КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

УДК 681.3

О.О. ПРОВОТАР

НЕЧІТКІ БУЛЕВІ ЗМІННІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Розглядаються так звані нечіткі булеві змінні та їх застосування в задачах прогнозування. Пропонується підхід до розв'язання таких задач методами індуктивної математики.

Вступ. Одним із розділів класичної математичної логіки є алгебра висловлювань. Під висловлюванням розуміють змінну, яка приймає одне з двох можливих значень – 0 або 1. Таку змінну називають булевою. В деяких випадках корисним є узагальнення поняття булевої змінної до поняття нечіткої булевої змінної [1].

Нечіткою булевою змінною називається змінна p, яка приймає значення з проміжку [0, 1].

Нехай p і q – нечіткі булеві змінні. Логічні операції над такими змінними визначаються так:

$$\overline{p} = 1 - p,$$

$$p \wedge q = \min(p, q),$$

$$p \vee q = \max(p, q).$$

Із визначення операцій випливає, що закони виключення третього і суперечності

$$p \vee \overline{p} = 1, \;\; p \wedge \overline{p} = 0$$

порушуються.

Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – нечіткі БЗ. Функцію $f(p_1, \ldots, p_n)$ називають функцією нечітких булевих змінних, якщо вона приймає значення на відрізку [0, 1].

Функції нечітких булевих змінних (аналогічно булевим функціям) можна задавати таблицями. Наприклад, нехай $f(p, q) = (p \wedge \overline{p}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{q})$.

Побудова таблиці значень функції зводиться до складання послідовностей 4-х символів, між якими поставлені знаки нерівності « ≤ ». Існує чотири способи вибору першого елемента послідовності: найменшим серед чисел $p, \overline{p}, q, \overline{q}$ може бути будь-яке з них. Нехай, наприклад, найменшим числом є число p. Тоді найбільшим буде число $\bar{p} = 1 - p$. Отже, вибір першого елемента послідовності однозначно визначає вибір останнього. Після вибору першого числа залишається дві можливості вибрати другий елемент послідовності. При цьому вибір другого елемента послідовності однозначно визначає вибір третього. Таким чином, існує вісім способів складання послідовностей змінних $p, \bar{p}, q, \bar{q}$, з’єднаних знаками нерівності:

$$p \le q \le \bar{q} \le \bar{p}, \quad p \le \bar{q} \le q \le \bar{p};$$

$$\bar{p} \le q \le \bar{q} \le p, \quad \bar{p} \le \bar{q} \le q \le p;$$

$$q \le p \le \bar{p} \le \bar{q}, \quad q \le \bar{p} \le p \le \bar{q};$$

$$\bar{q} \le p \le \bar{p} \le q, \quad \bar{q} \le \bar{p} \le p \le q.$$

Тоді табл. 1 матиме вигляд.

ТАБЛИЦЯ. 1

Вид нерівності	$p \wedge \bar{p} =$ $= \min(p, \bar{p})$	$\bar{p} \wedge q \wedge \bar{q} =$ $= \min(\bar{p}, q, \bar{q})$	$f(p,q) = (p \wedge \bar{p}) \vee$ $\vee(\bar{p} \wedge q \wedge \bar{q}) = \max(\min(p, \bar{p}),$ $\min(\bar{p}, q, \bar{q}))$
$p \le q \le \bar{q} \le \bar{p}$	p	q	q
$p \le \bar{q} \le q \le \bar{p}$	p	$\bar{q}$	$\bar{q}$
$\bar{p} \le q \le \bar{q} \le p$	p	$\bar{P}$	$\bar{P}$
$\bar{p} \le \bar{q} \le q \le p$	$\bar{P}$	$\bar{P}$	$\bar{P}$
$q \le p \le \bar{p} \le \bar{q}$	p	q	p
$q \le \bar{p} \le p \le \bar{q}$	$\bar{P}$	q	$\bar{P}$
$\bar{q} \le p \le \bar{p} \le q$	p	$\bar{q}$	p
$\bar{q} \le \bar{p} \le p \le q$	$\bar{P}$	$\bar{q}$	$\bar{P}$

Функції f_1 і f_2 називаються рівносильними (тотожними), якщо вони мають одну і туж таблицю значень, яка включає всі можливі співвідношення між змінними.

