КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Системный анализ

УДК 519.854

Н.А. ДРЕЙЧАН

РЕОПТИМІЗАЦІЯ 2-КРИТЕРІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПРО МІНІМАЛЬНЕ ВЕРШИННЕ ПОКРИТТЯ ГРАФА

Вивчається ефект додавання множини з $h = O(\log n)$ вершин з деякими інцидентними ребрами до довільного екземпляра 2-критеріальної задачі про мінімальне вершинне покриття на оптимальний розв'язок. Така реоптимізаційна версія 2-критеріальної задачі про мінімальне вершинне покриття задовольняє апроксимаційним поняттям $W^{\frac{3}{2}} - O$ та $D^{(3,3)} - O$ (початковий варіант – поняттям $W^2 - O$ і $D^{(4,4)} - O$), тобто є деякий виграш як наближення.

Вступ. Елементи багатокритеріальної оптимізації виникають при дослідженні багатьох технічних, економічних, природних і соціально-наукових процесів. Наприклад, у логістиці зацікавлені в маршрутах з одночасною мінімізацією транспортних витрат і часу транспортування. Не існує єдиного розв'язку, який є оптимальним для обох цілей, так як вони є суперечливими. Треба враховувати компроміси між обома завданнями, тобто деякі маршрути будуть дешевими, інші – швидкими. Множина Парето описує поняття оптимальності в цьому випадку. Вона складається з усіх розв'язків, які оптимальні в тому сенсі, що не існує розв'язку, який строго кращий. Для осіб, що приймають рішення множина Парето дуже корисна, оскільки враховує компроміси між оптимальними розв'язками для поточного екземпляра. Ми будемо мати справу з комбінаторною багатокритеріальною оптимізацією [1].

Концепція реоптимізації [2 – 7] полягає у наступному. Нехай Q – деяка NP-складна (можливо NP-повна) задача, I – початковий екземпляр задачі Q, оптимальний розв'язок якого відомий. Ми пропонуємо новий екземпляр I' задачі Q, отриманий деякими «незначними» змінами I.

Виникає питання: як ми можемо ефективно використовувати знання про оптимальний розв'язок I для знаходження точного або наближеного розв'язку екземпляра I'? Мета реоптимізації при використанні наближених методів – застосування знань про розв'язок початкового екземпляра I для досягнення кращої якості наближення (відношення апроксимації), або більш ефективного (за часом) алгоритму для визначення оптимальних або близьких до них розв'язків, або виконання першого і другого пунктів.

Є дуже мало результатів з реоптимізації комбінаторних багатокритеріальних задач. Один з підходів є так звана бюджетна реоптимізація [8, 9], коли бюджетні обмеження додаються до основної задачі, а потім досліджуються впливи на оптимальний розв'язок.

У цих тезах вивчається ефект додавання деякої кількості вершини з деякими інцидентними їм ребрами до довільного екземпляра 2-критеріальної задачі про мінімальне вершинне покриття на оптимальний розв'язок.

Будемо використовувати поняття роботи [1].

Поняття багатокритеріального розв'язку і багатокритеріальної NP-складності. Нехай $k \geq 1$. Комбінаторна k -критеріальна оптимізаційна задача (k -критеріальна задача, коротко) є кортежем $(S, f, \leftarrow)$, де

1. $S: N \to 2^N$ відображає екземпляр $x \in N$ на множину допустимих розв'язків екземпляра, позначених як $S^x \subseteq N$. Має існувати деякий поліном p, такий, що для довільного $x \in N$ і кожного $s \in S^x$ випливає $|s| \leq p(|x|)$ і множина $\{(x,s): x \in N, s \in S^x\}$ має бути поліноміально розв'язною.

2. $f: \{(x,s): x \in N, s \in S^x\} \to N^k$ відображає екземпляр $x \in N$ і розв'язок $s \in S^x$ до його значення $f^x(s) \in N^k$. f має бути поліноміально обчислювальною.

