

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТЕВЫХ МЕТОДОВ ОРГАНИЗАЦИИ БАЙЕСОВСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Введение. Настоящая работа является продолжением цикла публикаций [1 – 5], посвященных основным идеям, используемым при создании нечетких байесовских сетей, и опирается на представленные в [1] результаты.

Вероятностная корректность результатов в нечетких сетях обуславливает использование данных очень специального вида (нечеткие вероятностные отношения). Вследствие этого объем вычислений огромен, особенно в небинарном случае, причем необходимы специально созданные для сетевых задач алгоритмы. К счастью, решение сетевых задач основано на использовании цепной формулы и формулы Байеса. Их особенности (первая полилинейна, вторая – дробно-линейна функции без особых точек и монотонна по каждому из аргументов) позволяют выполнять поуровневое определение функции принадлежности (ф.п.) результата, причем вычисления проводятся по вершинам многоугольников α – сечений априорных оценок, т. е. по специальным точкам [1]. Это обуславливает возможность использования в нечетких сетях всего многообразия методов организации вычислительного процесса, например, с конструированием узловых деревьев, реализованных и успешно функционирующих в обычных сетях [6]. Именно подходу к организации вычислений в нечеткой сети на основе существующих методов посвящена данная статья.

1. Общий подход. Пусть граф сети имеет ярусно-параллельное представление [4]. Назовем множеством предшественников $\Psi(w_k)$

Представленные результаты позволяют применить сетевые методы организации вычислений для вероятностно корректного байесовского оценивания на нечетких сетях любой конфигурации.

© О.В. Вережка, 2013

для вершины w_k , находящейся на l -м, $l \geq 1$, ярусе, упорядоченное по возрастанию индекса

множество вершин старших ярусов, из которых можно попасть в w_k . Множество предшественников $\psi(w_k)$ определяет маршрут, который следует преодолеть, чтобы достичь вершины w_k из корневых вершин и вершин, которые можно рассматривать как корневые для проводимого оценивания (мосты в графе множества предшественников). Пусть вершина w_{K+1} l -го, $l > 1$ яруса имеет множество предшественников $\{w_k\}_{k=1}^K$, номера вершин упорядочены по старшинству и первые $K_0 \geq 1$ вершин принадлежат нулевому (корневому) ярусу. Вершина w_k , $1 \leq k \leq K + 1$ имеет $M_k \geq 2$ допустимых состояний $\{W_k^{m_k}\}_{m_k=1}^{M_k}$. Заданы значения

$P(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})$, $k > K_0$, – это априорные оценки прямой родительской веро-

яктной связи допустимых состояний вершины w_k со своими «отцовскими» вершинами из множества предшественников, в случае некомплекта условия

$\bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j}$ рассматриваются цилиндрические продолжения соответствующих

оценок. На нулевом ярусе, $k \leq K_0$, известны $P(W_k^{m_k})$ – априорные оценки допустимых состояний корневой вершины. Чтобы быть информативными и влиять на результаты оценивания, значения $P(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})$ и $P(W_k^{m_k})$ не должны

совпадать для альтернативных состояний, т. е. должны отличаться при различных m_k . В нечетком случае $P(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})$ и $P(W_k^{m_k})$ – нечеткие вероятно-

стные отношения с аналогичной интерпретацией. Содержательные в вероятностном смысле нечеткие априорные данные должны удовлетворять следующему условию: носители, соответствующие оценкам альтернативных состояний, не должны пересекаться. Выполнение указанного условия принципиально для выполнения корректных нечетких вычислений.

Пусть нечеткие оценки представлены эпюрно [1], т. е. $P(W_k / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})$

задана множеством согласованных плоских ортогональных проекций $R(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})$, $m_k = \overline{1, M_k}$ для $k > K_0$, и соответственно $P(W_k)$ –

множеством $R(W_k^{m_k})$, $m_k = \overline{1, M_k}$ для вершин корневого яруса. Нужно выполнить оценивание вероятности $P(W_{K+1})$ состояния $W_{K+1} \in \{W_{K+1}^{m_{K+1}}\}_{m_{K+1}=1}^{M_{K+1}}$.

