

Предложена схема высокоточного параллельного решения задачи дифракции упругих волн на системе цилиндрических полостей некруговой формы. Задача сведена к решению сингулярных уравнений, которые реализуются численно. Приведены зависимости напряжений на границе полостей от динамических и геометрических характеристик.

© Б.Е. Панченко, И.Н. Сайко,
А.Н. Гришко, 2013

УДК 004.652, 539.3

Б.Е. ПАНЧЕНКО, И.Н. САЙКО, А.Н. ГРИШКО

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ВОЛН С СИСТЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Введение. Современные конструкции, как правило, работают в условиях динамических нагрузок. Поэтому для практики представляет интерес исследование концентрации напряжений вблизи различного рода препятствий [1].

Проблема дифракции плоских гармонических волн на цилиндрических неоднородностях изучалась многими авторами. В работе [2] использован метод разложения в ряд по собственным функциям. В работе [3] построены интегральные представления для упругих потенциалов, через которые выражаются компоненты вектора перемещений и тензора напряжений.

В настоящей работе развивается методика, предложенная в [4], где основной характеристикой напряженно-деформированного состояния выступает вектор перемещений.

Математическая модель. Рассмотрим в неограниченной изотропной среде систему бесконечных вдоль оси OZ полых цилиндров, поперечное сечение которых ограничено замкнутыми (без общих точек) контурами L_j , $j = \overline{1, m}$ типа Ляпунова. Пусть из бесконечности набегают на цилиндры монохроматическая P -волна (P -случай)

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_1 y}, \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \left| \quad \text{или } SV\text{-волна (}SV\text{-случай)} \right. \quad (1)$$

$$U_1^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_2 y}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2 = \frac{\Omega}{c_2}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2)$$

Здесь c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн; Ω – частота колебаний; t – время; λ и μ – постоянные Лямэ; ρ – плотность среды; i – мнимая единица ($i^2 = -1$); зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$.

В результате взаимодействия приходящей волны с каждой цилиндрической полостью возникает сложное волновое поле. Амплитуды отраженных продольной и поперечной волн перемещений будем обозначать U_1 и U_2 . Тогда общее поле амплитуд перемещений имеет вид:

$$U = U_1^{(0)} + U_1, \quad V = U_2^{(0)} + U_2. \quad (3)$$

В случае установившихся волновых движений амплитудные значения компонент вектора перемещений удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 U &= 0, \\ \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 V &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений U и V формулами ($z = x + iy, \bar{z} = x - iy$):

$$\begin{aligned} \tau_{11} + \tau_{22} &= 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial(U + iV)}{\partial z} + \frac{\partial(U - iV)}{\partial \bar{z}} \right), \\ \tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12} &= -4\mu \frac{\partial(U - iV)}{\partial z}, \quad \tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12} = -4\mu \frac{\partial(U + iV)}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Как указано выше, $L_j, j = \overline{1, m}$ – некоторая замкнутая кривая в поперечном сечении каждой цилиндрической полости. Для упрощения выражений индекс j опустим. Обозначим S_1 и S_2 амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на L , т. е. на любой кривой из L -совокупности. Тогда в произвольной точке $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ эти напряжения выражаются через компоненты тензора амплитуд напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{i\phi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12}) e^{-i\phi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{-i\phi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12}) e^{i\phi_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где ϕ_0 – угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 \in L$ с осью Ox .

На границе каждого отверстия представляют интерес распределения компонент тензора амплитуд напряжений $\tau_{s_0}, \tau_{n_0}, \tau_{n_0 s_0}$, которые будем находить по формулам:

$$\begin{aligned}\tau_{n_0} &= S_1 \sin \phi_0 - S_2 \cos \phi_0, \quad \tau_{s_0} = (\tau_{11} + \tau_{22}) - \tau_{n_0}, \\ \tau_{n_0 s_0} &= S_1 \cos \phi_0 + S_2 \sin \phi_0.\end{aligned}\tag{7}$$

Запишем интегральные представления амплитуд перемещений возмущенного поля, исходя из которых будем решать поставленную задачу дифракции. На общем контуре L -совокупности они имеют вид (суммирование по k)

$$\begin{aligned}U_m(x, y) &= \int_L U_m^{(k)}(x, y, \xi, \eta) f_k(s) ds, \\ \tau_{mn}(x, y) &= \int_L \tau_{mn}^{(k)}(x, y, \xi, \eta) f_k(s) ds, \quad m, n, k = 1, 2.\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь $f_k(s)$ – неизвестные функции, $U_m^{(k)}$ – функции Грина, представляющие собой амплитуды перемещений в среде при действии гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке $\zeta = \xi + i\eta \in L$ и направленной вдоль оси Ox ($k = 1$) или Oy ($k = 2$). С учетом условий излучения на бесконечности для них получены следующие выражения:

