КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.86

М.М. МАЛЯР, В.В. ПОЛІЩУК, М.М. ШАРКАДІ

ВИКОРИСТАННЯ ДИНАМІЧНИХ КРИТЕРІЇВ У МОДЕЛЯХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ВИБОРУ

Розглядається новий підхід до задачі багатокритеріального вибору альтернатив, який базується на використанні динамічних критеріїв ефективності, враховуючи їх тенденцію та темп зростання. Суть даного підходу полягає у тому, що якщо існують критерії ефективності для яких значення оцінок альтернатив відомі за деякі попередні періоди, то можливо спрогнозувати їх оцінки на подальші періоди. Таким чином, при прийнятті рішення є можливість врахувати передбачувану поведінку.

Вступ. В основі людської діяльності лежить задача прийняття рішень. Під прийняттям рішення, зазвичай, розуміють вибір найбільш привабливого рішення із множини допустимих рішень або деяке упорядкування цієї множини. Чи це просте рішення, або складно-організований багатоетапний процес, рішення є актом вибору на множині можливих (допустимих) варіантів (альтернатив). Необхідність проведення вибору обумовлюється виникненням проблемної ситуації, в якій є дві складові – дійсне і бажане, причому існує більше одного варіанта досягнення бажаного результату. В такій ситуації, наявна деяка «свобода вибору», яка залежить від осіб, що приймають рішення (ОПР). У роботі запропоновано підхід, коли вводяться в розгляд динамічні критерії, на основі яких будується новий ранжувальний ряд, із застосуванням прогнозованих значень та їх темпів зростання.

Математична модель. Розглянемо задачу вибору, яку опишемо за допомогою наступної математичної моделі. Множину альтернатив позначимо *X* і припустимо, що вона скінченна, тобто допустимі альтернативи можна перерахувати $X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$.

Позначимо $K = \{K_1, K_2, ..., K_m\}$ множину критеріїв ефективності, за допомогою яких проводиться оцінка кожної альтернативи із множини *X*. Задачу вибору можна сформулювати наступним чином: вибрати найкращу альтернативу із множини *X*, коли відомі на цій множині оцінки критеріїв.

Модель задачі може бути приведена у вигляді табл. 1.

ТАБЛИЦЯ 1. Оцінки за критеріями

Альтернатива / Критерій	x_1	x_2	…	x_p
K_1	O_{11}	O_{12}	…	O_{1p}
K_2 ⋮	O_{21}	O_{22}	…	O_{2p}
K_m	O_{m1}	O_{m2}	…	O_{mp}

або матриці рішень:

$$O = (O_{ij}),\ i = 1,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ \ldots,\ p, \tag{1}$$

де O_{ij} – це оцінка j-ї альтернативи за i-м критерієм.

Побудуємо ранжувальний ряд з альтернатив $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$, використовуючи динамічні критерії, які дозволять спрогнозувати поведінку альтернативних рішень у майбутньому. Розглянемо множину критеріїв $\{K_1, K_2, ..., K_h\} \subseteq K$ за допомогою яких можна прослідкувати динаміку за l періодів. Значення критеріїв за всіма періодами приведемо у вигляді табл. 2, окремо для кожної альтернативи ($i = 1, 2, ..., p$), де ε_l – періоди.

ТАБЛИЦЯ 2. Оцінки за динамічними критеріями

x_i	ε_1	ε_2	…	ε_l
K_1	Q_{11}^i	Q_{12}^i	…	Q_{1l}^i
K_2 ⋮	Q_{21}^i	Q_{22}^i	…	Q_{2l}^i
K_h	Q_{k1}^i	Q_{k2}^i	…	Q_{kl}^i

Спрогнозуємо оцінки Q_{hl}^i за всіма критеріями для періодів $s = l + 1$, $s = l + 2$, $s = l + 3$ на основі парної лінійної регресії [1]:

$$Y(s) = a + bs, \tag{2}$$

де значення коефіцієнтів a, b будемо обчислювати методом найменших квадратів.