Функцію f від нечітких булевих змінних називають аналітичною, якщо вона може бути представлена формулою, що містить операції $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Наприклад, аналітична функція $f(p,q) = p \wedge q$ від двох нечітких булевих змінних може бути представлена наступною табл. 2.

ТАБЛИЦЯ. 2

Вид нерівності	$p \wedge q$
$p \le q \le \overline{q} \le \overline{p}$	p
$p \le \overline{q} \le q \le \overline{p}$	p
$\overline{p} \le q \le \overline{q} \le p$	q
$\overline{p} \le \overline{q} \le q \le p$	q
$q \le p \le \overline{p} \le \overline{q}$	q
$q \le \overline{p} \le p \le \overline{q}$	q
$\overline{q} \le p \le \overline{p} \le q$	p
$\overline{q} \le \overline{p} \le p \le q$	p

Так як в нечіткій логіці порушуються закони виключення третього і суперечності, то функція

$$p \to q = \overline{p} \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q \vee p \cdot q$$

не піддається спрощенню. Тому, для аналітичної функції імплікації маємо наступну табл. 3.

ТАБЛИЦЯ. 3

Вид нерівності	$\overline{p} \cdot \overline{q}$	$\overline{p} \cdot q$	$p \cdot q$	$p \to q$
$p \le q \le \overline{q} \le \overline{p}$	$\overline{q}$	q	p	$\overline{q}$
$p \le \overline{q} \le q \le \overline{p}$	$\overline{q}$	q	p	q
$\overline{p} \le q \le \overline{q} \le p$	$\overline{p}$	$\overline{p}$	q	q
$\overline{p} \le \overline{q} \le q \le p$	$\overline{p}$	$\overline{p}$	q	q
$q \le p \le \overline{p} \le \overline{q}$	p	q	q	$\overline{p}$
$q \le \overline{p} \le p \le \overline{q}$	$\overline{p}$	q	q	$\overline{p}$
$\overline{q} \le p \le \vec{p} \le q$	$\overline{q}$	$\overline{p}$	p	$\overline{p}$
$\overline{q} \le \overline{p} \le p \le q$	$\overline{q}$	p	p	p

Деякі застосування. Одне із завдань аналізу функцій нечітких булевих змінних полягає у наступному. Необхідно з'ясувати за яких умов аналітична функція, наприклад, $f(p,q) = p \wedge q$ потрапляє у заданий проміжок [α, β) відрізка [0, 1] при умові, що $p \in [a_1, a_2] \subseteq [0,1]$ і $q \in [b_1, b_2] \subseteq [0,1]$.

Очевидно, що при будь-яких можливих співвідношеннях між a_1, b_1, a_2, b_2 справедливе наступне твердження:

$$p \wedge q \in [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)).$$

Звідси випливає, що

$$p \wedge q \in [\alpha, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \min(a_1, b_1) \ge \alpha \\ \min(a_2, b_2) < \beta \end{cases}.$$

Очевидно, що

$$\min(a_1, b_1) \ge \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \ge \alpha \\ b_1 \ge \alpha \end{cases}.$$

Тобто обидва числа a_1 і b_1 мають бути більшими α. Водночас нерівність $\min(a_2, b_2) < \beta$ буде виконуватись, якщо хоча б одне із чисел a_2 або b_2 виявиться меншим β. Тому

$$\min(\alpha_2, \beta_2) < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 < \beta \\ b_2 < \beta \end{cases}.$$

Таким чином маємо:

$$p \wedge q \in [\alpha, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \min(a_1, b_1) \ge \alpha \\ \min(a_2, b_2) < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_1 \ge \alpha \\ b_1 \ge \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} a_2 < \beta \\ b_2 < \beta \end{cases} \end{cases}.$$