Для фиксированного $0 \leq \alpha \leq 1$ при $k > K_0$ обозначим $\{[s_k^L(\{m_j\}_{j=1}^k, \alpha), s_k^R(\{m_j\}_{j=1}^k, \alpha)]\}_{m_k=1}^{M_k}$ интервалы α – сечения $\{R(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})\}_{m_k=1}^{M_k}$. Аналогично при $k \leq K_0$ $\{[s_k^L(m_k, \alpha), s_k^R(m_k, \alpha)]\}_{m_k=1}^{M_k}$ – интервалы α – сечения $\{R(W_k^{m_k})\}_{m_k=1}^{M_k}$. В пространстве R^{M_k} по этим интервалам найдем $N_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})$ определяющих точек $\{Q_k^{-n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha)\}_{n_k=1}^{N_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}$ – вершин многоугольника α – сечения носителя нечеткого отношения $P(W_k / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})$ для $k > K_0$, $Q_k^{-n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha) = (Q_{k,1}^{n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha), \dots, Q_{k,M_k}^{n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha))$, и $\{Q_k^{-n_k}(\alpha)\}_{n_k=1}^{N_k}$ при $k \leq K_0$, $Q_k^{-n_k}(\alpha) = (Q_{k,1}^{n_k}(\alpha), \dots, Q_{k,M_k}^{n_k}(\alpha))$ [1]. Выберем по одной из точек для каждой вершины множества $\{w_k\}_{k=1}^{K+1}$, т.е. $\forall k$ по одному из значений $n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})$ или соответственно n_k . Зафиксируем маршрут $\{Q_k^{-n_k}(\alpha)\}_{k=1}^{K_0} \cup \cup \{Q_k^{-n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha)\}_{m_j=1}^{M_j} \quad k=K_0+1$. Выполним обычное байесовское оценивание по точкам избранного маршрута. Полученные значения являются допустимыми для α – уровня оценки вероятности $P(W_{K+1}^{m_{K+1}})$. Чтобы получить ее эмпирное представление $\{[s_{K+1}^L(m_{K+1}, \alpha), s_{K+1}^R(m_{K+1}, \alpha)]\}_{m_{K+1}=1}^{M_{K+1}}$, выберем наименьшее и наибольшее из значений по всем возможным маршрутам.

Существенным является то, что, во-первых, вычисляются обычные оценки в специальных точках, т.е. используются методы и алгоритмы обычного сетевого оценивания, и, во-вторых, в случае содержательных в вероятностном смысле нечетких априорных данных эти последовательности не зависят от значения α и определяются пересечением произвольного α – сечения с теми же самыми ребрами поверхностей пирамидоподобных ф.п. Таким образом, при любом $\alpha \in (0,1)$ $\forall m_{K+1} = \overline{1, M_{K+1}}$ можно получить по два расчетных маршрута, обозначим их

$$\{n_{k_*}(m_{K+1})\}_{k=1}^{K_0} \cup \{n_{k_*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})\}_{m_j=1}^{M_j} \quad k=K_0+1$$

и

$$\{n_{k^*}(m_{K+1})\}_{k=1}^{K_0} \cup \{n_{k^*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})\}_{m_j=1}^{M_j} \quad k=K_0+1,$$

идентификаторов (номеров) ребер поверхностей пирамидоподобных ф.п., пересечение которых с прямой/плоскостью/гиперплоскостью α – уровня дает точки, определяющие α – уровень плоской проекции $R(W_{K+1}^{m_{K+1}})$ оценки $P(W_{K+1})$. Отсюда вырисовывается следующая схема нечеткого сетевого оценивания $P(W_{K+1})$ в случае эпюрно заданной информации.

1. Выбрать последовательность уровней $A = \{\alpha_i\}_{i=1}^I$, $\alpha_0 = 0$ (границы носителя), $\alpha_l = 1$ (границы ядра), $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2}$ при $i_1 < i_2$. Обязательны уровни α_0, α_l и 0,5.

2. Выбрать уровень α^* для пилотного оценивания (по умолчанию $\alpha^* := 0,5$). $\forall k = \overline{1, K+1}$, $m_k = \overline{1, M_k}$ оценить α^* – уровни $\{[s_k^L(\{m_j\}_{j=1}^k, \alpha^*), s_k^R(\{m_j\}_{j=1}^k, \alpha^*)]\}_{m_k=1}^{M_k}$ оценок $R(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})$ при $k > K_0$ и $\{[s_k^L(m_k, \alpha^*), s_k^R(m_k, \alpha^*)]\}_{m_k=1}^{M_k}$ для $R(W_k^{m_k})$ при $k \leq K_0$, по которым найти определяющие точки $\{\overline{Q}_k^{n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha^*)\}_{n_k=1}^{N_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}$ для $k > K_0$ и $\{\overline{Q}_k^{n_k}(\alpha^*)\}_{n_k=1}^{N_k}$ для $k \leq K_0$.

