Компьютерная
Математика



*Предложен подход к построению численно-аналитического решения для определения звукового поля точечного гармонического источника в слоисто-неоднородном волноводе с условиями неидеального контакта. Исследованы свойства волноводной спектральной задачи с комплекснозначным несамосопряженным оператором и получено численно-аналитическое решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца с условиями неидеального контакта.*

УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ, Ю.А. ГЛАДКАЯ

# ОБ ИССЛЕДОВАНИИ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ С УСЛОВИЯМИ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА

**Введение.** Исследование широкого класса научно-технических задач, связанных с моделированием и оптимизацией распространения акустической энергии в неограниченных неоднородных средах требует разработки численно-аналитических методов решения краевых задач для волнового уравнения Гельмгольца [1, 2]. Особый интерес представляют вопросы математического моделирования звуковых полей в слоисто-неоднородных волноводах с учетом тонких включений.

В данной работе рассматриваются вопросы вычисления акустического поля методом нормальных волн в осесимметричном волноводе с кусочно-непрерывными (кусочно-по-стоянными) акустическими параметрами и условиями неидеального контакта. Использование метода нормальных волн требует исследования вспомогательной спектральной задачи с комплекснозначным несамосопряженным оператором. При этом для моделирования задач распространения акустической энергии на большие от источника расстояния нужно учитывать все волны, соответствующие собственным значениям с положительной действительной частью.

Отметим, что вопросы численного решения краевых задач для уравнений математической физики с разрывными решениями (потоками) рассматривались в работах [3, 4].

**Постановка задачи**. Рассмотрим задачу отыскания звукового поля в слоисто-неоднородном осесимметричном волноводе

$$G_H = \{\ 0 < r < \infty, 0 < z < H\ \},$$

где $(r, z)$ – цилиндрические координаты и ось $z$ направлены вертикально вниз, предполагая, что распространение акустической энергии описывается волновым уравнением Гельмгольца.

Для определенности будем считать, что $G_H$ – двухслойный осесимметричный волновод с горизонтальной линией раздела $\gamma$:

$$G_H = G_1 \cup G_2 \cup \gamma = \{(r,z),\ 0<r<\infty,\ 0<z<H\},\ \gamma = \{(r,z),\ 0<r<\infty,\ z=\xi\},$$

где $G_1 = \{(r,z),\ 0<r<\infty,\ 0<z<\xi\}$, $G_2 = \{(r,z),\ 0<r<\infty,\ \xi<z<H\}$.

Предположим, что верхний слой $G_1$ с абсолютно мягкой верхней границей $z=0$ заполнен средой с плотностью $\rho_1$, скоростью звука $c_1(z)$ и коэффициентом поглощения $\upsilon_1(z) \ge 0$. Нижний слой $G_2$ характеризуется постоянной плотностью $\rho_2$, скоростью звука $c_2(z)$, коэффициентом поглощения $\upsilon_2(z) \ge 0$.

Таким образом, акустические параметры можно описать соотношениями

$$c(z) = \begin{cases} c_1(z), & 0<z<\xi, \\ c_2(z), & \xi<z<H; \end{cases} \quad \upsilon(z) = \begin{cases} \upsilon_1(z), & 0<z<\xi, \\ \upsilon_2(z), & \xi<z<H; \end{cases} \quad \rho(z) = \begin{cases} \rho_1, & 0<z<\xi, \\ \rho_2, & \xi<z<H. \end{cases}$$

Поэтому расчет звукового поля точечного гармонического источника в неоднородной области $G_H$ с тонким включением $\gamma$ сводится к отысканию решения уравнения Гельмгольца с комплекснозначным несамосопряженным оператором [2]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + k_0^2(n^2(z) + i\upsilon(z))p = -\frac{\delta(r)\,\delta(z-z_0)}{2\pi r}, \quad (1)$$

$$z \in (0,\xi) \cup (\xi, H), \quad 0<r<\infty,$$

удовлетворяющего условиям неидеального контакта на границе раздела сред $\gamma$

$$\left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right]_{z=\xi} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{z=\xi_1+0} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{z=\xi_1-0} = 0, \quad (2)$$

$$\left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right\}^{\pm} = \alpha[p]_{z=\xi},\ \alpha = 1/(\rho_0 d), \quad (3)$$

граничным условиям

$$p\big|_{z=0} = 0,\ \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\bigg|_{z=H} = 0, \quad (4)$$

а также условиям излучения на бесконечности.