$$\begin{aligned}U_1^{(1)} + iU_2^{(1)} &= U_1^{(2)} - iU_2^{(2)} = d \left(\frac{\chi}{4} \Phi_{20} - c \Phi_{00} \right), \\ U_1^{(1)} - iU_2^{(1)} &= \frac{d}{4} e^{-2i\alpha} \Phi_{22}, \quad U_1^{(2)} + iU_2^{(2)} = \frac{d}{4} e^{2i\alpha} \Phi_{22}, \\ d &= \frac{i}{4\mu(1-\nu)}, \quad \chi = 3 - 4\nu, \quad c = \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \gamma_2^2, \\ z - \zeta &= r e^{i\alpha}, \quad \Phi_{kj} = \frac{\gamma_1^k H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^k H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2},\end{aligned}\tag{9}$$

где $H_j^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля 1-го рода j -го порядка.

Очевидно, что представления (8) удовлетворяют уравнениям движения (4). Кроме того, за счет выбора функции $U_m^{(k)}$ (9), они выполняют условия излучения на бесконечности, т. е. представляют собой расходящиеся волны. Остается удовлетворить граничные условия на контуре каждой полости, которые запишем в виде

$$S_1 \pm iS_2 = 0 \quad \text{на } L.\tag{10}$$

Выпишем необходимые для (10) производные:

$$\begin{aligned}e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (U_1^{(1)} + iU_2^{(1)}) &= e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U_1^{(2)} - iU_2^{(2)}) = -\frac{d}{8} (\chi \Phi_{31} - 4c \Phi_{11}), \\ e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U_1^{(1)} - iU_2^{(1)}) &= e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (U_1^{(2)} + iU_2^{(2)}) = \frac{d}{8} \Phi_{31}.\end{aligned}\tag{11}$$

Можно показать, что ядро Φ_{11} является непрерывным, а ядро Φ_{31} также, как и ядро Φ_{33} , сингулярно. Имеем

$$\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r} + F_{31}, \quad \Phi_{33} = \frac{2i}{\pi r} + F_{33},$$

где F_{31} и F_{33} – непрерывные функции. Используя производные (11), можно вычислить ядра интегральных представлений (8) $\tau_{mm}^{(k)}$ – амплитуд тензора напряжений возмущенного поля с помощью формул (5), подставляя в них вместо U и V функции Грина $U_m^{(k)}$. Выделяя в ядрах полученных интегралов сингулярные члены и используя предельные значения интегралов типа Коши [5], приводим граничные условия (10) к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} f_1(s_0) + \int_L (f_1(s)E_{11}(s, s_0) + f_2(s)E_{12}(s, s_0)) ds &= K_1(s_0), \\ -\frac{1}{2} f_2(s_0) + \int_L (f_1(s)E_{21}(s, s_0) + f_2(s)E_{22}(s, s_0)) ds &= K_2(s_0), \end{aligned} \quad (12)$$

$$E_{11} = h \left(d_1 + \frac{1}{4} d_2 F_{31} - d_3 \Phi_{11} \right), \quad E_{12} = h \left(-\bar{d}_4 + \left(\frac{1}{4} F_{31} - \frac{\gamma_2^2}{4} \Phi_{11} \right) e^{i(\alpha_0 + \phi_0)} - \frac{1}{4} F_{33} e^{i(3\alpha_0 - \phi_0)} \right),$$

$$E_{21} = h \left(d_4 + \left(\frac{1}{4} F_{31} - \frac{\gamma_2^2}{4} \Phi_{11} \right) e^{-i(\alpha_0 + \phi_0)} - \frac{1}{4} F_{33} e^{-i(3\alpha_0 - \phi_0)} \right), \quad E_{22} = h \left(-\bar{d}_1 + \frac{1}{4} \bar{d}_2 F_{31} - \bar{d}_3 \Phi_{11} \right),$$

$$d_1 = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{i\phi_0}}{\zeta - \zeta_0} - \chi \frac{e^{-i\phi_0}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} \right), \quad d_2 = e^{i(\phi_0 - \alpha_0)} - \chi e^{-i(\phi_0 - \alpha_0)},$$

$$d_3 = \frac{\gamma_2^2}{4} e^{i(\phi_0 - \alpha_0)} - c e^{-i(\phi_0 - \alpha_0)}, \quad d_4 = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-i\phi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \phi_0)}}{\zeta - \zeta_0},$$

$$h = \frac{1}{4(1 - \nu)}, \quad \zeta - \zeta_0 = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad K_1(s_0) = S_1^{(0)} + iS_2^{(0)}, \quad K_2(s_0) = S_1^{(0)} - iS_2^{(0)},$$

$$S_1^{(0)} \pm iS_2^{(0)} = \frac{\mu\gamma_1\tau}{2} e^{-i\gamma_1\eta_0} [\pm(1 - \nu) \cos \phi_0 + i\nu \sin \phi_0] \quad \text{в } P\text{-случае,}$$

$$S_1^{(0)} \pm iS_2^{(0)} = -i\mu\gamma_2\tau e^{-i\gamma_2\eta_0} e^{\mp i\phi_0} \quad \text{в } SV\text{-случае.}$$

