КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8; 368; 65.0

Б.В. НОРКИН

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИВИДЕНДНОЙ ПОЛИТИКОЙ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Исследуется двухкритериальная задача стохастического оптимального управления дивидендной политикой страховой компании с критериями доходности и риска. Для построения оптимальных управлений и Парето-оптимального множества задачи применяется метод динамического программирования. Парето-оптимальное множество аппроксимируется с помощью барьерно-пропорциональных стратегий управления.

Введение. В однокритериальной постановке для бесконечного интервала времени эта проблема изучалась в работах [1 – 3] и других. В качестве основного критерия оптимизации служили средние суммарные дисконтированные дивиденды. В частности, в работе де Финетти [1] (см. также [2]) обнаружен следующий парадокс: при оптимальной стратегии управления (на бесконечном интервале времени) страховая компания разоряется с вероятностью единица. Данный результат показывает, что рассматриваемая постановка задачи не является полностью удовлетворительной. Желательно найти такую привлекательную дивидендную стратегию, при которой вероятность разорения мала.

В принципе Парето-оптимальная граница может быть найдена как огибающая множества всех возможных пар «средние дивиденды – вероятность разорения», соответствующих всем допустимым стратегиям управления (дивидендами). Множество таких стратегий бесконечно, поэтому важно перебирать только «хорошие» (эффективные) стратегии. В работах [1 – 3] обнаружено, что для однокритериальной постановки оптимальными являются барьерные (пороговые) стратегии: если текущий капитал меньше некоторого барьера, то дивиденды не выплачиваются, в противном случае выплачивается разность между капиталом и барьером. Однако нетрудно видеть, что при барьерной стратегии с увеличением горизонта планирования вероятность разорения стремится к единице [1, 2]. Поэтому, очевидно, нужно рассматривать и другие типы стратегий. Одна из них – это пропорциональная стратегия, когда в качестве дивидендов выплачивается определенная доля текущего капитала. Имеет смысл рассматривать также смеси барьерной и пропорциональной стратегий. Обзор результатов по оптимальным дивидендным стратегиям в однокритериальных задачах имеется в [4, 5]. Еще одна возможность построения эффективных стратегий управления состоит в решении задачи стохастического оптимального управления для свертки каких либо критериев. В частности, для бесконечного горизонта мы рассматриваем свертку средних дисконтированных дивидендов (с варьируемым коэффициентом) и среднего дисконтированного времени жизни. Для полученной агрегированной задачи оптимального управления оказывается справедлив принцип динамического программирования и выполнены уравнения Беллмана. Поскольку в данной задаче значения функции Беллмана разрывны и не ограничены, то стандартная методика доказательства существования и единственности решения уравнения Беллмана не применимы. Мы модифицируем эту методику, пользуясь оценкой сверху для функции Беллмана. Численно решение задачи (функция Беллмана и оптимальное позиционное управление) находится методом последовательных приближений. Варьируя коэффициент агрегации, мы можем построить некоторое приближение Парето-оптимального множества значений показателей доходности и риска, а также соответствующие оптимальные управления. Далее решение выбирается субъективно из множества Парето-оптимальных точек.

Когда управление (дивидендная политика) выбрана, то вероятность разорения может быть найдена из решения соответствующего интегрального уравнения [6] или оценена методом Монте-Карло [7]. Отметим, что задача оптимизации управления, заданного в параметрической форме как функция текущего капитала и конечномерных параметров, при ограничении на вероятность разорения может быть также приближенно решена методом работы [8].

Задача стохастического оптимального управления дивидендами. Процесс риска описывает стохастическую эволюцию резервов страховой компании, предназначенных для покрытия страховых требований. Математическая модель эволюции резервов X^t в дискретном времени имеет вид [1, 2]:

$$X_{t+1} = f\left(X_t, U_t, Y_{t+1}\right) = X_t - U_t + Y_{t+1}, \quad X_0 = x, \quad U_t \in \left[0, X_t\right], \tag{1}$$

где $\left\{Y_t\right\}$ – независимые одинаково распределенные (как Y) случайные величины с общей функцией распределения F_Y. Обозначим момент остановки (разорения) $\tau = \sup\left\{t \in [0,T] : \min_{0 \le t' < t} X_{t'} \ge 0\right\}$ и множество допустимых управлений $\bar{U} = \left\{U_t \in \mathbf{U}(x) = [0,x],\, t \in [0,T]\right\}$.

