

Базові композиції ЧКНЛ – $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ (їх визначення див. [3, 4]).

Семантичні моделі ЧКНЛ – композиційні системи квазіарних предикатів $({}^{V}\!A, Pr^{A}, C)$, де Pr^{A} – клас V-квазіарних предикатів на A, C визначається базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ [3]. Терми композиційної алгебри $(Pr^{A}, \boldsymbol{C})$ трактуємо як формули мови ЧКНЛ. Алфавіт мови: символи $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ базових композицій, множина Ps предикатних символів (сигнатура мови), множина V предметних імен (змінних). Множина Fr формул мови визначається індуктивно:

1) кожний $p \in Ps$ – формула; такі формули атомарні;

2) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

На основі тотального однозначного відображення $I : Ps \to Pr^{A}$, яке позначає символами Ps базові предикати, задаємо відображення інтерпретації $J : Fr \to Pr^{A}$:

1) $J(p) = I(p)$ для кожного $p \in Ps$;

2) $J(\neg\Phi) = \neg(J(\Phi))$, $J(\vee\Phi\Psi) = \vee(J(\Phi), J(\Psi))$,

$J(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(J(\Phi)),\ J(\exists x\Phi) = \exists x(J(\Phi))$.

Предикат $J(\Phi)$ позначаємо Φ_A.

Моделі мови ЧКНЛ – об'єкти вигляду $\boldsymbol{A} = ((A, Pr^A), I)$ – алгебраїчні системи з доданою сигнатурою (мовою), які скорочено позначаємо (A, I) [3]. Кожна така $\boldsymbol{A}$ задає композиційну систему $({}^VA, Pr^A, C)$.

Для логік квазіарних предикатів важливим є те, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Тому для цих логік неправильні [3, 4] деякі важливі закони класичної логіки. Отже, при інтерпретаціях формул варто явно зазначати означені та неозначені предметні імена. В даній роботі для цього використаємо запропоновані в [8] спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами (змінними) предикати-індикатори εx. Вони визначають наявність у даних компоненти з таким x – наявність значення для x. Предикати εx задамо так:

$$\boldsymbol{F}(\varepsilon x) = \{d \in {}^VA \mid d(x)\downarrow\};\ \ \boldsymbol{T}(\varepsilon x) = \{d \in {}^VA \mid d(x)\uparrow\}.$$

Відношення логічного наслідку. Секвенційні числення формалізують фундаментальне поняття логічного слідування. Його уточнення за допомогою відношень логічного наслідку для КНЛ запропоновано в [4].

Спочатку задамо відношення наслідку для множин формул при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A}$: для довільних $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$ визначаємо:

$\Gamma\ {}_A|\!\!=_{Cl} \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$ («неспростовнісний» наслідок);

$\Gamma\ {}_A|\!\!=_{T} \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$ («істиннісний» наслідок);

$\Gamma\ {}_A|\!\!=_{F} \Delta$, якщо $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$ («хибнісний» наслідок);

$\Gamma\ {}_A|\!\!=_{TF} \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_A|\!\!=_{F} \Delta$ та $\Gamma\ {}_A|\!\!=_{T} \Delta$ («сильний» наслідок);

Відношення логічного наслідку для множин формул $|\!\!=_{Cl}$, $|\!\!=_{T}$, $|\!\!=_{F}$, $|\!\!=_{TF}$ визначаємо за схемою: $\Gamma\,|\!\!=_{*} \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_A|\!\!=_{*} \Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Для логік однозначних часткових предикатів (неокласична семантика) можна розглядати відношення $|\!\!=_{Cl}$, $|\!\!=_{T}$, $|\!\!=_{F}$, $|\!\!=_{TF}$. Для логік неоднозначних часткових предикатів (загальна семантика) відношення $|\!\!=_{Cl}$ порожнє, відношення $|\!\!=_{T}$ та $|\!\!=_{F}$ збігаються, тому маємо єдине природне змістовне відношення $|\!\!=_{TF}$.

Для логік тотальних неоднозначних предикатів (пересичена семантика) замість $|\!\!=_{Cl}$ розглядають [3] дуальне відношення $|\!\!=_{Cm}$. Дуальними є також $|\!\!=_{T}$ та $|\!\!=_{F}$:

$\Gamma\,|\!\!=_{T} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow$ $\Gamma\,|\!\!=_{F} \Delta$ в пересиченій семантиці;

$\Gamma\,|\!\!=_{F} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow$ $\Gamma\,|\!\!=_{F} \Delta$ в пересиченій семантиці.

Враховуючи цю дуальність, обмежимось розглядом ЧКНЛ однозначних часткових предикатів (ЧКНЛО) та неоднозначних часткових предикатів (ЧКНЛН).