Враховуючи, що $p \in [a_1, a_2]$, $q \in [b_1, b_2]$ отримуємо:

$$p \wedge q \in [\alpha, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} p \ge \alpha \\ q \ge \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} p < \beta \\ q < \beta \end{cases} \end{cases}.$$

Використовуючи запропонований метод можна, наприклад, визначити за яких умов функція

$$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2$$

попадає у проміжок [0,1; 0,3). Такими умовами є наступні:

$$_2 \vee x_1\bar{x}_2 \in [0,1;0,3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x_1 \le 0,9 \\ x_2 \ge 0,1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x_1 \ge 0,1 \\ x_2 \le 0,9 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x_1 > 0,7 \\ x_2 < 0,3 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x_1 < 0,3 \\ x_2 > 0,7 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

Відомо, що синоптики дають оцінку своїм прогнозам з точки зору теорії ймовірностей і вказують надійність своїх прогнозів наступним чином:

«сонячно» з ймовірністю $p \in [0,7;\ 0,8)$;

«вітряно» з ймовірністю $q \in [0,3;\ 0,5)$;

«пасмурно» з ймовірністю $h \in [0,8;\ 0,9)$.

Розглянемо аналітичну булеву функцію

$$f\,(p,q) = p \to q = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q.$$

Припустимо, що $p \in [0,7;\ 0,8)$, $q \in [0,3;\ 0,5)$. Необхідно з'ясувати в який проміжок відрізка [0,1] потрапляють значення цієї функції. Іншими словами, треба знайти в якому проміжку міститься ймовірність того, що погода буде «сонячна» і «вітряна», або «не сонячна» і «вітряна», або «не сонячна» і «не вітряна».

Враховуючи, що $p \to q = \bar{p}\bar{q} \vee \bar{p}q \vee pq$ і те, що $p \in [0,7;0,8]$, $q \in [0,3;0,5]$ знаходимо, що $\bar{p} \in [0,2;0,3]$, $\bar{q} \in [0,5;0,7]$. Отже, $\bar{p}\bar{q} = \min(\bar{p},\bar{q}) \in [0,2;0,3]$, $\bar{p}q = \min(\bar{p},q) \in [0,2;0,3]$, $pq = \min(p,q) \in [0,3;0,5]$. Тоді

$$\bar{p}\bar{q} \vee \bar{p}q \in [0,2;0,3],$$

$$\bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee pq \in [0,3;0,5].$$

Тому, значення функції $f(p,\ q)$ будуть потрапляти у проміжок [0,3; 0,5].

Припустимо, що, як і раніше, $p \in [0,7;\ 0,8)$, $q \in [0,3;\ 0,5)$, аналітична булева функція невідома, але відомий проміжок відрізка [0,1], в який потрапляють значення цієї функції. В данному випадку – це проміжок [0,3; 0,5]. Необхідно з'ясувати в який проміжок відрізка [0, 1] потрапляють значення цієї невідомої функції, якщо, наприклад, $p \in [0,5;\,0,6]$, $q \in [0,3;\,05]$.

Один із підходів до розв'язання цієї задачі полягає у побудові та дослідженні її так званої лінгвістичної моделі [2, 3]. В цій моделі змінні p, q, f будемо вважати лінгвістичними змінними, а відповідні проміжки будемо описувати нечіткими множинами просторі [0,1]. Отже, наша нечітка модель буде мати наступний вигляд:

$$R: \text{ якщо } p \in A_1 \wedge q \in A_2 \text{ то } f \in B,$$

де A_1 = 1/[0,7; 0,8], A_2 = 1/[0,3; 05], B = 1/[0,3; 05].

Треба знайти вихід B' цього нечіткого правила при входах A_1' = 1/[0,6; 0,8], A_2' = 1/[0,3; 05].