Среднее время жизни $\mathbf{E}\tau$, где $\mathbf{E}$ – знак математического ожидания, является не очень удобным индикатором риска, поскольку оно может равняться бесконечности. Поэтому наряду с $\mathbf{E}\tau$ будем рассматривать также так называемое среднее дисконтированное время жизни $\bar{T} = \mathbf{E}\sum_{y=0}^{\tau-1}\gamma^t = \left(1-\mathbf{E}^{\tau}\right)/(1-\gamma) \le$ $\le 1/(1-\gamma)$. Очевидно, если $E\tau < \infty$, то $\left(1-\gamma^{\mathbf{E}\tau}\right)/(1-\gamma) \le \bar{T} \le E\tau$. Дисконтирование можно интерпретировать как наличие некоторого случайного фактора (с биноминальным распределением с параметром γ), который может остановить процесс риска независимо от его текущего состояния [9].

Функция выигрыша за один период времени $r(X_t,U_t)$, в частности, имеет вид: $r_\lambda(X_t,U_t)=\lambda+U_t$ при $X_t \ge 0$ и $r_\lambda(X_t,U_t)=0$ при $X_t<0$, $\lambda \ge 0$, а дисконтированная функция выигрыша за T периодов представляется следующим образом:

$$V_T^U(x)=\mathbf{E}\left[\sum_{t=0}^{T}\gamma^t r_\lambda(X_t,U_t)\right]=\mathbf{E}\sum_{t=0}^{\tau-1}\gamma^t(\lambda+U_t)=\lambda\mathbf{E}\sum_{t=0}^{\tau-1}\gamma^t+\mathbf{E}\sum_{t=0}^{\tau-1}\gamma^t U_t,$$

$0<\gamma\le 1$, $U=\{U_t, 0\le t\le T\}$. Определим функцию Беллмана

$$V_t(x)=\sup\nolimits_{U\in\bar{U}} V_t^U(x), \qquad 0\le t\le T. \tag{2}$$

По определению, будем считать, что $V_t(x)=0$ для $x<0$. Однокритериальная задача (2) с параметром $\lambda=0$ и дискретным распределением Y рассмотрена в [1, 2]. Двухкритериальная задача управления дивидендами в частном случае, когда Y принимает только два значения, анализировалась в [10].

Имеют место следующие утверждения (для $\lambda=0$ они имеются в [2]).

Лемма 1 (ограниченность функции Беллмана). Функции $V_t(x)$ удовлетворяют ограничениям

$$x+\frac{\lambda}{1-\gamma(1-F(0))}\le V_t(x)\le x+\frac{\lambda+\gamma\mathbf{E}\max\{0,Y\}}{1-\gamma}. \tag{3}$$

Если функции Беллмана $V_t(\cdot)$ конечны, то при $x\ge 0$ они удовлетворяют рекуррентным соотношениям Беллмана [2, Lemma 1.1]: $V_{-1}(x)\equiv 0$,

$$V_t(x)=\sup\nolimits_{u\in\mathbf{U}(x)}\left\{r_\lambda(x,u)+\gamma\mathbf{E}V_{t-1}\left(f(x,u,Y)\right)\right\}=$$
$$=\sup\nolimits_{u\in\mathbf{U}(x)}\left\{\lambda+u+\gamma\mathbf{E}V_{t-1}\left(x-u+Y\right)\right\}, \qquad 0\le t\le T<\infty. \tag{4}$$

