КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.854.33

Н.В. ЛІЩУК

СКЛАДНІСТЬ АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ

Показано, що проблеми аналізу стійкості узагальнено близьких задач про покриття множинами та задач про багатовимірний булевий рюкзак є NP-складними. Це означає, що при незбіганні класів P і NP у найгіршому випадку не існує відповідних поліноміальних алгоритмів аналізу стійкості розглянутих класів узагальнено близьких задач (відрізняються одним елементом в матрицях обмежень або правих частинах).

Вступ. Предметом розгляду розділу, який називається аналізом стійкості (sensitivity analysis) [1], є дослідження впливу змін параметрів вихідної задачі на оптимальний розв'язок цієї задачі. Зокрема, як знаючи оптимальний розв'язок деякої задачі, знайти оптимальний розв'язок (або визначити, що він залишився без змін) «близьких» у тому чи іншому сенсі задач. Важливе значення приділяється оцінками складності аналізу стійкості дискретних задач оптимізації. Для NP -складних задач це зводиться до аналізу існування поліноміальних алгоритмів знаходження оптимальних розв'язків змінених задач, виходячи з оптимальних розв'язків початкової задачі. В роботі [2] наводяться результати по складності аналізу стійкості 0/1 задач з лінійної цільової функції при зміні значень цільового вектора. Показано, що є NP -складним (не існує поліноміального алгоритму при $P \neq NP$) визначити чи залишається оптимальний розв'язок незмінним для NP -складних задач при довільній зміні вектора значень цільової функції. Подібних результатів по зміні матриці обмежень або коефіцієнтів вектора обмежень, або взагалі немає, або вони нечисленні. Розглядаються: узагальнена задача про покриття множинами, а також багатовимірна задача про рюкзак.

Постановка задач. Узагальнену задачу про покриття множинами розглянемо у такій постановці: в комбінаторному варіанті дано множину $M = \{1,...,m\}$ і набір її підмножин $M_1,...,M_n$, таких, що $\bigcup_{j=1}^{n} M_j = M$. Сукупність підмножин M_j, $j \in J \subseteq \{1,...n\}$, називається покриттям множини M, якщо $\bigcup_{j\in J} M_j = M$. Кожному M_j відповідає вага $c_j \geq 0$; потрібно знайти покриття мінімальної сумарної ваги; у варіанті цілочислового лінійного програмування

$$f\left(c, A, b\right) = \min\left\{cx \middle| Ax \geq b, x \in \{0,1\}\right\}. \qquad (1)$$

$A = \{a_{ij}\}$ – матриця розмірності $m \times n$ з елементами $a_{ij} = 1$, якщо $i \in M_j$, і $a_{ij} = 0$ у протилежному випадку; $b = (b_1, ..., b_m)$ b_i – натуральні числа, $i = 1, ..., m$; $c = \left(c_1, ..., c_n\right)$ − вектор ваги; $x = \left(x_1, ..., x_n\right)$ − вектор змінних з компонентами $x_j = 1$, якщо M_j входить у покриття, і $x_j = 0$ у протилежному випадку.

Отже, розглянемо узагальнену задачу про покриття множинами ($GenSet$):

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, ..., m,$$

$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, ..., n. \qquad (2)$$

Аналіз стійкості для $GenSet$ будемо проводити таким чином: у розглядуваній задачі змінюються лише елементи (m, n)-матриці $A = \left\{a_{ij}\right\}$ $\left(i = 1, ..., m; j = 1, ..., n\right)$ і вектора $b = \left(b_1, ..., b_m\right)$ (елементи вектора $c = \left(c_1, ..., c_n\right)$ залишаються незмінними).

Тому екземпляр задачі (2) будемо позначати $GenSet(A, b)$ або $GenSet\left(\overline{A}\right)$, де $\overline{A} = (A, b) - (m, n+1)$-матриця або $GenSet(I)$, де $I = \overline{A}$.

Для довільних двох $\left(m, n+1\right)$-матриць $\overline{A} = \left\{\overline{a}_{ij}\right\}$ і $\overline{B} = \left\{\overline{b}_{ij}\right\}$, $\left(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n, n+1\right)$ введемо метрику $\rho\left(\overline{A}, \overline{B}\right) = \sum_{i,j}\left|\overline{a}_{ij} - \overline{b}_{ij}\right|$.

Багатовимірну булеву задачу про рюкзак розглянемо у постановці:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, ..., m,$$

$$x_i \in \{0,1\},\ i = 1, ..., n. \qquad (3)$$

Будемо вважати, що елементи матриці $A=\{a_{ij}\}$, векторів $c=(c_1,...,c_n)$ і $b=(b_1,...,b_m)$ – невід'ємні цілі числа. Екземпляр задачі (3) будемо позначати $KP(A,b,c)$ або $KP(\overline{A},c)$, де $\overline{A}=(A,b)-(m,n+1)$ – матриця.