Основні властивості відношень $|\!\!=_{T}$, $|\!\!=_{F}$, $|\!\!=_{TF}$, $|\!\!=_{Cl}$, $|\!\!=_{Cm}$ наведені в [5–7].

Надалі $|\!\!=$ позначає одне із $|\!\!=_{Cl}$, $|\!\!=_{T}$, $|\!\!=_{F}$, $|\!\!=_{TF}$ для відповідної семантики.

Секвенційні форми та умови замкненості секвенцій. Секвенції трактуємо як множини формул, специфікованих (відмічених) символами $\vdash$ та $\dashv$. Позначаємо секвенції як $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, скорочено Σ. Секвенційні числення формалізують відношення логічного наслідку для множин формул, їх будуємо так: $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна $\Leftrightarrow$ $\Gamma \models \Delta$.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції.

Замкненість $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ означає, що $\Gamma \models \Delta$. Базова умова замкненості секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$:

C) існує формула Φ така, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

Додаткова умова в усіх численнях – це *unv*-замкненість [7]. Секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ із множиною *unv*-змінних $Un = \{u \in V \mid \varepsilon(u) \in \Gamma\}$ *unv*-замкнена, якщо:

UnC) існують *Un*-*unv*-еквівалентні *R*-формули Φ та Ψ такі, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Psi \in \Delta$.

Наступні додаткові умови замкненості $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ істотні для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$:

CL) існує формула Φ: $\Phi \in \Gamma$ та $\neg\Phi \in \Gamma$;

CR) існує формула Φ: $\Phi \in \Delta$ та $\neg\Phi \in \Delta$;

CLR) існують формули Φ та Ψ такі: $\Phi \in \Gamma$, $\neg\Phi \in \Gamma$, $\Psi \in \Delta$, $\neg\Psi \in \Delta$.

Залежно від відношення логічного наслідку та семантики для ЧКНЛ отримуємо низку різновидностей секвенційних числень. У роботах [5, 6] такі числення збудовано на базі *X*–*Y*-означених відношень логічного наслідку. Числення, пропоновані в даній роботі, використовують спеціальні предикати-індикатори εx та форми елімінації кванторів під реномінацією.

Числення QSC формалізує $\models_{Cl}$ в ЧКНЛО. Умова замкненості: $C \vee UnC$.

Числення QSL формалізує $\models_T$ в ЧКНЛО. Умова замкненості: $C \vee CL \vee UnC$.

Числення QSR формалізує $\models_F$ в ЧКНЛО. Умова замкненості: $C \vee CR \vee UnC$.

Числення QSLR формалізує $\models_{TF}$ в ЧКНЛО. Умова замкненості: $C \vee CLR \vee UnC$.

Числення QSG формалізує $\models_{TF}$ в ЧКНЛН. Умова замкненості: $C \vee UnC$.

Базові секвенційні форми числень *QSL*, *QSR*, *QSLR*, *QSG* такі:

$$_{\vdash}\mathrm{RT}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{RT}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{RT}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\mathrm{RT}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\Phi\mathrm{N}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\Phi\mathrm{N}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\Phi\mathrm{N}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ (\text{тут } y \in \nu(A)); \qquad _{\dashv}\neg\Phi\mathrm{N}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ (\text{тут } y \in \nu(A));$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}{_{\vdash}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xA),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{\vdash\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\vdash\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{\vdash\exists xA,\Sigma}{\vdash R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{\vdash\neg\exists xA,\Sigma}{\vdash\neg R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\neg\ \frac{\vdash A,\ \Sigma}{\vdash\neg\neg A,\ \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\vee\ \frac{\vdash A,\ \Sigma\qquad\vdash B,\ \Sigma}{\vdash A\vee B,\ \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\vee\ \frac{\vdash\neg A,\ \vdash\neg B,\ \Sigma}{\vdash\neg(A\vee B),\ \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{RR}\ \frac{\vdash\neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\vdash\neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{\vdash\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{R}\neg\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\qquad\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{\vdash\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\neg R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\vdash\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\exists\varepsilon\ \frac{\vdash R^{x}_{z}(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\vdash\exists xA,\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}\varepsilon\ \frac{\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{f}\ \frac{\dashv\exists xA,\ \dashv R^{x}_{z}(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\dashv\exists xA,\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{\dashv\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\dashv\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{\dashv\exists xA,\Sigma}{\dashv R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{\dashv\neg\exists xA,\Sigma}{\dashv\neg R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\neg\ \frac{\dashv A,\ \Sigma}{\dashv\neg\neg A,\ \Sigma};$$