У такому випадку необхідно побудувати $h \cdot p$ рівнянь, для кожної альтернативи за кожним критерієм. Після цього, на основі даних рівнянь, побудуємо матрицю рішень, наприклад, для періодів $l + 1$, $l + 2$, $l + 3$ за кожною альтернативою. Таким чином рівняння лінійної регресії перепишеться у вигляді:

$$Y_g^i(s) = a_g^i + b_g^i s, \quad i = \overline{1, p}, \quad g = \overline{1, h}. \tag{3}$$

Коефіцієнти b_g^i, a_g^i обчислюються згідно формул [2]:

$$b_g^i = \frac{l \cdot \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k \cdot Q_{gk}^i - \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k \cdot \sum_{k=1}^{l} Q_{gk}^i}{l \cdot \sum_{k=1}^{l} {\varepsilon_k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k \right)^2}, \tag{4}$$

$$a_g^i = \overline{d_g^i} - b_g^i \cdot \overline{q}, \tag{5}$$

де $\overline{d_g^i} = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} Q_{gk}^i$, $\overline{q} = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k$, $i = \overline{1, p}$, $g = \overline{1, h}$.

Після виведення регресійних рівнянь, запишемо вектори утворених критеріальних оцінок для періодів $s = l+1$, $s = l+2$, $s = l+3$ за кожною альтернативою, у вигляді табл. 3.

ТАБЛИЦЯ 3. Прогнозовані оцінки на три майбутні періоди

x_i	$l+1$	$l+2$	$l+3$
K_1	$Y_1^i(l+1)$	$Y_1^i(l+2)$	$Y_1^i(l+3)$
K_2 $\vdots$	$Y_2^i(l+1)$	$Y_2^i(l+2)$	$Y_2^i(l+3)$
K_h	$Y_h^i(l+1)$	$Y_h^i(l+2)$	$Y_h^i(l+3)$

Попередню таблицю можемо представити у вигляді наступної матриці:

$$L_i = \left(Y_g^i(l+k) \right), \ i = \overline{1, p}; \ g = \overline{1, h}; \ k = \{1, 2, 3\}. \tag{6}$$

Далі, щоб перейти до агрегованої однієї матриці рішень побудуємо наступну математичну модель. Схематично її покажемо у вигляді рисунка.

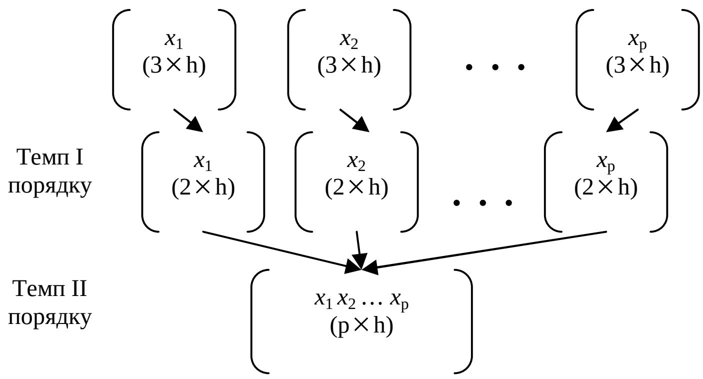

РИСУНОК. Схема моделі агрегування матриць альтернатив за динамічними критеріями

Для кожної матриці альтернатив, розмірності $(3\times h)$, за прогнозованими оцінками критеріїв знаходимо темп рівня зростання критеріальних оцінок за наступними формулами [3]:

$$T_g^i(1)=\frac{Y_g^i(l+2)}{Y_g^i(l+1)}, \tag{7}$$

$$T_g^i(2)=\frac{Y_g^i(l+3)}{Y_g^i(l+2)}, \tag{8}$$

де $i=\overline{1,p},\quad g=\overline{1,h}.$

В результаті отримаємо матриці розмірності $(2\times h)$ темпів за всіма альтернативами:

$$T_i=\left(T_g^i(\alpha)\right),\ i=\overline{1,p};\ g=\overline{1,h};\ \alpha=\{1,2\}. \tag{9}$$

Дані матриці запишемо у вигляді табл. 4.