У випадку двох входів, алгоритм знаходження виходу буде складатися з наступних кроків:

1) для правила R обчислюємо його рівень істинності

$$\alpha = \min\left[\max_{[0,1]}(A_1'(x_1) \wedge A_1(x_1)), \max_{[0,1]}(A_2'(x_2) \wedge A_2(x_2))\right];$$

2) обчислюємо індивідуальний вихід правила

$$B'(y) = \min(\alpha, B(y)).$$

Цей алгоритм називається max-min процедурою або процедурою логічного висновку Мамдані.

Провівши обчислення згідно з процедурою будемо мати:

$$\alpha = 1, B'(y) = 1/[0,3; 05].$$

Запропонована нечітка модель може мати більше одного правила. В цьому випадку процедуру виконання алгоритму знаходження виходу доповнюється кроком:

3) обчислюємо агрегатний вихід

$$B'(y) = \max(B_1', B_2', \ldots, B_m'),$$

де $B_1', \ldots, B_m'$ – індивідуальні виходи кожного правила.

Ще одна постановка задачі полягає у наступному. Нехай $p \in [0,5; 0,6]$. Обчислимо ймовірність вітряної погоди за умови, що $p \to q \in [0,3; 0,5]$.

Припустимо, що $q \in [b_1, b_2] \subseteq [0,1]$. Тоді,

$$p \wedge q \in [\min(0,5; b_1), \min(0,6; b_2)],$$

$$\overline{p} \wedge q \in [\min(0,4; b_1), \min(0,5; b_2)],$$

$$\overline{p} \wedge \overline{q} \in [\min(0,4; 1-b_2), \min(0,5; 1-b_1)],$$

$$pq \vee \overline{p}q \in [\max(\min(0,5; b_1), \min(0,4; b_1)), \max(\min(0,6; b_2), \min(0,5; b_2))],$$

$$pq \vee \overline{p}q \vee \overline{pq} \in [\max(\min(0,5; b_1), \min(0,5; b_1), \min(0,5; 1-b_1)),$$
$$\max(\min(0,6; b_2), \min(0,5; b_2), \min(0,4; 1-b_2)].$$

Звідси отримуємо:

$$\max(\min(0,5; b_1), \min(0,5; b_1), \min(0,5; 1-b_1)) > 0,3,$$

$$\max(\min(0,6; b_2), \min(0,4; b_2), \min(0,4; 1-b_2) \le 0,5.$$

Із першого співвідношення знаходимо b_1:

$$\left.\begin{array}{l} 0,5 \le b_1 \Rightarrow \\ b_1 \le 0,5 \Rightarrow \end{array}\right. b_1 - \text{будь-яке.}$$

Із другого співвідношення знаходимо, що $b_2 \le 0,5$. Таким чином, ймовірність вітряної погоди $q \in [0;\ 0,5]$.

Висновки. У випадку нечітких булевих змінних основні правила (закони) булевої логіки не виконуються. Це означає, що іноді досить проблематично задавати залежності між логічними змінними аналітично. В цьому випадку, як ми бачимо, досить ефективними і користними можуть бути підходи індуктивної математики, узагальнені на нечіткі множини.

О.А. Провотар

НЕЧЕТКИЕ БУЛЕВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Рассматриваются так называемые нечеткие булевые переменные и их применение в задачах прогнозирования. Предлагается подход к решению таких задач методами индуктивной математики.

O.O. Provotar

FUZZY BOOLEAN VARIABLES AND THEIR APPLICATIONS

The so-called fuzzy boolean variables and their application in forecasting problems are considered. An approach to solve these problems by inductive mathematics methods is proposed.

1. *Конышева Л.К., Назаров Д.М.* Основы теории нечетких множеств. – СПб.: Питер, 2011. – 192 с.
2. *Провотар А.И., Лапко А.В., Провотар А.А*. Нечеткие системы логического вывода и их применение // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 4. – С. 37 – 45.
3. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Телеком, 2006. – 382 с.

Одержано 12.02.2015

Про автора:

Провотар Ольга Олександрівна,
аспірантка Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: olga_provotar@gmail.com