$${}_{\dashv}\vee\ \frac{\dashv A,\ \dashv B,\ \Sigma}{\dashv A\vee B,\ \Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\vee\ \frac{\dashv\neg A,\ \Sigma\qquad\dashv\neg B,\ \Sigma}{\dashv\neg(A\vee B),\ \Sigma};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\mathrm{RR}\ \frac{\dashv\neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{\dashv\neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{\dashv\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\neg\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{R}\vee\ \frac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A),\ \dashv R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{\dashv\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\qquad\dashv\neg R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{\dashv\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\exists\varepsilon\ \frac{\dashv\neg R^{x}_{z}(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\dashv\neg\exists xA,\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\exists\mathrm{R}\varepsilon\ \frac{\dashv\neg R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\dashv\neg R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{f}\ \frac{\vdash\neg\exists xA,\ \vdash\neg R^{x}_{z}(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\vdash\neg\exists xA,\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rf}\ \frac{{}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\dashv}R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}; \qquad {}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rf}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\vdash}\neg R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{v}\ \frac{{}_{\dashv}\exists xA,\ {}_{\dashv}R_{y}^{x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}\exists xA,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}; \qquad {}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{v}\ \frac{{}_{\vdash}\neg\exists xA,\ {}_{\vdash}\neg R_{y}^{x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg\exists xA,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rv}\ \frac{{}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}; \qquad {}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rv}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\vdash}\neg R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{d}\ \frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}\exists xA,\Sigma \qquad {}_{\dashv}\exists xA,\ {}_{\dashv}R_{y}^{x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}\exists xA,\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{d}\ \frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma \qquad {}_{\vdash}\neg\exists xA,\ {}_{\vdash}\neg R_{y}^{x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rd}\ \frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma \qquad {}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\dashv}R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rd}\ \frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma \qquad {}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\ {}_{\vdash}\neg R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}.$$

Для форм ${}_{\vdash}\exists\varepsilon$, ${}_{\dashv}\neg\exists\varepsilon$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{f}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{f}$ умова: $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, \exists xA)$.

Для форм ${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}\varepsilon$, ${}_{\dashv}\neg\exists\mathrm{R}\varepsilon$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rf}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rf}$ умова: $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA))$.

Для форм ${}_{\dashv}\exists\mathrm{f}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{f}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rf}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rf}$ умова: Σ не містить символів вигляду εz.

${}_{\dashv}\exists\mathrm{f}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{f}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rf}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rf}$ – це форми типу ∃f; ${}_{\dashv}\exists\mathrm{v}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{v}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rv}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rv}$ – це форми типу ∃v. ${}_{\dashv}\exists\mathrm{d}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{d}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rd}$, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rd}$ – це форми типу ∃d; для них умова: εy не входить до Σ та Σ містить символи εz.

${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}\varepsilon$, ${}_{\dashv}\neg\exists\mathrm{R}\varepsilon$, ${}_{\vdash}\exists\varepsilon$, ${}_{\dashv}\neg\exists\varepsilon$ – це $\exists_T$-форми, а форми типів ∃f, ∃v, ∃d – це $\exists_F$-форми.

Форми типів RT, ¬RT, ΦN, ¬ΦN, R∃R, ¬R∃R, R∃p ¬R∃p – допоміжні, інші базові секвенційні форми віднесемо до основних.

Базовими секвенційними формами числення *QSC* є ${}_{\vdash}$RT, ${}_{\dashv}$RT, ${}_{\vdash}$ΦN, ${}_{\vdash}$ΦN, ${}_{\vdash}$R∃R, ${}_{\dashv}$R∃R, ${}_{\vdash}$R∃p, ${}_{\dashv}$R∃p, ${}_{\vdash}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}$RR, ${}_{\dashv}$RR, ${}_{\vdash}$R¬, ${}_{\dashv}$R¬, ${}_{\vdash}$R∨, ${}_{\dashv}$R∨, ${}_{\vdash}\exists\varepsilon$, ${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}\varepsilon$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{f}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rf}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{v}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rv}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{d}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rd}$. Форми ${}_{\vdash}\neg$ та ${}_{\dashv}\neg$ мають традиційний вигляд:

$${}_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\dashv}A,\ \Sigma}{{}_{\vdash}\neg A,\ \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\vdash}A,\ \Sigma}{{}_{\dashv}\neg A,\ \Sigma}.$$

Побудова секвенційного дерева. Процедура побудови секвенційного дерева розбита на етапи, вона починається з кореня дерева. Кожне застосування секвенційної форми здійснюється до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед побудовою зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* тотально (строго) неістотних [4] імен такий, що $nm(\Sigma)\cap TN = \varnothing$. На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає, що до списку доступних додаємо по одній формулі зі списків T-формул та F-формул. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків.