3. $\leftarrow \subseteq N^k \times N^k$ – відношення часткового порядку, що визначає напрямок оптимізації. Має виконуватись $(a_1,...,a_k) \leftarrow (b_1,...,b_k) \Leftrightarrow a_1 \leftarrow_1 b_1 \wedge \cdots_k \leftarrow_k b_k$, де $\leftarrow_i$ є $\leq$, якщо ціль i -го критерію полягає у мінімізації і $\leftarrow_i$ є $\geq$, якщо ціль i -го критерію полягає у максимізації.

Для екземплярів і розв'язків дозволимо інші об'єкти (наприклад, графи), де передбачається зручне кодування, можливо, встановивши $S^x = \varnothing$, якщо x недопустимий код. Ми пишемо $\leq$ і $\geq$ також для багатовимірних варіантів, тобто використовується як частковий порядок $\leq$, де $\leftarrow_i = \leq$ для всіх i.

N^k -вершинно-помічений (відповідно N^k -реберно-помічений) граф є трійка $G = (V, E, l)$, така, що (V, E) представляє собою граф, і $l: V \to N^k$ (відповідно, $l: E \to N^k$) є загальна функція.

Верхній індекс x у f і S може бути опущений, якщо це ясно з контексту. Проекція f^x на i -у компоненту позначається як f_i^x, де $f_i^x(s) = v_i$, якщо $f^x(s) = (v_1,...,v_k)$. Крім того, відношення порядку $\leftarrow$ визначається як

$\leftarrow_1,...,\leftarrow_k$ також записується у вигляді $(\leftarrow_1,...,\leftarrow_k)$. Якщо $a \leftarrow b$ ми говоримо, що a слабо домінує b (тобто, a за меншою мірою, так само добре, як b). Якщо $a \leftarrow b$ і $a \neq b$ ми говоримо, що a домінує b. Зверніть увагу, що $\leftarrow$ завжди вказує у напрямку кращого значення. Якщо f і x зрозуміло з контексту, то ми поширюємо $\leftarrow$ на комбінації значень і розв'язків. Таким чином, ми можемо говорити про слабке домінування між розв'язками і писати $s \leftarrow t,$ якщо $f^x(s) \leftarrow f^x(t),$ $s \leftarrow c,$ якщо $f^x(s) \leftarrow c,$ і так далі, де $s,t \in S^x$ і $c \in N^k$.

Для наближення треба послабити поняття домінування на коефіцієнт α. Для будь-якого дійсного $a \geq 1$ визначимо $u \overset{a}{\leq} v \Leftrightarrow u \leq a \cdot v$ і $u \overset{a}{\geq} v \Leftrightarrow a \cdot u \geq v$. Фіксуємо $\leftarrow = (\leftarrow_1, ..., \leftarrow_k),$ де $\leftarrow_i \in \{\leq, \geq\}$ нехай $p = (p_1,...p_k),$ $q = (q_1,...,q_k) \in N^k$ і $\sim = (a_1,...,a_k) \in R^k$, де $a_1,...,a_k \geq 1$. Будемо говорити, що p слабо α*-домінує* $q, p \overset{\sim}{\leftarrow} q$ скорочено, якщо $p_i \overset{\alpha_i}{\leftarrow_i} q_i,$ для $1 \leq i \leq k.$

Нехай A і B множини. F є багатозначною функцією з A в $B,$ якщо $F \subseteq A \times B$. Множина значень x є $set - F(x) = \{y : (x,y) \in F\}.$ F називається загальною, якщо для всіх x, $set - F(x) \neq \varnothing.$ Для порівняння понять розв'язків оптимізаційних задач нам необхідне відповідне поняття зведення. Введемо поняття розв'язків $F : set - F(x) = \{y : y$ розв'язує x у термінах розв'язків поняття $F\}$.