ТАБЛИЦЯ 4. Оцінки темпів зростання

x_i	$T(1)$	$T(2)$
K_1	$T_1^i(1)$	$T_1^i(2)$
K_2 $\vdots$	$T_2^i(1)$	$T_2^i(2)$
K_h	$T_h^i(1)$	$T_h^i(2)$

Побудована, таким чином, таблиця буде показувати на скільки рівень одного періоду збільшився щодо рівня іншого, тобто показники матриці будуть характеризувати відносну величину приросту. Далі, для отриманих матриць (9) шукаємо «темп другого порядку» (прискорення), як темп середнього зростання, за наступною формулою [3]:

$$A_g^i=\sqrt{T_g^i(1)\cdot T_g^i(2)}, \tag{10}$$

де $i=\overline{1,p},\quad g=\overline{1,h}.$

В результаті отримаємо вектори оцінок альтернатив за критеріями, значення яких будуть характеризувати середню швидкість зміни оцінок на прогнозовані три наступні періоди. Дані вектори представимо у вигляді табл. 5.

ТАБЛИЦЯ 5. Агреговані оцінки темпів зростання другого порядку

Критерій \ Альтернатива	x_1	x_2	…	x_p
K_1	A_1^1	A_1^2	…	A_1^p
K_2 ⋮	A_2^1	A_2^2	…	A_2^p
K_h	A_h^1	A_h^2	…	A_h^p

або у вигляді матриці рішень:

$$A = \left(A_g^i\right),\ i = \overline{1, p};\ g = \overline{1, h}. \tag{11}$$

Дана матриця характеризує агреговані прогнозовані оцінки альтернатив за динамічними критеріями на наступні три періоди, представлені у вигляді їх рівня зростання. Таким чином, ми перейшли до однієї агрегованої матриці рішень.

Розв'яжемо задачу багатокритеріального вибору описану у вигляді матриці рішень (11), використовуючи підхід описаний в [4, 5], який базується на теорії обмеженої раціональності з використанням нечітких множин.

Введемо в розгляд «точку задоволення» [4, 5] $T = \left(t_1, t_2, ..., t_h\right)$, тобто уявну альтернативу, в якої оцінки за всіма критеріями могли б задовольняти ОПР. «Точка задоволення» буде містити інформацію про те, який рівень приросту того чи іншого критерію задовольняв би ОПР.

Оскільки, нам відома матриця рішень (11) і задана «точка задоволення» T, визначимо множину нечітких величин з наступною функцією належності:

$$z_{gi} = 1 - \frac{\left|t_g - A_g^i\right|}{\max\{t_g - \min\limits_i A_g^i;\ \max\limits_i A_g^i - t_g\}}, \qquad g = \overline{1, h}; \quad i = \overline{1, p}. \tag{12}$$

Кожна така нечітка величина є відносною оцінкою близькості елемента матриці (11) до відповідного елемента «точки задоволення». Визначена таким чином матриця $Z = \{\, z_{gi} \,\}$ характеризує по стовпцях відносні оцінки близькості альтернатив до «точки задоволення» за кожним конкретним критерієм, і знімає питання різних шкал оцінювання.

Наступним кроком є побудова деякої згортки нечітких числових оцінок. Нехай ОПР відомі або вона може задати вагові коефіцієнти кожному критерію ефективності $\{p_1, p_2, \ldots, p_h\}$ із інтервалу [1, a]. Тоді можна визначити нормовані вагові коефіцієнти для кожного критерію:

$$\alpha_g = \frac{p_g}{\sum\limits_{g=1}^{h} p_g}, \quad g = \overline{1, h};\ \alpha_g \in [0,1]; \qquad \sum_{g=1}^{h} \alpha_g = 1. \tag{13}$$

Далі, використаємо одну із згорток для побудови агрегованої оцінки [6]. Наприклад, візьмемо середньо зважену згортку:

$$A(x_i) = \sum_{g=1}^{h} \alpha_g z_{gi}, i = \overline{1, p}. \quad (14)$$

На основі значень величин $A(x_i)$ будуємо ранжувальний ряд альтернатив у порядку їх спадання:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_p\}. \quad (15)$$

Таким чином, ми привели методику, за допомогою якої можна будувати ранжувальний ряд альтернатив, на основі динамічних критеріїв ефективності по прогнозованих їх значеннях на майбутні періоди.

Приклад застосування математичної моделі. Даний підхід розглянемо на прикладі вибору підприємства для надання кредиту. Нехай у банк поступило три заявки від підприємств. Підприємства будемо розглядати як альтернативи, серед яких ОПР має обрати одне для видачі кредиту. Оцінимо підприємства x_1, x_2, x_3 і проранжуємо їх на основі наступних динамічних критеріїв ефективності [7] за період 2010 – 2013 рр. (табл. 6).