Аналіз стійкості для KP будемо проводити таким чином: у розглядуваній задачі змінюються лише елементи (m,n)-матриці $A=\{a_{ij}\}$ $(i=1,...,m;$ $j=1,...,n)$ і вектора $b=(b_1,...,b_m)$ (елементи вектора $c=(c_1,...,c_n)$ залишаються незмінними).

Тому екземпляр задачі (3) будемо позначати $KP(A,b)$ або $KP(\overline{A})$, де $\overline{A}=(A,b)$ − $(m,n+1)$ – матриця або $KP(I)$, де $I=\overline{A}$.

Будемо говорити, що функція $f(n)$ поліноміального росту $(f(n)=$ $=poly(n))$, якщо для деякої константи c (що не залежить від n) при досить великих n виконується $f(n)\le n^c$. Будемо вважати, що елементи матриці $\overline{A}$ з $KP(\overline{A})$ є $poly(m\cdot n)$.

Зміна параметрів задач. Для проведення аналізу стійкості будемо змінювати на один елемент матриці $\overline{A}=(A,b)$. У зв'язку з цим дамо означення.

Означення 1. Задачу $GenSet(\overline{A}')$ ($KP(\overline{A}')$) з $\overline{A}'$ таку, що $\rho(\overline{A}',\overline{A})=1$ будемо називати узагальнено близькою до задачі $GenSet(\overline{A})$ ($KP(\overline{A})$). При цьому узагальнено близькими будуть екземпляри $I=\overline{A}$ та $I'=\overline{A}'$.

Позначимо $\mathrm{Re}opt(GenSet(\overline{A}'))$ ($\mathrm{Re}opt(KP(\overline{A}'))$) проблему знаходження оптимального розв'язку відповідно задачі $GenSet(\overline{A}')$ ($KP(\overline{A}')$) узагальнено близької до $GenSet(\overline{A})$ ($KP(\overline{A})$), використовуючи оптимальний розв'язок x^* задачі $GenSet(\overline{A})$ ($KP(\overline{A})$).

Аналіз стійкості узагальнено близьких задач про покриття. Будемо користуватись такими результатами.

Лема 1 [3]. Нехай $\Pi-NP$-складна проблема і mod-Π – деяка локальна модифікація для Π. Якщо існує поліноміальний алгоритм A, який для довільного екземпляра I проблеми Π обчислює: 1) екземпляр I' для Π; 2) оптимальний розв'язок x' для I'; 3) послідовність локальних модифікацій типу mod-Π (не більше, ніж поліноміальну), яка перетворює I' в I, то проблема mod-Π є NP-складною.

Лема 2. Існує поліноміальний алгоритм, який містить не більше $\frac{c_{\max}}{c_{\min}} \cdot n$ кроків, для визначення допустимого розв'язку задачі (2) $\left(c_{\max} = \max_i \{c_i\};\ c_{\min} = \min_i \{c_i\}\right)$.

Доведення повністю аналогічне доведенню леми 1 з [4].

Позначимо $M = \{1,...,m\}$, $N = \{1,...,n\}$, $K_1 = \{i_1,...,i_k\}$ – деяка вибірка з N обсягом $k(1 \le k < n; k < m; m \le n)$. Точка $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in B^n = \{0,1\}^n$, така, що $\alpha_j = 1$ при $j \in K_1$, $\alpha_j = 0$ при $j \in N \setminus K_1$. Нехай $b^* = \max_i \{b_i\}$. Позначимо:

1) α^{1,K_1} – рядок 1 матриці A, такий, що серед елементів $K_1 = \{i_1, i_{2,...,} i_k\}$ (як стовпчиків) є рівно b_1 одиниць (решта елементів рівні 0);

2) α^{2,K_1} – рядок 2 матриці A, такий, що серед елементів $K_1 = \{i_1, i_{2,...,} i_k\}$ (як стовпчиків) є рівно b_2 одиниць (решта елементів рівні 0) і т. д.;

k) α^{k,K_1} – рядок k матриці A, такий, що серед елементів $K_1 = \{i_1, i_{2,...,} i_k\}$ (як стовпчиків) є рівно b_k одиниць (решта елементів рівні 0).

Опишемо клас $\{A_\alpha\}$ булевих $m \times n$-матриць $A = \{a_{ij}\}$. $A \in \{A_\alpha\}$ тоді і тільки тоді, коли матриця A не містить однакових і нульових рядків і, крім цього, виконуються умови:

1) у матриці A є підматриця $A^1 = \begin{pmatrix} \alpha^{1,K_1} \\ ... \\ \alpha^{k,K_1} \end{pmatrix}$;

2) у матриці A є підматриця $A^2 = \{a_{ij}\}(i \in M \setminus K_1, j \in N)$, така, що для довільного $i \in M \setminus K_1 \sum_{j \in K_1} a_{ij} \ge b^*$, інші елементи у A^2 – довільні.