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, маємо замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції перевіряємо, чи є хоч один із листів фінальною секвенцією (незамкнена секвенція Ω фінальна, якщо до неї незастосовна жодна форма, або кожне застосування форми до Ω не вводить формул, відмінних від формул шляху від кореня до Ω).

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ таким чином. Активізуємо всі доступні (окрім примітивних [3]) формули ξ. Далі до кожної активної формули застосовуємо відповідну основну форму. За потреби застосовуємо належну кількість разів допоміжні форми. Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні. До таких формул на даному етапі основні форми вже не застосовуються.

Спочатку виконуємо (за можливості) всі $\exists_T$-форми. При кожному застосуванні такої форми беремо зі списку TN нове тотально неістотне ім'я z як перше незадіяне на шляху від кореня до даної вершини. Потім застосовуємо форми типу RR, $\neg$RR, R$\neg$, $\neg$R$\neg$, R$\vee$, $\neg$R$\vee$, $\neg\neg$, $\vee$, $\neg\vee$. Далі застосовуємо $\exists_F$-форми таким чином. Якщо в момент застосування $\exists_F$-форми серед доступних формул секвенції ще немає спеціальних формул вигляду $_{\dashv}\varepsilon y$, то застосовуємо відповідну форму типу $\exists f$, інакше застосовуємо форми типу $\exists v$ для всіх y таких, що $_{\dashv}\varepsilon y$ є доступними F-формулами секвенції. Далі застосовуємо форми типу $\exists$d. Кожну таку форму застосовуємо для всіх $y \in nm(\Sigma_0)$ таких, що Σ_0 – множина доступних на даний момент формул, – не містить $_{\dashv}\varepsilon y$ або $_{\dashv}\varepsilon y$.

Після виконання кожної форми перевіряємо на замкненість секвенції-вершини. При появі замкненої секвенції до неї незастосовна жодна форма, побудова дерева на цьому шляху обривається. Повтори формул у секвенціях усуваємо.

Якщо процедура побудови дерева для секвенції Σ завершена позитивно, то отримано скінченне замкнене дерево. Якщо процедура завершена негативно (маємо скінченне незамкнене дерево) або не завершується (маємо нескінченне дерево), то у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на $\wp$ і стане доступною.

Теореми коректності та повноти. Для збудованих числень справджується

Теорема 1 (коректності). 1) $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в QSC-численні $\Rightarrow \Gamma \models_{Cl} \Delta$;

2) $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в QSL-численні $\Rightarrow \Gamma \models_{T} \Delta$ в неокласичній семантиці;

3) $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в QSR-численні $\Rightarrow \Gamma \models_{F} \Delta$ в неокласичній семантиці;

4) $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в $QSLR$-численні $\Rightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta$ в неокласичній семантиці;

5) $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в QSG-численні $\Rightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta$ в загальній семантиці.

Якщо $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна, то для неї побудоване замкнене дерево. Для кожної його вершини $_{\vdash}\Lambda_{\dashv}$K маємо $\Lambda \models$ K. Для листів дерева це випливає з їх замкненості. Збереження формами відповідних відношень логічного наслідку (від засновків до висновків) випливає з однойменних властивостей відношень. Отже, $\Gamma \models \Delta$.

Повнота побудованих числень випливає з відповідних теорем про існування контрмоделі для множини формул незамкненого шляху секвенційного дерева.

Теорема 2. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, I)$, $\boldsymbol{B} = (A, I)$ та δ, $\eta \in {}^{V}A$ такі:

1) $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)$;

2) $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \eta \in \boldsymbol{F}(\Phi_B)$.

Пари $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та $(\boldsymbol{B}, \eta)$ із такими властивостями називатимемо *T-контрмоделлю* та *F-контрмоделлю* для секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

Теорема 3. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують модель мови $\boldsymbol{A} = (A, I)$ та $\delta \in {}^{V}A$ такі: $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

Пару $(\boldsymbol{A}, \delta)$ із такими властивостями назвемо *Cl-контрмоделлю* для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

Доведення теорем 2 та 3 опирається на метод модельних множин [9, 3], воно подібне до доведення відповідних теорем робіт [5–7] та проводиться індукцією за складністю формули згідно з визначенням модельної множини H.

Теорема 4. $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в загальній семантиці $\Rightarrow$ $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSG*.