Здесь \bar{d} – величина, сопряженная к комплексной величине d , ядра E_{11} и E_{22} являются сингулярными, E_{12} и E_{21} – непрерывны. Следовательно, уравнения (12) являются сингулярными интегральными уравнениями 2-го рода.

Численная реализация. Численная реализация алгоритма проводилась методом, теоретически обоснованным в [5]. Проведем параметризацию каждого контура L по формулам

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad 0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi.$$

Тогда интерполяционный многочлен [5] для неизвестных плотностей интегральных уравнений (12) имеет вид

$$f(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) \sin \frac{N(\beta_k - \beta)}{2} \cdot \frac{1}{g(\beta)}, \quad \beta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad (13)$$

где $g(\beta) = \sin \frac{\beta^k - \beta}{2}$, поскольку в алгоритме использовано нечетное $N = 2n + 1$.

Подстановка (13) в интегралы с сингулярными ядрами дает

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) R(\beta, \beta_0^m) d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) R(\beta_k, \beta_0^m), \quad \beta_0^m = \frac{2m-1}{N} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

если $R(\beta, \beta_0)$ – непрерывное ядро, и

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0^m}{2} d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) \operatorname{ctg} \frac{\beta_k - \beta_0^m}{2}, \quad (15)$$

в случае ядра Гильберта.

Как и в работе [4], формула (15) аналогична правилу приближенного вычисления регулярных интегралов (14). По этой причине при численной реализации сингулярных интегралов ядро Гильберта не выделялось. Как для регулярных, так и для сингулярных интегралов использовалась квадратурная формула (14).

В качестве примера рассматривалась среда, содержащая систему цилиндрических полостей эллиптического и ромбического поперечного сечения

$$\xi = a \sin \beta, \quad \eta = -b \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (16)$$

На контуре неоднородностей проводилось вычисление напряжений

$$\sigma_n = |\tau_{n_0}|/P, \quad \sigma_\beta = |\tau_{s_0}|/P, \quad \sigma_{n\beta} = |\tau_{n_0 s_0}|/P,$$

где компоненты тензора амплитуд напряжений τ_{n_0} , τ_{s_0} , $\tau_{n_0 s_0}$ находились по формулам (7), P – максимальное значение напряжения в падающей волне, равное $\gamma_1 \tau(\lambda + 2\mu)$ в случае излучения P -волны (1) и $\gamma_2 \tau \mu$ – в случае излучения SV -волны (2).

При численной реализации применялось распараллеливание [6] алгоритма по схеме [4]. Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях N . Проводилось также сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [7] для случая периодической системы эллиптических отверстий. Сравнение с тестовыми результатами [7, 8] показали хорошую достоверность используемых вычислительных алгоритмов. Для большинства задач этого класса достаточно 1000 точек коллокации контура для вычисления контурных напряжений с точностью 10^{-10} .

Применение метода параллельных вычислений, проведенного на кластере «Инпарком-256», позволило подтвердить вывод о том, что сходимость решения СИУ практически не зависит от числа отражателей.

Численное исследование показало, что при воздействии из бесконечности P и SV -волн в описанной системе эффект насыщения [9] наблюдается не строго (как и в [4]). И хотя при линейном и симметричном относительно нагрузки расположении геометрически одинаковых отверстий для усредненного исследования достаточно не более 20 отражателей, однако при дальнейшем наращивании их числа наблюдаются незначительные пульсации в распределении напряжений.

Обусловленность матриц при этом проверялась на основании алгоритма, описанного в [10].

Для трех отверстий эллиптического или ромбического сечения время вычислений контурных напряжений (для одного варианта) на 15 процессорах кластера типа «Инпарк» составляет около 5 часов.

На рис. 1 – 4 показаны графики распределения касательных напряжений σ_β на контуре крайнего и центрального (рис. 1, 2 – случай SV -волны, рис. 3, 4 – P -волны) отверстий эллиптической формы. Соотношение осей вытянутых вдоль оси ординат (и набегающей волны) эллипсов $b/a = 2,0$; значение безразмерного волнового числа $\gamma_{1,2}a$ равны соответственно: 1 – 0,5; 2 – 1,0; 3 – 2,0.