ТАБЛИЦЯ 6. Інформація про критерії

Критерій	Назва критерію	Вага (p)	Точка задоволення (Т)
K_1	Коефіцієнт поточної ліквідності	8	1,10
K_2	Коефіцієнт загальної ліквідності	9	1,05
K_3	Коефіцієнт фінансової незалежності	7	1,10
K_4	Рентабельність виробництва	10	1,00

Спочатку, на основі фінансової звітності обчислюємо значення критеріїв ефективності по кожному підприємству. Результат запишемо у табл. 7.

ТАБЛИЦЯ 7. Оцінки за критеріями для підприємств – x_1, x_2, x_3

Кри-терій	Підприємство x_1				Підприємство x_2				Підприємство x_3			
	2010	2011	2012	2013	2010	2011	2012	2013	2010	2011	2012	2013
K_1	0,4	1,1	0,6	0,7	0,3	1,2	1,3	0,9	0,5	0,1	0,6	0,7
K_2	0,8	1	1,2	1,3	0,8	0,9	1,2	1	1,4	1	1,6	1,3
K_3	0,9	2,9	4,1	1,8	0,5	0,9	2,1	1,1	1,9	3,0	3,2	1,9
K_4	0,06	0,09	0,12	0,07	0,06	0,07	0,06	0,05	0,1	0,04	0,05	0,06

На другому етапі, на основі цих даних побудуємо регресійні рівняння для кожної альтернативи за кожним критерієм.

Побудуємо спочатку регресійне рівняння для альтернативи x_1 за критерієм K_1. Використовуючи формули (4) і (5) обчислимо коефіцієнти $b_1^1,\ a_1^1$:

$$b_1^1 = \frac{4\cdot 5632,4 - 8046\cdot 2,8}{4\cdot 16184534 - 8046\cdot 8046} = 0,04, \quad a_1^1 = \frac{1}{4}\cdot 2,8 - 0,04\cdot\frac{1}{4}\cdot 8046 = -79,76.$$

Тоді, рівняння лінійної регресії (3) буде мати вигляд:

$$Y_1^1(s) = -79,76 + 0,04\cdot s.$$

Прогнозоване значення критерію поточної ліквідності K_1 на 2014, 2015, 2016 роки по першій альтернативі наступні:

$$Y_1^1(2014) = -79,76 + 0,04\cdot 2014 = 0,8;$$
$$Y_1^1(2015) = -79,76 + 0,04\cdot 2015 = 0,84;$$
$$Y_1^1(2016) = -79,76 + 0,04\cdot 2016 = 0,88.$$

Аналогічно будуємо решту 11 регресійних рівнянь і обчислюємо прогнозовані значення. Результати прогнозованих значень на періоди 2014, 2015, 2016 роки запишемо у табл. 8.

ТАБЛИЦЯ 8. Прогнозовані оцінки для підприємств – x_1, x_2, x_3

Критерій	Підприємство x_1			Підприємство x_2			Підприємство x_3		
	2014	2015	2016	2014	2015	2016	2014	2015	2016
K_1	0,8	0,84	0,88	1,4	1,59	1,78	0,75	0,86	0,97
K_2	1,5	1,67	1,84	1,2	1,29	1,38	1,4	1,43	1,46
K_3	3,4	3,79	4,18	1,9	2,2	2,5	2,55	2,57	2,59
K_4	0,11	0,12	0,13	0,06	0,06	0,06	0,038	0,027	0,018

Для кожної альтернативи за прогнозованими оцінками критеріїв знаходимо темп зростання, за формулами (7) і (8), результат запишемо у зведену табл. 9.

ТАБЛИЦЯ 9. Оцінки темпу першого порядку

Критерій	x_1		x_2		x_3	
K_1	1,050	1,048	1,136	1,119	1,147	1,128
K_2	1,113	1,102	1,075	1,070	1,021	1,021
K_3	1,115	1,103	1,158	1,136	1,008	1,008
K_4	1,091	1,083	1,000	1,000	0,711	0,667

Далі, для отриманих темпів першого порядку для всіх альтернатив шукаємо темп другого порядку (прискорення) за формулою (10), результат запишемо в агреговану табл. 10.