Вектор b, що відповідає $A \in \{A_\alpha\}$ позначимо $\bar{b}$.

Нехай $x^* = (x_1^*,..., x_n^*) \in B^n$, такий, що $x_{i_1}^* = ... = x_{i_k}^* = 1$, решта координат вектора x^* дорівнює 0, $A^* \in \{A_\alpha\}$.

Лема 3. x^* – оптимальний розв'язок екземпляра $I = (A^*, \bar{b})$ задачі (1).

Доведення випливає з того факту, що x^* – єдиний допустимий розв'язок екземпляра I задачі, такий, що не існує допустимого розв'язку x' задачі (1), такого, що $x' \le x^* (x'_i \le x_i^*, i = 1,...,n), x' \ne x^*$, а, отже, він і буде оптимальним.

Теорема 1. Проблема $\mathrm{Re}\,opt(GenSet(\bar{A}'))$ є NP-складною.

Доведення. Скористаємось лемою 1. Як П візьмемо задачу (2) (тобто $GenSet(I)$, де $I = \bar{A}$). В силу побудови $A^* \in \{A_\alpha\}$, вектора x^*, а також, застосовуючи леми 2 і 3, отримаємо виконання пп. 1) і 2) леми 1. Покажемо виконання п. 3) леми 1. Нехай для довільної $m \times (n+1)$ – матриці $\bar{A}$, $T(\bar{A})$ – перетворення матриці $\bar{A}$ з заміною довільного одного елемента A 0 на 1, або 1 на 0; збільшенням або зменшенням вектора b на 1 в одній позиції. Будемо писати, що $\bar{A}' = T(\bar{A})$, якщо після застосування до $\bar{A}$ перетворення T отрималася матриця $\bar{A}'$ (ясно, що $\rho(\bar{A}, \bar{A}') = 1$). Довільну матрицю $\bar{A} = (A, b)$ можна отримати з матриці $\bar{A}^* = (A^*, \bar{b})$, застосовуючи не більше, ніж $m \cdot (n+1)$ перетворень T:

$$\bar{A}^* \xrightarrow{T} \bar{A}_1 \xrightarrow{T} \bar{A}_2 \xrightarrow{T} ... \xrightarrow{T} \bar{A}_k = \bar{A},$$

$$\bar{A}_1 = T(\bar{A}^*), \rho(\bar{A}_1, \bar{A}^*) = 1, \ \bar{A}_{i+1} = T(\bar{A}_i), \rho(\bar{A}_{i+1}, \bar{A}_i) = 1, i = 1,...,k-1;$$
$$k \le m \cdot (n+1).$$

Візьмемо як mod-П перетворення T, отримаємо п. 3) леми 1 і доведення теореми 1.

Аналіз стійкості узагальнено близьких задач про багатовимірний булевий рюкзак. Будемо користуватись такими результатами.

Лема 4. Існує поліноміальний алгоритм, який містить не більше $\frac{c_{\max}}{c_{\min}} \cdot n$ кроків, для визначення допустимого розв'язку задачі (3) ($c_{\max} = \max_i \{c_i\}$; $c_{\min} = \min_i \{c_i\}$).

Доведення повністю аналогічне доведенню леми 1' з [4].

Нехай $N = \{1, 2, ..., n\}, K_1 = \{i_1, ..., i_k\}$ – деяка вибірка з N обсягом $k (1 \le k \le n)$, $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in B^n$, такий, що $x_{i_1}^* = ... = x_{i_k}^* = 1$, решта координат вектора x^* дорівнюють 0. Розглянемо екземпляр задачі (3) $KP(\bar{A}^*)$, де $\bar{A}^* = (A^*, b^*) - m \times (n+1)$-матриця, $A^* = \{a_{ij}^*\}, b^* = \{b_i^*\} (i = 1,...,m; \ j = 1,...,n)$, причому

$a_{ij}^* = 1 (i = 1,...,m; \ j \in K_1)$ $a_{ij}^* = k + 1 (i = 1,...,m; \ j \in N \setminus K_1)$ $b_i^* = k (i = 1,...,m)$.

Лема 5. x^* – оптимальний розв'язок екземпляра $I = (A^*, b^*)$ задачі (3).

Доведення випливає з того факту, що x^* – єдиний допустимий розв'язок екземпляра I задачі, такий, що не існує допустимого розв'язку x' задачі (3), такого, що $x' \geq x^* (x'_i \geq x^*_i, i = 1,...,n), x' \neq x^*$, а, отже, він і буде оптимальним.