3. Для нахождения расчетных маршрутов выполнить пилотное оценивание.

3, а) для $m_{K+1} = \overline{1, M_{K+1}}$ сформировать маршруты

$\{\overline{Q}_k^{n_k}(\alpha^*)\}_{k=1}^{K_0} \cup \{\overline{Q}_k^{n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha^*)\}_{k=K_0+1}^{K+1}$, где $n_k = \overline{1, N_k}$ при $k \leq K_0$

и $n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1}) = \overline{1, N_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}$ при $k > K_0$, с диапазоном условий $m_j = \overline{1, M_j}$.

Выполнить байесовское оценивание по этим маршрутам:

3,б) для m_{K+1} от 1 до M_{K+1} выбрать по два маршрута $\Xi_*(m_{K+1})$ и $\Xi^*(m_{K+1})$, при которых значения искомым оценок для состояния $W_{K+1}^{m_{K+1}}$ экстремальны.

4. $\forall \alpha \in A \setminus \alpha^*$ вычислить границы остальных α – сечений проекций $R(W_{K+1}^{m_{K+1}})$ по маршрутам $\Xi_*(m_{K+1})$ и $\Xi^*(m_{K+1})$. Для m_{K+1} от 1 до M_{K+1}

• по α – уровням проекций $\{R(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})\}_{m_k=1}^{M_k}$ и $\{R(W_k^{m_k})\}_{m_k=1}^{M_k}$ и мар-

шрутам $\Xi_*(m_{K+1})$ и $\Xi^*(m_{K+1})$ найти определяющие точки $\overline{Q}_k^{n_{k*}(m_{K+1})}(\alpha)$ и

$\overline{Q}_k^{n_{k*}(m_{K+1})}(\alpha)$ для $k \leq K_0$, $\overline{Q}_k^{n_{k*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha)$ и $\overline{Q}_k^{n_{k*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha)$ для

$k > K_0$, $m_j = \overline{1, M_j}$. Вычислить оценки $s_{K+1}^L(m_{K+1}, \alpha)$ и $s_{K+1}^R(m_{K+1}, \alpha)$. •

2. Априорное оценивание. Подход к адаптации сетевых точечных методов и алгоритмов для вычислений с нечеткой информацией рассмотрим на примере априорного сетевого оценивания.

Цепная формула – это основа для нечеткой модификации и выглядит следующим образом:

$$P(W_{K+1}) := \sum_{m_1=1}^{M_1} \dots \sum_{m_K=1}^{M_K} P(W_{K+1}; \bigcap_{k \leq K} W_k^{m_k}) = \\ = \sum_{m_1=1}^{M_1} \dots \sum_{m_K=1}^{M_K} \{P(W_{K+1} / \bigcap_{j \leq K} W_j^{m_j}) \times [\prod_{k=K_0+1}^K P(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})] \times [\prod_{k=1}^{K_0} P(W_k^{m_k})]\}. \quad (1)$$

Оценивание выполняется следующим образом:

- 1) выбрать последовательность уровней $A = \{\alpha_i\}_{i=1}^I$;
- 2) выбрать уровень α^* для пилотного оценивания и $\forall k = \overline{1, K+1}$, $m_k = \overline{1, M_k}$ определить α^* – уровни $\{[s_k^L(\{m_j\}_{j=1}^k, \alpha^*), s_k^R(\{m_j\}_{j=1}^k, \alpha^*)]\}_{m_k=1}^{M_k}$ оценок $R(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j})$ при $k > K_0$ и $\{[s_k^L(m_k, \alpha^*), s_k^R(m_k, \alpha^*)]\}_{m_k=1}^{M_k}$ для $R(W_k^{m_k})$

при $k \leq K_0$, по которым найти точки $\{\overline{Q}_k^{n_k}(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})(\alpha^*)\}_{n_k=1}^{N_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}$ для $k > K_0$ и $\{\overline{Q}_k^{n_k}(\alpha^*)\}_{n_k=1}^{N_k}$ для $k \leq K_0$;

- 3) для нахождения расчетных маршрутов выполнить пилотное оценивание.