У цьому сенсі, поняття розв'язку є загальною багатозначною функцією, яка відображає екземпляр x на всі $y \in set - F(x)$. Таким чином, поняття розв'язку можна порівняти з допомогою зведень для загальної багатозначної функції. Ми використовуємо означення Зельмана [10] зведення за поліноміальний час Тюрінга для багатозначних функцій, обмежених загальною багатозначною функцією. Загальна функція f є уточненням загальної багатозначної функції $F,$ якщо для всіх $x, f(x) \in set - F(x).$ Загальна багатозначна функція F поліноміально зводиться по Тюрінгу до загальної багатозначної функції $G, F \leq_T^p G$, якщо існує детермінована поліноміально обмежена оракульна машина Тюрінга $M,$ така, що уточнення g функції G випливає, що M з $g,$ як оракул обчислює загальну функцію, що є уточненням $F.$ Відмітимо, що оракульна модель передбачає, що $\leq_T^p$ є транзитивним, навіть якщо довжина елементів в $set - F(x)$ не є поліноміально обмеженою по $|x|$.

F називається поліноміально розв'язною, якщо існує загальна поліноміально обчислювана функція $f,$ така, що f є уточненням $F.$ Поняття розв'язку F називається NP-складним, якщо всі задачі в NP поліноміально зводяться до $F.$

Для k-критеріальної задачі $O = (S, f, \leftarrow)$ обговоримо кілька понять «розв'язання O». Таким чином, ми зацікавлені тільки в недомінованих розв'язках, які називаються Парето-оптимальними розв'язками.

Домінуюче поняття розв'язку – $D - O$. Обчислити розв'язок, який слабо домінує заданий цільовий вектор.

Вхід: екземпляр x, цільовий вектор $c \in N^k$.

Вихід: деякий $s \in S^x$ з $f^x(x) \leftarrow c$ або повідомити, що немає таких s.

Зважене поняття суми – $W - O$ (тільки, якщо всі цілі треба мінімізувати або максимізувати). Одноцільова задача яка «зважує» всі цілі заданим способом.

Вхід: екземпляр x, вектор ваги $w \in N^k$.

Вихід: деякий $s \in S^x$, що оптимізує $\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s)$ або повідомити, що $S^x = \varnothing$.

Будемо припускати, що ці поняття аналогічні поняттю точного оптимального розв'язку в звичайній однокритеріальній оптимізації.

Багатокритеріальні поняття наближення. Ми обговоримо розумні поняття «наближеного розв'язку для O» для k-критеріальної задачі $O = (S, f, \leftarrow)$, де $\leftarrow$ визначене з $\leftarrow_1, ..., \leftarrow_k$. Наведемо α-наближені версії $D - O$ і $W - O$.

Наближене поняття домінуючого розв'язку – $D^{\alpha} - O$ α. Обчислити розв'язок, який слабо α-домінує заданий цільовий вектор.

Вхід: екземпляр x, цільовий вектор $c \in N^k$.

Вихід: деякий $s \in S^x$, такий, що $s \overset{\alpha}{\leftarrow} c$ або повідомити, що не існує таких $s \in S^x$, що $s \overset{\alpha}{\leftarrow} c$.

Наближене поняття зваженої суми – $W^{\delta} - O$ δ (якщо всі завдання зводяться до мінімуму або максимуму). Однокритеріальна задача, що «зважує» цілі заданим способом.

Вхід: екземпляр x, вектор ваги $w \in N^k$.

Вихід: деякий $s \in S^x$, такий, що

$$\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s) \overset{\delta}{\leftarrow}_1 \sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s') \text{ для всіх } s' \in S^x \tag{1}$$

або повідомити, що $S^x = \varnothing$.

Наближене мінімальне поняття зваженої суми – $W_{\min}^{¢} - O$ δ (якщо всі завдання зводяться до мінімуму). Однокритеріальна задача, що «зважує» цілі заданим способом.

Вхід: екземпляр x, вектор ваги $w \in N^k$.

Вихід: деякий $s \in S^x$, такий, що

$$\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s) \overset{\delta}{\leftarrow}_1 \min_{s'\in S^x}\{\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s')\} \qquad (2)$$

або повідомити, що $S^x = \varnothing$.

У випадках $W^\delta - O$ і $W^\delta_{\min} - O$ розв'язки s, будемо називати δ-наближеними розв'язками.

Твердження 1. Для k-критеріальної задачі $O = (S, f, \leq)$ поняття $W^\delta_{\min} - O$ і $W^\delta - O$ є еквівалентними.