ТАБЛИЦЯ 10. Оцінки темпів другого порядку

Критерій	x_1	x_2	x_3
K_1	1,049	1,128	1,137
K_2	1,108	1,072	1,021
K_3	1,109	1,147	1,008
K_4	1,087	1,000	0,688

Використовуючи формулу (12) обчислюємо значення матриці $Z = \{ z_{gi} \}$:

$$Z = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,46 & 0,27 \\ 0,00 & 0,61 & 0,50 \\ 0,90 & 0,49 & 0,00 \\ 0,72 & 1,00 & 0,00 \end{pmatrix}$$

і на основі формули (13) обчислимо нормовані вагові коефіцієнти: $\alpha = (0,24; \quad 0,26; \quad 0,21; \quad 0,29)$.

На останньому етапі обчислимо агреговані оцінки за формулою (14) $A = (0,4; \quad 0,67; \quad 0,2)$. Альтернативи упорядковуємо за спаданням значень агрегованих оцінок: $\{x_2, x_1, x_3\}$.

Висновки. У роботі запропоновано підхід до розв'язання задачі багатокритеріального вибору альтернатив, коли серед множини критеріїв ефективності є критерії для яких існують їх динамічні спостереження. Як приклад, застосування даної моделі, показано на економічній задачі вибору підприємства для надання банком кредиту.

Н.Н. Маляр, В.В. Полищук, М.Н. Шаркади

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ В МОДЕЛЯХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

Рассматривается новый подход к задаче многокритериального выбора альтернатив, основанный на использовании динамических критериев эффективности, учитывая их тенденцию и темп роста. Суть данного подхода заключается в том, что если существуют критерии эффективности для которых значение оценок альтернатив известны за некоторые предыдущие периоды, то возможно спрогнозировать их оценки на последующие периоды. Таким образом, при принятии решения является возможность учесть предсказуемое поведение.

N. Malyar, V. Polishchuk, M. Sharkadi

USING DYNAMIC CRITERIA IN THE MODELS OF MULTICRITERIA CHOICE

The paper proposes a new approach to the problem of multi-choice alternatives, based on the use of dynamic performance criteria, given their tendency and rate of growth. The essence of this approach is that if there are performance criteria, for which the values of estimates of alternatives are known for certain prior periods, then it is possible to predict their scores thereafter. Thus, when making a decision, an opportunity to consider an expected behavior appears.

1. *Снитюк В.Є.* Прогнозування. Моделі. Методи. Алгоритми: навч. посіб. / В.Є. Снитюк // К. : Маклаут, 2008. – 364 с.
2. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. – М.: Финансы и статистика, 1987 – 1988. – Т. 1. – 366 с.; Т. 2. – 351 с.
3. *Присенко Г.В., Равікович Є.І.* Прогнозування соціально-економічних процесів: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2005. – 378 с.
4. *Маляр М.М.* Описання задач вибору на мові розмитих множин // Вісник Київського університету. Вип.4: серія: фіз.-мат. науки. – К.; 2005. – С. 197 – 201.
5. *Маляр Н.Н.* Нечеткая модель удовлетворительного решения задачи выбора // Information Models of Knowledge. – ITHEA. – Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria, 2010. – С. 220 – 225.
6. *Методика* и техника статистической обработки первичной социологической информации. Под. ред. Г.В. Осипова. – М.: Наука, 1968. – 326 с.
7. *Маляр М.М.* Нечітка модель оцінки фінансової кредитоспроможності підприємств / Маляр М.М., Поліщук В.В. // Східно-Європейський журнал передових технологій. Сер. Математика і кібернетика – фундаментальні і прикладні аспекти. – Харків, 2012. – № 3/4(57). – С. 8 – 16.

Одержано 04.07.2014

Про авторів:

Маляр Микола Миколайович,
кандидат технічних наук, доцент,
докторант Київського національного університету ім. Т. Шевченка,
E-mail: malyarmm@gmail.com

Поліщук Володимир Володимирович,
асистент кафедри інформаційних управляючих систем і технологій
Ужгородського національного університету,
E-mail: v.polishchuk87@gmail.com

Шаркаді Маріанна Миколаївна,
кандидат економічних наук, викладач кафедри кібернетики і прикладної математики
Ужгородського національного університету.
E-mail: marjancuk@mail.ru