Лемма 2 (свойства функций Беллмана и существование оптимальных управлений при конечном временном горизонте $T<\infty$). Пусть $\mathbf{E}\max\{0,Y\}<\infty$. Тогда функции $\{V_t(x),\ -\infty<x<\infty,\ 0\le t\le T<\infty\}$ монотонно возрастают по x (при фиксированном t) и по t (при фиксированном x), полунепрерывны сверху по x (и, следовательно, непрерывны справа). Кроме того функции $\mathbf{E}V_{t-1}(x-u+Y)$ полунепрерывны сверху по $(x\ge 0, u\ge 0)$, а функции

$$u_t^*(x) = \sup\left\{v \in \arg\max_{u\in[0,x]}\left\{\lambda + u + \gamma \mathbf{E} V_{t-1}(x-u+Y)\right\}\right\}$$

являются полунепрерывными сверху оптимальными управлениями для задач (2).

В случае бесконечного горизонта $T=\infty$ уравнение Беллмана имеет вид:

$$V(x) = \sup_{u\in\mathbf{U}}\left\{r_\lambda(x,u) + \gamma \mathbf{E} V\left(f(x,u,Y)\right)\right\} =$$
$$= \sup_{u\in[0,x]}\left\{\lambda + u + \gamma \mathbf{E} V\left(x-u+Y\right)\right\}. \qquad (5)$$

Пусть $\{V_t(x)\}$ – монотонная последовательность (монотонных полунепрерывных сверху по лемме 2) функций (4).

Теорема 1 (свойства функции Беллмана и существование оптимальных управлений при бесконечном временном горизонте $T=\infty$). Пусть $\mathbf{E}\max\{0,Y\}<\infty$. Тогда предел $V(x)=\lim_{t\to\infty} V_t(x)$ существует, является монотонной полунепрерывной сверху функцией. Функция $V(x)$ – единственное полунепрерывное сверху решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $x \le V(x) \le x + C_0$ для всех $x \ge 0$, где C_0 – произвольная константа. Функция $\varphi_x(u) = \mathbf{E}V(x-u+Y),\ u\in[0,x]$, полунепрерывна сверху, а функция

$$u^*(x) = \sup\left\{v \in \arg\max_{u\in[0,x]}\left\{\lambda + u + \gamma \mathbf{E} V(x-u+Y)\right\}\right\} \qquad (6)$$

полунепрерывна сверху и является решением задачи (2) для $T=\infty$.

В работах [1, 2] для случая $\lambda=0$ и целочисленного $Y\le 1$ установлен барьерный характер оптимальных управлений, т. е. $u^*(x)=\max\{0,x-b\}$ для некоторого $b\ge 0$. Заметим, что при условии $\Pr\{Y<0\}>0$ для любой барьерной стратегии $\tilde u(x)=\max\{0,x-b\}$ с $b>0$ вероятность разорения процесса $\{\tilde x_{t+1}=\tilde x_t-\tilde u(\tilde x_t)+Y_{t+1},\ \tilde x_0\in[0,b],\ t=0,1,\ldots\}$ равна единице. Поэтому наряду с барьерной стратегией имеет смысл рассматривать другие типы стратегий, например, барьерно-пропорциональные стратегии вида $\tilde u(x)=\max\{0,\alpha(x-b)\}$, где $b\ge 0$, $0<\alpha\le 1$.

Для любого фиксированного управления $\tilde u(x)$ (в том числе оптимального $u^*(x)$) соответствующие значения средних дисконтированных дивидендов $\tilde W(x)=\mathbf{E}\sum_{t=0}^{\tilde\tau-1}\gamma^t\tilde u(x_t)$ и среднего дисконтированного времени жизни $\tilde R(x)=$ $=\mathbf{E}\sum_{y=0}^{\tilde\tau(x)-1}\gamma^t=\left(1-\mathbf{E}\gamma^{\tilde\tau(x)}\right)\Big/(1-\gamma)$ могут быть найдены из уравнений [2]:

$$\tilde W(x)=\tilde u(x)+\gamma\mathbf{E}\tilde W\left(f(x,\tilde u(x),Y)\right)=\tilde u(x)+\gamma\mathbf{E}\tilde W\left(x-\tilde u(x)+Y\right), \qquad (7)$$

$$\tilde R(x)=1+\gamma\mathbf{E}\tilde R\left(f(x,\tilde u(x),Y)\right)=1+\gamma\mathbf{E}\tilde R\left(x-\tilde u(x)+Y\right). \qquad (8)$$