Доведення. 1. Нехай $O = (S, f, \leq)$ задовольняє поняттю $W^\delta_{\min} - O$ ((2)), тобто задані екземпляр x, ваговий вектор $w \in N^k$. Знайти деякий $s \in S^x$, такий, що

$$\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s) \leq \delta \min_{s'\in S^x}\{\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s')\}.$$

Оскільки для довільного $s'' \in S^x$ $\min_{s'\in S^x}\{\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s')\} \leq \sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s'')$, то маємо $\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s) \leq \delta \sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s'')$ для довільного $s'' \in S^x$, а отже виконується (1).

2. Нехай $O = (S, f, \leq)$ задовольняє поняттю $W^\delta - O$ ((1)). Оскільки (1) виконується для довільних скінченних $s' \in S^x$, то (1) буде виконуватись також для мінімального значення $s' \in S^x$ в правій частині (1), тобто виконується (2).

Твердження 2 [1]. Для будь-якої k-критеріальної задачі $O = (S, f, \leq)$ і будь-якого $\delta \geq 1$ виконується

$$D^{(k\cdot\delta,\ldots,k\cdot\delta)} - O \leq_T^p W^\delta - O.$$

Твердження 3 [1]. Наступні твердження еквівалентні для деякої k-критеріальної задачі $O = (S, f, \leq)$:

- $D^\alpha - O$ поліноміально розв'язувана для деяких $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ з $\alpha_i \geq 1$.
- $W^\delta - O$ поліноміально розв'язувана для деякого $\delta \geq 1$.

Реоптимізація 2-критеріальної задачі про мінімальне вершинне покриття. Нехай $O = (S, f, \leq)$ є 2-критеріальна задача про мінімальне вершинне покриття ($2 - MVC$, скорочено) екземплярами є N^2-вершинно-помічені графи $G = (V, E, l)$ $S^G = \{C : C$ – вершинне покриття $G\}$, $l(v) = (l_1(v), l_2(v)), v \in V$ з невід'ємними компонентами, $f^G(C) = \sum_{v \in S^G} (w_1 l_1(v) + w_2 l_2(v))$ для вагового вектора з невід'ємними компонентами $w = (w_1, w_2)$, $f^G(C) \to \min$.

Наведемо модель цілочислового лінійного програмування, що відповідає $2-MVC$:

$$\min\{f^G(C)=\sum_{v\in V}x(v)(w_1l_1(v)+w_2l_2(v))\}, \quad (3)$$

$$x(v_1)+x(v_2)\geq 1, \text{ для } e=(v_1,v_2)\in E, \quad (4)$$

$$x(v)\in\{0,1\}, v\in V. \quad (5)$$

Лінійна релаксація (3) – (5) (*LP*-релаксація) отримується з (3) – (5) заміною (5) на :

$$0\leq x(v)\leq 1, v\in V. \quad (5')$$

Теорема 1. 1) 2-критеріальна задача про мінімальне вершинне покриття ($2-MVC$) задовольняє поняттю W^2-O і є поліноміально розв'язуваною; 2) 2-критеріальна задача про мінімальне вершинне покриття ($2-MVC$) задовольняє поняттю $D^{(4,4)}-O$ і є поліноміально розв'язуваною.

Доведення. 1. Застосуємо метод релаксації. Покажемо, що $2-MVC$ задовольняє поняттю $W^2_{\min}-O$ (тоді, згідно твердження 1, вона буде задовольняти і W^2-O).

Нехай $\{\bar{x}(v)\}$ є розв'язком *LP*-релаксації (3), (4), (5'). Будемо використовувати такий алгоритм заокруглення: $x(v)=1,$ якщо $\bar{x}(v)\geq\frac{1}{2}$ і $x(v)=0$ у протилежному випадку. Покладемо $C=\{v\in V: x(v)=1\}$, (тобто $S^G=C$). Знайдений розв'язок буде допустимим, оскільки для будь-якого ребра (u,v) виконується $\bar{x}(u)+\bar{x}(v)\geq 1,$ а, значить, або $\bar{x}(u)\geq\frac{1}{2},$ або $\bar{x}(v)\geq\frac{1}{2}$.