Здесь $p(r,z)-$ комплекснозначное акустическое давление гармонического источника с координатами $(r,z)=(0,z_0)$, $0<z_0<\xi$; $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица; $k_0=\omega/c_0$ – волновое число; $\omega$ – частота; $n(z)=c_0/c(z)$ – коэффициент преломления; $c_0$ – некоторое значение скорости звука $c(z)$; $\delta(\cdot)-$дельта-функция Дирака; $[p(r,z)]\big|_{z=\xi}=p^+-p^-$, $p^\pm=p(r,\xi\pm 0)$ – скачок $p(r,z)$ на $\gamma$.

Следуя [3, 4] можно показать, что условия неидеального контакта (2), (3) описывают влияние тонкой прослойки с плотностью $\rho_0$ и толщиной $d$, заменяя ее линией раздела $\gamma$.

**Численное исследование волновой задачи.** Для построения численно-аналитического решения задачи (1) – (4) методом нормальных мод рассмотрим вспомогательную спектральную задачу

$$\frac{d}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{d\varphi}{\partial z}\right)+\frac{k^2(z)}{\rho(z)}\varphi=\lambda^2\frac{1}{\rho(z)}\varphi,\ z\in(0,\xi)\cup(\xi,H), \tag{5}$$

$$\left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=\xi}=0, \qquad \left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}^{\pm}=\alpha[\varphi]_{z=\xi},\ \alpha=1/(\rho_0 d), \tag{6}$$

$$\varphi(0)=0,\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H}=0. \tag{7}$$

Для исследования свойств спектральной задачи (5) – (7) представим ее в виде операторного уравнения

$$A\varphi=\mu\frac{1}{\rho(z)}\varphi,\ \mu=\lambda^2, \quad \varphi\in D(A), \tag{8}$$

где

$$A=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{d}{d}\right)+\frac{k^2(z)}{\rho(z)},\ k^2(z)=k_0^2(n^2(z)+i\upsilon(z)).$$

Область определения $D(A)$ оператора $A$ состоит из множества непрерывных на $[0,H]$ комплекснозначных функций, которые непрерывно дифференцируемые на отрезках $[0,\xi_1]$, $[\xi,H]$ и удовлетворяют условиям (6), (7). Скалярное произведение и норма в $L_2(0,H)$ определяются формулами:

$$(u,v)=\int_0^H u(z)\bar{v}(z)dz,\ \ \|u\|=\sqrt{(u,u)}.$$

Умножая (8) скалярно на функцию $\psi \in D(A)$ и интегрируя по частям, легко показать, что для оператора $A$ справедливо соотношение:

$$(A\varphi, \psi) = \int_0^{\xi} A\varphi\overline{\psi}dz + \int_{\xi}^{H} A\varphi\overline{\psi}dz = \left(\varphi, A^*\psi\right), \quad \psi,\varphi \in D(A), \qquad (9)$$

где $A^* = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\rho(z}\dfrac{d}{dz}\right) + \dfrac{\overline{k^2}(z)}{\rho(z)}$.

Из соотношения (10) следует, что сопряженный оператор $A^*$ имеет вид $A^* = \overline{A}$ и при $\operatorname{Im} k = 0$ $A^* = A$. В последнем случае все собственные значения задачи (6) – (8) вещественны и могут быть упорядочены

$$\max_{z\in[0,H]} k^2(z) > \lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \ldots > \lambda_n^2 > \ldots \to -\infty,$$

а соответствующие им собственные функции действительны и образуют полную ортогональную систему в $L_2(0,H)$ с весом $1/\rho$. В общем случае ($\operatorname{Im} k > 0$) все собственные значения задачи (5) – (7) являются комплексными.

Имеет место следующее утверждение.

**Лемма.** Собственные функции $\varphi_n, \varphi_m$, соответствующие различным собственным значениям $\mu_n, \mu_m$ ($\mu_n \neq \mu_m$) задачи (5) – (7) образуют биортогональную с весом $1/\rho$ систему, т. е. выполняются соотношения

$$(\varphi_n / \rho, \overline{\varphi_m}) = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\varphi_n\varphi_m dz = \begin{cases} 0, \; n \neq m, \\ \gamma_n^2, \; n = m. \end{cases}$$

Отметим, что $\gamma_n^2 > 0$ при $\operatorname{Im} k = 0$ и $\gamma_n^2 \in C$, если $\operatorname{Im} k > 0$.