Важным показателем работы страховой компании является вероятность неразорения $\tilde{Q}(x) = \Pr\{\tilde{\tau}(x) = T\}$, рассматриваемая как функция начального капитала x при управлениях $\tilde{u}(\tilde{X}_t)$, где

$$\left\{\tilde{X}_t = \tilde{X}_{t-1} - \tilde{u}(\tilde{X}_{t-1}) + Y_t,\ \tilde{X}_0 = x,\ t = 1,...,\tilde{\tau}(x)\right\},$$

$\tilde{\tau}(x) = \sup\left\{t \in [0,\infty) : \min_{0\le t'<t} \tilde{X}_{t'} \ge 0\right\}$. Функция $\tilde{Q}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{Q}(x) = \mathbf{E}\tilde{Q}(f(x,\tilde{u}(x),Y) = \mathbf{E}\tilde{Q}(x - \tilde{u}(x) + Y). \qquad (9)$$

Если процесс рассматривается на конечном интервале времени $[0,T]$, то необходимо ввести функции вероятности неразорения $\tilde{Q}_t(x)$ за $t \le T$ временных интервалов при начальном состоянии процесса x. Эти функции связаны соотношениями

$$\tilde{Q}_t(x) = \mathbf{E}\tilde{Q}_{t-1}(x - \tilde{u}(x) + Y), \qquad \tilde{Q}_0(x) = 1, \qquad 1 \le t \le T.$$

Поскольку рассматриваемая задача стохастического оптимального управления дивидендами многокритериальная, а параметр $\lambda \ge 0$ играет роль весового коэффициента свертки критериев, то для данного x имеет смысл построить множества точек $\left\{\left(\tilde{W}_\lambda(x), \tilde{R}_\lambda(x)\right), \lambda \ge 0\right\}$ и $\left\{\left(\tilde{W}_\lambda(x), 1 - \tilde{Q}_\lambda(x)\right), \lambda \ge 0\right\}$ в координатах «доходность-риск». Для этого необходимо решить для каждого $\lambda \ge 0$ интегральное уравнение Беллмана (5) и найти соответствующую функцию оптимального управления $\tilde{u}_\lambda(x)$, затем для данного управления $\tilde{u}_\lambda(x)$ решить интегральные уравнения для дивидендов, времени жизни и вероятности разорения (7).

Метод последовательных приближений для решения уравнений Беллмана. Одна возможность решения уравнений, (5), (7) – (9) состоит в составлении компьютерных программ, содержащих рекурсивный вызов функций с достаточно большой глубиной рекурсии. Численные методы решения однокритериальных задач стохастического оптимального управления изучаются в [11].

Численно уравнения (5), (7) – (9) можно решать методом последовательных приближений:

$$V_{k+1}(x) = \max_{0\le u\le x}\left\{\lambda + u + \gamma\mathbf{E}V_k\left(x - u + Y\right)\right\},\ V_0(x) = \lambda + x, \quad k = 0,1,...; \qquad (10)$$

$$W_{k+1}(x) = \tilde{u}(x) + \gamma\mathbf{E}W_k\left(x - \tilde{u}(x) + Y\right),\ W_0(x) = \tilde{u}(x),\ k = 0,1,...; \qquad (11)$$

$$R_{k+1}(x) = 1 + \gamma\mathbf{E}R_k\left(x - \tilde{u}(x) + Y\right),\ R_0(x) = 1,\ k = 0,1,...; \qquad (12)$$

$$Q_{k+1}(x) = \mathbf{E}Q_k(x - \tilde{u}(x) + Y),\ Q_0(x) = 1,\ k = 0,1,... . \qquad (13)$$