3, а) для $m_{K+1} = \overline{1, M_{K+1}}$ сформировать маршруты

$$\{\overline{Q}_k^{n_k}(\alpha^*)\}_{k=1}^{K_0} \cup \{\overline{Q}_k^{n_k}(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})(\alpha^*)\}_{k=K_0+1}^{K+1}, \text{ где } n_k = \overline{1, N_k} \text{ при } k \leq K_0, \text{ и}$$

$$n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1}) = \overline{1, N_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})} \text{ при } k > K_0, \text{ с диапазоном условий } m_j = \overline{1, M_j}.$$

Выполнить оценивание в соответствии с (2) при $\alpha := \alpha^*$:

$$\mathcal{R}(m_{K+1}; \{\overline{Q}_k^{n_k}(\alpha)\}_{k=1}^{K_0} \cup \{\overline{Q}_k^{n_k}(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})(\alpha)\}_{m_j=1}^{M_j} \}_{k=K_0+1}^{K+1}) := \\ = \sum_{m_1=1}^{M_1} \dots \sum_{m_K=1}^{M_K} Q_{K+1, m_{K+1}}^{n_{K+1}(\{m_j\}_{j=1}^K)}(\alpha) \times \{ [\prod_{k=K_0+1}^K Q_{k, m_k}^{n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha)] \times [\prod_{k=1}^{K_0} Q_{k, m_k}^{n_k}(\alpha)] \}; \quad (2)$$

3, б) для m_{K+1} от 1 до M_{K+1} выбрать в соответствии с (3) и (4) по два маршрута

$$\Xi_*(m_{K+1}) = \{n_{k_*}(m_{K+1})\}_{k=1}^{K_0} \cup \{n_{k_*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})\}_{m_j=1}^{M_j} \}_{k=K_0+1}^{K+1}$$

и

$$\Xi^*(m_{K+1}) = \{n_{k_*}(m_{K+1})\}_{k=1}^{K_0} \cup \{n_{k_*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})\}_{m_j=1}^{M_j} \}_{k=K_0+1}^{K+1},$$

определяющие α^* – уровень плоской проекции $R(W_{K+1}^{m_{K+1}})$ оценки $P(W_{K+1})$:

$$s_{K+1}^L(m_{K+1}, \alpha^*) := \min \{ \mathcal{R}(m_{K+1}; \{ \bar{Q}_k^{n_k}(\alpha^*) \}_{k=1}^{K_0} \cup \{ \bar{Q}_k^{n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha^*) \}_{m_j=1}^{M_j}{}_{k=K_0+1}^{K+1} } \};$$

$$n_k = \overline{1, N_k}, k = \overline{1, K_0}; n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1}) = \overline{1, N_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}, k = \overline{K_0+1, K} \} = \quad (3)$$

$$= \mathcal{R}(m_{K+1}; \{ \bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1})}(\alpha^*) \}_{k=1}^{K_0} \cup \{ \bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha^*) \}_{m_j=1}^{M_j}{}_{k=K_0+1}^{K+1} },$$

$$s_{K+1}^R(m_{K+1}, \alpha^*) := \max \{ \mathcal{R}(m_{K+1}; \{ \bar{Q}_k^{n_k}(\alpha^*) \}_{k=1}^{K_0} \cup \{ \bar{Q}_k^{n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha^*) \}_{m_j=1}^{M_j}{}_{k=K_0+1}^{K+1} } \};$$

$$n_k = \overline{1, N_k}, k = \overline{1, K_0}; n_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1}) = \overline{1, N_k(\{m_j\}_{j=1}^{k-1})}, k = \overline{K_0+1, K} \} = \quad (4)$$

$$= \mathcal{R}(m_{K+1}; \{ \bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1})}(\alpha^*) \}_{k=1}^{K_0} \cup \{ \bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha^*) \}_{m_j=1}^{M_j}{}_{k=K_0+1}^{K+1});$$

4) $\forall \alpha \in A \setminus \alpha^*$ вычислить границы остальных α – сечений проекций $R(W_{K+1}^{m_{K+1}})$ по маршрутам $\Xi_*(m_{K+1})$ и $\Xi^*(m_{K+1})$. Для m_{K+1} от 1 до M_{K+1}