Действительно, так как $\varphi_n, \varphi_m$ – собственные функции, соответствующие различным собственным значениям $\mu_n, \mu_m$, то

$$A\varphi_n = \mu_n \frac{1}{\rho(z)}\varphi_n, \quad A\varphi_m = \mu_m \frac{1}{\rho(z)}\varphi_m.$$

Учитывая, что

$$A^* = \overline{A} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho(z}\frac{d}{dz}\right) + \frac{\overline{k^2}(z)}{\rho(z)}, \quad A\varphi_m = \mu_m \frac{1}{\rho(z)}\varphi_m,$$

получаем

$$A^*\overline{\varphi}_m = \overline{A\varphi_m} = \overline{\mu}_m \frac{1}{\rho(z)}\overline{\varphi}_m.$$

Тогда имеем

$$\left(A\phi_n,\overline{\phi}_m\right)=\left(\phi_n,A^{*}\overline{\phi}_m\right)=\left(\varphi_n,\overline{A\varphi_m}\right)=\left(\varphi_n,\overline{\mu}_m\frac{1}{\rho(z)}\overline{\varphi}_m\right)=\mu_m\left(\frac{1}{\rho(z)}\varphi_n,\overline{\varphi}_m\right) \quad (10)$$

и

$$\left(A\varphi_n,\overline{\varphi}_m\right)=\mu_n\left(\frac{1}{\rho(z)}\varphi_n,\overline{\varphi}_m\right). \quad (11)$$

Вычитая (11) из (10), получаем

$$\left(A\varphi_n,\overline{\varphi}_m\right)=(\mu_n-\mu_m)\left(\frac{1}{\rho(z)}\varphi_n,\overline{\varphi}_m\right)=0.$$

Поскольку $\mu_n\neq\mu_m$, то окончательно получим $(\varphi_n/\rho,\overline{\varphi}_m)=0$.

Кроме приведенных свойств получим оценку снизу и сверху для собственных значений задачи (5) – (7). Покажем, что имеют место неравенства

$$\operatorname{Re}\mu<\max_{0\le z\le H}\operatorname{Re}k^2(z),\ 0<\operatorname{Im}\mu\le\max_{0\le z\le H}\operatorname{Im}k^2(z). \quad (12)$$

Для доказательства операторное уравнение (8) скалярно умножим на $\varphi$. Учитывая условия сопряжения (6) и граничные условия (7), получаем тождество

$$\mu\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}|\varphi(z)|^2\,dz=-\alpha\left|[\varphi]\big|_{z=\xi}\right|^2-\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\left|\frac{d\varphi}{dz}\right|^2dz+\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}k^2(z)|\varphi(z)|^2\,dz. \quad (13)$$

Отделяя здесь вещественную часть, получаем

$$\operatorname{Re}(\mu)\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}|\varphi(z)|^2\,dz=-\alpha\left|[\varphi]\big|_{z=\xi}\right|^2-\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\left|\frac{d\varphi}{dz}\right|^2dz+\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\operatorname{Re}(k^2(z))|\varphi(z)|^2\,dz.$$

Отсюда, учитывая условие $\operatorname{Re}k^2(z)>0$ следует, что

$$\operatorname{Re}\mu\le\max_z\operatorname{Re}(k^2(z)),\quad \operatorname{Re}k^2(z)=k_0^2n^2(z).$$

Аналогично, отделяя мнимую часть в тождестве (13), находим

$$\operatorname{Im}\mu\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}|\varphi(z)|^2\,dz=\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\operatorname{Im}(k^2(z))\,|\varphi(z)|^2\,dz,\ \operatorname{Im}k^2(z)=k_0^2\upsilon(z))$$

откуда вытекает справедливость второго неравенства (12).

Следуя [2], может быть установлена следующая теорема.