Итерационные методы (10) – (12) сходятся в силу принципа сжимающих отображений [2] и справедливости оценки (3) и [2, Lemma 1.8(i)]. Действительно, в условиях теоремы 1 в силу оптимальности управлений,

$$V_{t+1}(x) = \max_{0\le u\le x}\left\{\lambda + u + \gamma\mathbf{E}V_t\left(x-u+Y\right)\right\} = \lambda + u^*_{t+1}(x) + \gamma\mathbf{E}V_t\left(x-u^*_{t+1}(x)+Y\right),$$

$$V_t(x) = \max_{0\le u\le x}\left\{\lambda + u + \gamma\mathbf{E}V_{t-1}\left(x-u+Y\right)\right\} \ge \lambda + u^*_{t+1}(x) + \gamma\mathbf{E}V_{t-1}\left(x-u^*_{t+1}(x)+Y\right)$$

поэтому

$$0 \le V_{t+1}(x) - V_t(x) \le \gamma\mathbf{E}\left[V_t\left(x-u^*_{t+1}(x)+Y\right) - V_{t-1}\left(x-u^*_{t+1}(x)+Y\right)\right] \le$$

$$\le \gamma\mathbf{E}[V_t\left(x-u^*_{t+1}(x)+Y\right) - (x-u^*_{t+1}(x)+Y) -$$

$$-\left(V_{t-1}\left(x-u^*_{t+1}(x)+Y\right) - (x-u^*_{t+1}(x)+Y)\right)] \le$$

$$\le \gamma\sup_{x'\ge 0}\left[V_t(x') - x' - \left(V_{t-1}(x') - x'\right)\right] = \gamma\sup_{x'\ge 0}\left[V_t(x') - V_{t-1}(x')\right],$$

$$\sup_{x\ge 0}\left[V_{t+1}(x) - V_t(x)\right] \le \gamma\sup_{x\ge 0}\left[V_t(x) - V_{t-1}(x)\right] \le \gamma^t\sup_{x\ge 0}\left[V_1(x) - V_0(x)\right] \le$$

$$\le \gamma^t\sup_{x\ge 0}\left[V_1(x) - x - \left(V_0(x) - x\right)\right] \le \gamma^t\sup_{x\ge 0}\left(V_1(x) - x\right) \le \frac{\lambda + \gamma\mathbf{E}\max\{0,Y\}}{1-\gamma}\gamma^t.$$

Последовательности $\{V_k(\cdot)\}$, $\{W_k(\cdot)\}$, $\{R_k(\cdot)\}$ монотонно возрастают и сходятся к своим пределам $\{V(\cdot)\}$, $\{W(\cdot)\}$, $\{R(\cdot)\}$ со скоростью геометрической прогрессии:

$$V(x) - V_t(x) = \sum\nolimits_{k=t}^{\infty}\left(V_{k+1}(x) - V_k(x)\right) \le \left(V_{t+1}(x) - V_t(x)\right)\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\gamma^k \le$$

$$\le \frac{\lambda + \gamma E\max\{0,Y\}}{1-\gamma}\gamma^t\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\gamma^k \le \frac{\lambda + \gamma E\max\{0,Y\}}{(1-\gamma)^2}\gamma^t.$$

Аналогичные оценки справедливы для разностей $\{W(x) - W_t(x)\}$, $\{R(x) - R_t(x)\}$.

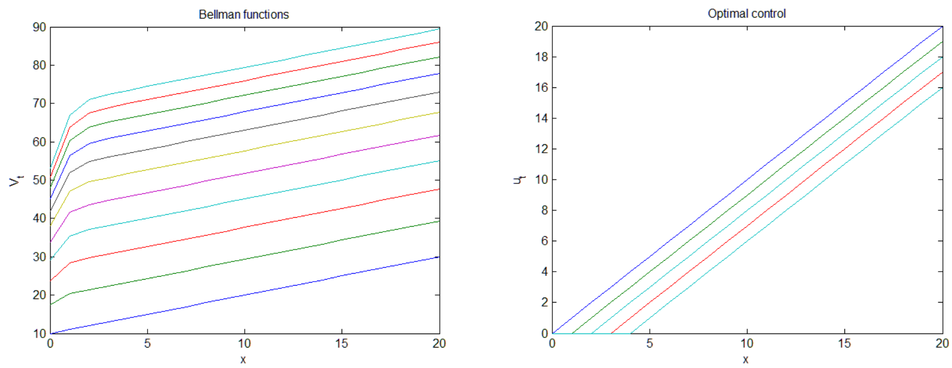
Изучение сходимости метода (13) требует более тонкого анализа [6], поскольку оператор в правой части рекуррентного соотношения (13) может быть не сжимающим. Нетрудно видеть, что последовательность $\{Q_k(\cdot)\}$ монотонно убывает. В случае барьерной стратегии $\tilde{u}(x) = \max\{0, x-b\}$ функции $\{Q_k(\cdot)\}$ стремятся к нулевой функции.