- по α – уровням проекций $\{ R(W_k^{m_k} / \bigcap_{j \leq k-1} W_j^{m_j}) \}_{m_k=1}^{M_k}$ и $\{ R(W_k^{m_k}) \}_{m_k=1}^{M_k}$ и мар-

шрутам $\Xi_*(m_{K+1})$ и $\Xi^*(m_{K+1})$ найти точки $\bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1})}(\alpha)$ и $\bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1})}(\alpha)$ для $k \leq K_0$, $\bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha)$ и $\bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha)$ для $k > K_0$, $m_j = \overline{1, M_j}$. Оценки $s_{K+1}^L(m_{K+1}, \alpha)$ и $s_{K+1}^R(m_{K+1}, \alpha)$ вычислить в соответствии с (5):

$$s_{K+1}^L(m_{K+1}, \alpha) := \mathcal{R}(m_{K+1}; \{ \bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1})}(\alpha) \}_{k=1}^{K_0} \cup$$

$$\cup \{ \bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha) \}_{m_j=1}^{M_j}{}_{k=K_0+1}^{K+1}),$$

$$s_{K+1}^R(m_{K+1}, \alpha) := \mathcal{R}(m_{K+1}; \{ \bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1})}(\alpha) \}_{k=1}^{K_0} \cup$$

$$\cup \{ \bar{Q}_k^{n_{k^*}(m_{K+1}, \{m_j\}_{j=1}^{k-1})}(\alpha) \}_{m_j=1}^{M_j}{}_{k=K_0+1}^{K+1}). \quad \bullet \quad (5)$$

Заключение. К сожалению, трудности при разработке нечетких сетей чисто вычислительными аспектами не ограничиваются. Сама структура нечеткой сети является более сложной, чем в точечном варианте, и состоит, по меньшей мере, из трех относительно самостоятельных частей. Так, процедуры проверки корректности поступающих данных не тривиальны и должны быть реализованы в виде особой изначальной составляющей сети, позволяющей интерактивно откорректировать имеющуюся информацию до приемлемого состояния [1].

В случае недетерминированных свидетельств при апостериорном оценивании за вычислительной компонентой следует составляющая, выполняющая интерполяцию по полученным оценкам вероятностей состояний системы [3]. Специально созданные процедуры пространственной дефаззификации и ассистирования при интерпретации конечного результата также целесообразно сгруппировать в отдельную замыкающую компоненту.

О.В. Верьовка

ВИКОРИСТАННЯ МЕРЕЖЕВИХ МЕТОДІВ ОРГАНІЗАЦІЇ БАЙЄСІВСЬКОГО ОЦІНЮВАННЯ ДЛЯ НЕЧІТКОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Представлені результати дозволяють застосовувати мережеві методи організації обчислень для ймовірно коректного байєсівського оцінювання на нечітких мережах довільної конфігурації.

O.V. Verovka

NETWORK METHODS OF BAYESIAN ESTIMATING ORGANIZATION USING FOR FUZZY INFORMATION

The presented results allow using of network methods of computations organization for correct probabilistic Bayesian estimation on fuzzy networks of any configuration.

1. *Веревка О.В.* Эпюрное представление информации в нечетких байесовских сетях // Компьютерная математика. – 2013. – № 1. – С. 52 – 60.
2. *Веревка О.В.* Распространение вероятностей в нечетких древовидных байесовских сетях // Там же. – 2012. – № 2. – С. 10 – 17.
3. *Веревка О.В.* Учет недетерминированных свидетельств при апостериорном оценивании в нечетких байесовских сетях // Там же. – 2011. – № 2. – С. 98 – 109.
4. *Веревка О.В., Парасюк И.Н.* Ярусный подход к представлению байесовских сетей // Там же. – 2010. – № 1. – С. 83 – 93.
5. *Веревка О.В., Парасюк И.Н.* О распространении вероятностей в нечетких байесовских сетях с недетерминированными состояниями // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 153–169.
6. *Парасюк И.Н., Костукевич Ф.В.* Методы трансформации байесовской сети для построения узлового дерева и их модификация // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 70 – 80.

Получено 14.06.2013

Об авторе:

Веревка Ольга Викторовна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.