Расчеты показывают, что в случае $b/a \leq 1$, т. е. когда фокусы эллипса находятся на оси, параллельной фронту падающей волны, вблизи точки соскальзывания ($\beta = 90^\circ$) напряжение σ_β имеет локальный максимум, при излучении P -волны и локальный минимум – в случае SV -волны. При значениях $b/a \geq 1$, т. е. когда эллиптические полости вытянуты вдоль оси, перпендикулярной фронту падающей волны, с увеличением параметра b/a характер изменения σ_β усложняется, причем число точек максимума и минимума увеличивается.

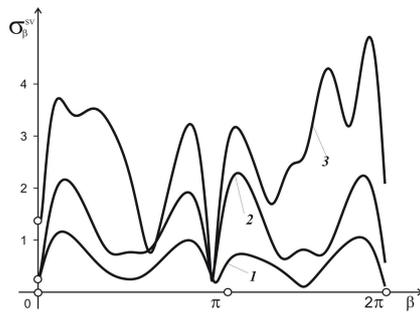


РИС. 1

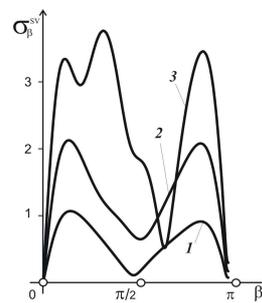


РИС. 2

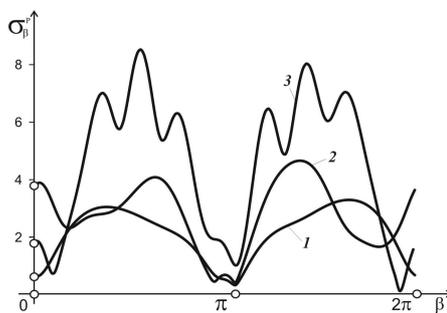


РИС. 3

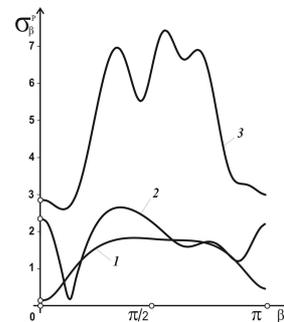


РИС. 4

Б.Є. Панченко, І.М. Сайко, О.М. Гришко

ПАРАЛЛЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ
З СИСТЕМОЮ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОРОЖНИН В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Запропоновано схему високоточного паралельного розв'язання задачі дифракції пружних хвиль на системі циліндричних порожнин некругової форми. Задачу зведено до розв'язання сингулярних рівнянь, які реалізуються чисельно. Наведено залежності напружень на контурі порожнини від динамічних та геометричних характеристик

B.E. Panchenko, I.N. Saiko, A.N. Grishko

PARALLEL SOLUTION OF THE PROBLEM OF INTERACTION OF ELASTIC WAVES WITH
A SYSTEM OF CYLINDRICAL CAVITIES UNDER THE CONDITIONS OF PLANE STRAIN

A scheme of precise parallel solution of problems of the diffraction of elastic waves on a system of cylindrical cavities of non-circular shape is suggested. The problem is reduced to the solution of singular equations that can be realised numerically. Dependencies of stress on the border of cavities on dynamical and geometrical characteristics are given.

1. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 136 с.
2. Гузь А.Н. О концентрации напряжений около нескольких отверстий в элементах конструкций // Прикладная механика. – 1994. – **30**, № 4. – С. 6 – 13.
3. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119 – 127.
4. Панченко Б.Е., Назаренко А.М. Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 172–187.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
6. Вертгейм И.И., Терпугов В.Н. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТГ. Учебное пособие. – Пермь: ПГУ, 2007. – 84 с.
7. Назаренко А.М., Ложкин А.М. Дифракция упругих волн на периодических системах цилиндрических полостей и жестких включений // Акустический вестник. – 2006. – **9**, № 4. – С. 35 – 42.
8. Кюркчан А.Г., Скородумова Е.А. Решение трехмерной задачи дифракции волн на группе объектов // Акустический журнал. – 2007. – **53**, № 1. – С. 5 – 14.
9. Панченко Б.Е., Сайко И.Н. Высокоточная схема параллельных вычислений максимальных контурных SH-напряжений на системе некруговых отверстий в бесконечной упругой среде // Наукові записки НАУКМА. Комп'ютерні науки. – 2012. – **121**. – С. 10 – 18.
10. Химич А.М., Полянко В.В. Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов // Проблеми програмування. – 2008. – № 3. – С. 145–149.

Получено 25.05.2013

Об авторах:

Панченко Борис Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Сайко Игорь Николаевич,
аспирант Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Гришко Александр Николаевич,
студент Сумского государственного университета.