Результаты численных экспериментов. Далее приведены результаты численных экспериментов, когда случайная величина $Y \le C < \infty$ ограничена и принимает только целочисленные значения. В страховых приложениях величина C представляет собой агрегированную страховую премию компании за единицу времени. Вопросы построения распределения случайной величины Y на основе данных страховой статистики рассмотрены в [7, 12].

Вычислительные эксперименты проводились с помощью системы Matlab 8.2 на персональном компьютере следующей конфигурации: Intel Core i5 3570K (на штатной частоте) 8Gb RAM.

В численных экспериментах параметры модели (1), (2) принимали следующие значения: $Y \in \{c - y_1, \dots, c - y_n\}$ с вероятностями $p_1, \dots, p_n$, $c \ge 1$, $0 \le x \le x_{\max} = 100$, $T \le 100$, $0 \le \lambda \le \lambda_{\max} = 100$, $0 < \gamma \le 1$, $0 \le b \le x_{\max}$, $0 < \alpha \le 1$.

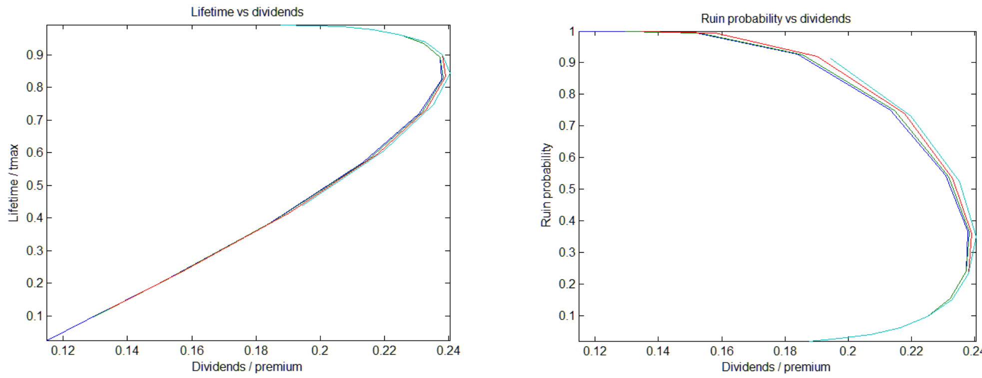
В первой серии экспериментов изучалась структура оптимальных управлений задачи (1), (2) в зависимости от параметра агрегации $\lambda \ge 0$ и дисконтирующего множителя $\gamma \in [0,1)$. Оказалось, что при изменении λ и γ в широких пределах структура оптимальных управлений была барьерной, $u_t^*(x) = \max\{0, x - b_t(\lambda, \gamma)\}$, менялась только величина барьера $b_t(\lambda, \gamma)$. На рис. 1 показаны графики последовательных приближений функций Беллмана $V_t(x)$ (10) и соответствующих оптимальных управлений $u_t^*(x)$.