**Теорема.** Численно-аналитическое решение краевой задачи (1) – (4) можно представить в виде суммы нормальных волн

$$p(r,z)=\frac{i}{4\rho(z_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z_0)\varphi_n(z)H_0^{(1)}(\lambda_n r)/\gamma_n^2, \tag{14}$$

где $H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, $\lambda_n^2$, $\varphi_n(z)$ – собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи (5) – (7).

Для численного решения спектральной задачи введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_h=\{z=z_j=jh,\ j=0,h,\dots,n_1,n_1+1,\dots,N,N=Hh,\ \xi=n_1h\}.$$

Тогда дифференциальной задаче (5) – (7) можно поставить в соответствие разностную схему, которую запишем в операторной форме

$$Ay=\mu a(z)y, z\in\omega_h,\ \ y_0=0,$$

где $\omega_h$ – множество внутренних узлов, а линейный оператор $A$ определяется по формулам:

$$Ay=\begin{cases}(a(z)_{\bar z})_z+k^2(z)a(z)y,\ y\neq\xi\pm0,\ y\neq H, a(z)=1/(\rho(z-0{,}5h)),\\ \dfrac{2}{h}\left[\alpha(y^+-y^-)-\dfrac{1}{\rho_1}y_{\bar z}\right]+\dfrac{1}{\rho_1}k^2(\xi-0)y, z\neq\xi-0,\\ \dfrac{2}{h}\left[-\alpha(y^+-y^-)+\dfrac{1}{\rho_2}y_z\right]+\dfrac{1}{\rho_2}k^2(\xi+0)y, z\neq\xi+0,\\ -\dfrac{2}{h}\dfrac{1}{\rho_2}y_{\bar z}+\dfrac{1}{\rho_2}k^2(z)y, z=N.\end{cases}$$

Здесь сеточная комплекснозначная функция $y(z)$ имеет при $z=\xi=n_1h$ два значения $y^{\pm}$, аппроксимирующие $\varphi(\xi\pm0)=\varphi^{\pm}$, и приняты обозначения теории разностных схем [5].

Пусть $\overline{\omega_h}$ – пространство сеточных комплекснозначных функций, определенных на $\overline{\omega_h}$, принимающих нулевые значения при $z=0$ и имеющих разрыв при $z=\xi$. Обозначим $(y,v)=(y,v)_1+(y,v)_2, \|y\|=(y,y)^{1/2}$ скалярное произведение и норму в $\overline{\omega_h}$, где

$$(y,v)_1=0{,}5y^-v^-h+\sum_{j=1}^{j=n_1-1}y_jv_jh,\ (y,v)_2=0{,}5y^+v^+h+0{,}5y_Nv_Nh+\sum_{j=n_1+1}^{j=N-1}y_jv_jh.$$

Пользуясь второй разностной формулой Грина [5], можно показать самосопряженность разностного оператора $A$ в случае $\operatorname{Im}k^2(z)=0,\ (Ay,v)=(y,Av)$.

**Заключение.** Рассмотренный в работе подход позволяет проводить численное моделирование звуковых полей в неоднородных волноводах с условиями неидеального контакта и расширить класс задач, связанных с исследованием акустических полей.

*А.В. Гладкий, Ю.А. Гладкая*

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ АКУСТИЧНИХ ПОЛІВ У СЕРЕДОВИЩАХ
ІЗ УМОВАМИ НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ

Розглядається задача чисельного моделювання акустичних полів точкового гармонічного джерела в осесиметричних неоднорідних хвилеводах із умовами неідеального контакту. Досліджено властивості спектральної задачі з комплекснозначним несамоспряженим оператором та отримано розв'язок крайової задачі.

*A.V. Gladky, J.A. Gladka*

ABOUT INVESTIGATION OF ACOUSTIC FIELDS IN NONIDEAL CONTACT DOMAINS

The problem of numerical simulation of acoustic fields of a point harmonic source in axisymmetric inhomogeneous waveguides with the conditions of non-ideal contact is considered. The properties of the spectral problem with a complex-valued non-self-conjugate operator are investigated and a solution of the boundary-value problem is obtained.

1. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 264 с.
2. *Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – Киев: Наук. думка, 2001. – 453 с.
3. *Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
4. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
5. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

Получено 15.01.2014

***Об авторах:***

*Гладкий Анатолий Васильевич*,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: gladky@ukr.net

*Гладкая Юлия Анатольевна*,
доцент Киевского национального торгово-экономического университета.