Припустимо супротивне: $\Gamma \models_{TF} \Delta$ і $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невивідна. Тоді в дереві для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ існує незамкнений шлях. За теоремою 2 існують T-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та F-контрмодель $(\boldsymbol{B}, \eta)$ такі: $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)$, $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \eta \in \boldsymbol{F}(\Phi_B)$. Для T-контрмоделі згідно з $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \subseteq H$ маємо $\delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ та $\delta \notin \boldsymbol{T}(\Psi_A)$. для всіх $\Psi \in \Delta$. Звідси $\delta \in \boldsymbol{T}(\bigcap\limits_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A))$ та $\delta \notin \boldsymbol{T}(\bigcup\limits_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A))$, що заперечує $\Gamma_A \models_T \Delta$, тому й заперечує $\Gamma \models_{TF} \Delta$. Для F-контрмоделі згідно з $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \subseteq H$ маємо $\eta \notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ та маємо $\eta \in \boldsymbol{F}(\Psi_B)$ для всіх $\Psi \in \Delta$. Звідси $\eta \notin \boldsymbol{F}(\bigcap\limits_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_B))$ та $\eta \in \boldsymbol{F}(\bigcup\limits_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_B))$, що заперечує $\Gamma_B \models_F \Delta$, тому й $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Теорема 5. $\Gamma \models_T \Delta$ в неокласичній семантиці $\Rightarrow$ $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSL*.

Теорема 6. $\Gamma \models_F \Delta$ в неокласичній семантиці $\Rightarrow$ $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSR*.

Теорема 7. $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Rightarrow$ $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSLR*.

Теореми 5–7 доводяться так, як теорема 4. Проте, на відміну від теореми 4, існують обмеження на вибір контрмоделі. Якщо за умови HCLR неправильна HCL (тоді HCR), то для T-контрмоделі маємо неоднозначний предикат, тому беремо лише F-контрмодель. Якщо за умови HCLR неправильна HCR (тоді HCL), то для F-контрмоделі маємо неоднозначний предикат, тому беремо лише T-контрмодель.

Теорема 8. $\Gamma \models_{Cl} \Delta \Rightarrow$ $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSC*.

Припустимо супротивне: $\Gamma \models_{Cl} \Delta$ та $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ існує незамкнений шлях. За теоремою 3 існує Cl-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$ така: $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Згідно з $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \subseteq H$ маємо $\delta \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ та $\delta \in \boldsymbol{F}(\Psi_A)$ для всіх $\Psi \in \Delta$. Це заперечує $\Gamma \models_{Cl} \Delta$..

Поєднаємо теореми коректності та повноти.

Теорема 9. 1) $\Gamma \models_{Cl} \Delta \Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSC*;

2) $\Gamma \models_{T} \Delta$ в некласичній семантиці $\Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSL*;

3) $\Gamma \models_{F} \Delta$ в некласичній семантиці $\Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSR*;

4) $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в некласичній семантиці $\Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSLR*;

5) $\Gamma \models_{TF} \Delta$ в загальній семантиці $\Leftrightarrow {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QSG*.

Висновки. Досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки як однозначних, так і неоднозначних часткових предикатів. Для різних відношень логічного наслідку цих логік побудовано секвенційні числення. При цьому використано спеціальні предикати-індикатори наявності значення для змінних. Для побудованих числень доведено теореми коректності та повноти.

1. *Handbook* of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford Univ. Press. – Vol. 1–5, 1993–2000.
2. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
3. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. – 528 с.
4. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Там само. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
5. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення першопорядгових логік однозначних квазіарних предикатів // Там само. – 2012. – № 1. – С. 34–51.
6. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів // Там само. – 2012. – № 2–3 – С. 33–43.
7. *Шкільняк С.С.* Спеціальні секвенційні числення логік однозначних квазіарних предикатів // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 3. – С. 287–292.
8. *Nikitchenko M., Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – 2012. –Vol. 347. – P. 89–110.
9. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. – М., 1996. – 304 с.

Одержано 15.02.2013

С.С. Шкильняк

СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА
ЧИСТЫХ ПЕРВОПОРЯДКОВЫХ ЛОГИК ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Для чистых первопорядковых логик частичных однозначных и частичных неоднозначных предикатов построены секвенциальные исчисления. При этом использованы специальные предикаты-индикаторы наличия значения для переменных. Доказаны корректность и полнота таких исчислений.

S.S. Shkilniak

SEQUENT SYSTEMS OF LOGICAL DEDUCTION
FOR PURE FIRST-ORDER LOGICS OF PARTIAL PREDICATES

We construct sequent calculi for pure first-order logics of partial single-valued and partial multi-valued predicates. Special variable definedness predicates are used for the construction. The soundness and completeness of this calculi are proved.

Про автора:

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теорії та технології програмування факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.