Теорема 2. Проблема $\mathrm{Re}opt(KP(\overline{A}'))$ є NP-складною.

Доведення. Скористаємось лемою 1. Як Π візьмемо задачу (3) (тобто $KP(I)$, де $I = \overline{A}$). В силу побудови A^*, b^*, вектора x^*, а також, застосовуючи леми 4 і 5, отримаємо виконання пп. 1) і 2) леми 1. Покажемо виконання п. 3) леми 1. Нехай для довільної $m \times (n+1)$ – матриці $\overline{A}$, $T(\overline{A})$ – перетворення матриці $\overline{A}$ із збільшенням або зменшенням матриці A, або вектора b на 1 в одній позиції. Будемо писати, що $\overline{A}' = T(\overline{A})$, якщо після застосування до $\overline{A}$ перетворення T вийшла матриця $\overline{A}'$ (ясно, що $\rho(\overline{A}, \overline{A}') = 1$). Довільну матрицю $\overline{A} = (A, b)$ можна отримати з матриці $\overline{A}^* = (A^*, b^*)$, застосовуючи не більше, ніж $poly(m \cdot n)$ перетворень T:

$$\overline{A}^* \xrightarrow{T} \overline{A}_1 \xrightarrow{T} \overline{A}_2 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \overline{A}_k = \overline{A},$$

$$\overline{A}_1 = T(\overline{A}^*), \rho(\overline{A}_1, \overline{A}^*) = 1, \ \overline{A}_{i+1} = T(\overline{A}_i), \rho(\overline{A}_{i+1}, \overline{A}_i) = 1, i = 1,...,k-1;$$
$$k \leq poly(m \cdot n).$$

Візьмемо як mod-Π перетворення T, отримаємо п. 3) леми 1 і доведення теореми 2.

Теорема 2 – узагальнення результату з [5].

Заключення. В роботі отримано наступний результат. Показано, що проблема знаходження оптимального розв'язку узагальнено близьких задач про покриття множинами та про багатовимірний булевий рюкзак є NP-складними, якщо виходити з оптимального розв'язку вихідної задачі. Таким чином, перевірка (у найгіршому випадку), що оптимальний розв'язок розглянутих класів задач залишиться без змін є також NP-складною. Це означає, що при $P \neq NP$ для таких класів задач не існує поліноміальних алгоритмів аналізу стійкості.

Н.В. Лищук

СЛОЖНОСТЬ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Показано, что проблемы анализа устойчивости обобщенно близких задач о покрытии множествами и задач о многомерном булевом ранце являются *NP*-трудными. Это означает, что при несовпадении классов *P* и *NP* в наихудшем случае не существует соответствующих полиномиальных алгоритмов анализа сложности устойчивости рассмотренных классов обобщенно близких задач (отличаются одним элементом в матрицах ограничений либо в правых частях).

N.V. Lishchuk

COMPLEXITY OF SENSITIVITY ANALYSIS FOR DISCRETE PROGRAMMING PROBLEMS WITH BOOLEAN VARIABLES

It is shown that the problems of sensitivity analysis for the generalized adjacent set covering problems and multivariate boolean knapsack problems are *NP*-hard. This implies that when the classes *P* and *NP* are mismatched, in worst case, the corresponding polynomial algorithms of sensitivity analysis for the classes of generally similar problems (differing in one element of matrices of constraints or in right hand sides) do not exist.

1. *Fernandez-Baca D., Benkatachalam B.* Sensitivity analysis in combinatorial optimization // Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics (ed. T. Guzalez). – Chapman&Hall/CRC Computer and Information Science Series. – 2007. – P. 30-1 – 30-29.
2. *Van Hoesel S*., *A. Wagelmans* On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs // Discrete Applied Mathematics. – 1999. **– 91. –** P. 251 – 263.
3. *Михайлюк В.О.*, *Ляшко В.І.* Реоптимізація задачі про покриття множинами: асимптотичний поріг відношення апроксимації // Наукові записки НаУКМА. Комп’ютерні науки. – 2012. – Т. 138. – С. 95 – 99.
4. *Михайлюк В.А.* Общий подход к оценке сложности постоптимального анализа дискретных задач оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – 46, № 2. – С. 134 – 141.
5. *Михайлюк В.А., Лищук Н.В.*Анализ устойчивости задачи о ранце: один отрицательный результат // Там же. – 2013. – 49, № 2. – С. 48 – 51.

Одержано 05.11.2014

Про автора:

Ліщук Наталія Вікторівна,

аспірантка Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки.
E-mail: lnatalkav@mail.ru