а   б

РИС. 1. Графики функций Беллмана и соответствующих барьерных управлений

Во второй серии экспериментов строились аппроксимации $\left\{\left(\tilde{W}_{\alpha,b}(x_0)/(cT), \tilde{R}_{\alpha,b}(x_0)/T\right)\right\}$ и $\left\{\left(\tilde{W}_{\alpha,b}(x_0)/(cT), 1 - \tilde{Q}_{\alpha,b}(x_0)\right)\right\}$ нормированных Парето-оптимальных границ с помощью барьерно-пропорциональных стратегий управления, когда $\alpha \in (0,1]$ и $b \in [0, x_0]$, при некотором начальном капитале x_0 и горизонте планирования T. Здесь нормирующий делитель cT имеет смысл совокупной страховой премии, полученной за время T . На рис. 2 показаны примеры расчетов для $x_0 = 10$ и $T = 100$, $c = 1$, $Y \in \{1, -1\}$ с вероятностями $\{0.6, 0.4\}$.



а б

РИС. 2. Аппроксимации Парето-оптимальных множеств

Заключение. Рассмотрена двухкритериальная задача стохастического оптимального управления дивидендной политикой страховой компании с критериями доходности и риска. Для критериев в виде средних дисконтированных дивидендов и среднего дисконтированного времени жизни задача решается путем свертки критериев и применением метода динамического программирования. В численных экспериментах показано, что оптимальные управления в агрегированной однокритериальной задаче имеют вид барьерной стратегии. Для построения аппроксимации Парето-оптимального множества использовались барьерно-пропорциональные стратегии управления и метод динамического программирования.

Б.В. Норкін

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧНОГО ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИВІДЕНДНОЮ ПОЛІТИКОЮ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Досліджується двухкрітеріальна задача стохастичного оптимального керування дивідендною політикою страхової компанії за критеріями дохідності та ризику. Для побудови оптимальних керувань і Парето-оптимальної множини задачі застосовується метод динамічного програмування. Парето-оптимальна множина апроксимується за допомогою бар'єрно-пропорційних стратегій керування.

B.V. Norkin

ON NUMERICAL SOLUTION OF THE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE DIVIDEND POLICY OF AN INSURANCE COMPANY

We study two-criterion stochastic dividend policy optimal control problem for an insurance company with yield and risk criteria. To construct the optimal controls and Pareto-optimal sets of the problem, we apply the dynamic programming method. Pareto-optimal sets are approximated using barrier-proportional control strategies.

1. *De Finetti B.* Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio // Transactions of the XV-th International Congress of Actuaries 2. – 1957. – P. 433–443.
2. *Schmidli H.* Stochastic control in insurance. – London: Springer-Verlag, 2008. – 254 p.
3. *Gerber H.U.* An Introduction to Mathematical Risk Theory. – Philadelphia: Huebner Foundation Monographs, 1979.
4. *Albrecher H., Thonhauser S.* Optimality results for dividend problems in insurance. – Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. – Vol. 103 (2). – 2009. – P. 295 – 320.
5. *Avanzi B.* Strategies for dividend distribution: A review // North American Actuarial Journal. – 2009. – Vol. 13. – N 2. – P. 217 – 251.
6. *Норкин Б.В.* О решении основного интегрального уравнения актуарной математики методом последовательных приближений // Український математичний журнал. – 2007. – № 12. – Том 59. – С. 112 – 127.
7. *Норкин Б.В.* Системный имитационный анализ и оптимизация страхового бизнеса // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 2. – С. 112 – 125.
8. *Норкин Б.В.* Математические модели оптимизации страхового дела // Там же. – 2011. – № 1. – С. 128 – 145.
9. *Ermoliev Y.* Discounting, catastrophic risks management and vulnerability modeling // Mathematics and Computers in Simulation. – 2008. – Vol. 79. – P. 917 – 924.
10. *Пиуновский А.Б.* Оптимальное управление случайными последовательностями в задачах с ограничениями. – М.: Научная книга, 1996. – 294 с.
11. *Kushner K.J., Dupuis P.* Numerical methods for stochastic control problems in continuous time. – New York: Springer-Verlag, 1992. – 439 p.
12. *Норкин Б.В.* Об идентификации моделей динамического финансового анализа страховой компании // Компьютерная математика. – 2013. – № 2. – С. 24 – 33.

Получено 15.02.2014

Об авторе:

Норкин Богдан Владимирович,
кандидат физико-математических наук,
докторант Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
bogdan@norkin.org.ua