Оцінимо якість наближення:

$$f^G(C)=\sum_{v\in V}x(v)(w_1l_1(v)+w_2l_2(v))\leq 2\sum_{v\in V}\bar{x}(v)(w_1l_1(v)+w_2l_2(v))\leq 2\cdot f^G(C_{opt}),$$

де C_{opt} – оптимальний розв'язок (3) – (5). Тим самим показано, що (3) – (5) задовольняє $W^2_{\min}-O.$

Поліноміальна розв'язність цієї задачі випливає із застосування алгоритму Хачіяна [11] або Кармаркара [12] до (3),(4), (5').

2. Цей результат можна встановити, застосовуючи твердження 2 і 3 до доведення 1. Реоптимізаційна версія 2-критеріальної задачі про мінімальне вершинне покриття визначається додаванням не більше ніж h вершин ($h=O(\log n), n-$ кількість вершин у графі) з деяким числом інцидентних ребер.

Задача $Insh-2-MVC$ **.**

Вхід: Екземпляр $2-MVC$ $G=(V,E,l)$ з оптимальним розв'язком C^*.

Вихід: знайти оптимальний розв'язок екземпляра $G' = (V', E', l)$, де $V' = V \cup \{v_i\}$, $i = 1,..., h$; $E' = E \cup \{e_j\}, j = 1,..., t, l(v_i)$ задані; $e_i (i = 1, ..., t)$ задані ребра, інцидентні v, використовуючи C^*.
Мета: мінімізувати $f^{G'}(C') = \sum_{v \in S^{G'}} (w_1 l_1(v) + w_2 l_2(v))$.

Теорема 2. 1. Реоптимізаційна версія 2-критеріальної задачі про мінімальне вершинне покриття ($Insh - 2 - MVC$) при $h = O(\log n)$ задовольняє поняттю $W^{\frac{3}{2}} - O$ і є поліноміально розв'язуваною. 2. Реоптимізаційна версія 2-цільової задачі про мінімальне вершинне покриття ($Insh - 2 - MVC$) при $h = O(\log n)$ задовольняє поняттю $D^{(3,3)} - O$ і є поліноміально розв'язуваною.

Доведення. 1. Нехай $S^G = C^I_{\min}$ – оптимальний розв'язок екземпляра I задачі $2 - MVC$ і $f^G(C^I_{\min})$ – вага розв'язку. Нехай $v_i (i = 1,..., h)$ – задані вершини з деякими ребрами $e_j (j = 1,..., t)$ (екземпляр I') і $C^{I'}_{\min}$ – оптимальний розв'язок I'. Ясно, що $C^I_{\min} \cup \{v_1,..., v_h\}$ – допустимий розв'язок I'. Якщо $C^{I'}_{\min}$ містить $\{v_1,..., v_h\}$, то $C^I_{\min} \cup \{v_1,...v_h\}$ – оптимальний розв'язок. Розглянемо випадок, коли $C^{I'}_{\min}$ не містить $\{v_1,..., v_h\}$.

Позначимо $W_i (i = 1, 2, ..., \cdots 2^h - 1)$ всі підмножини $\{v_1,..., v_h\}$ без порожньої множини і $N(W_i)$ – множина всіх вершин графа сусідніх з W_i (тобто з'єднаних з вершинами з W_i ребрами). Якщо $C^{I'}_{\min}$ не містить W_i, то $C^I_{\min} \cup N(W_i)$ – допустимий розв'язок I'. У цьому випадку побудуємо ще один допустимий розв'язок (V_i):

- видалимо всі W_i і $N(W_i)$ з графа;
- до графа, що залишився, застосуємо ρ-наближений алгоритм знаходження вершинного покриття;
- до отриманого розв'язку додамо $N(W_i)$.

Серед розв'язків $C^I_{\min} \cup N(W_i)$ і V_i виберемо найкращий (тобто з меншим значенням цільової функції f^G), який у подальшому позначимо $\overline{V_i}$. Оскільки $f^G(C^I_{\min}) \le f^G(C^{I'}_{\min})$ отримаємо

$$f^G(C^I_{\min} \cup N(W_i)) \le f^G(C^{I'}_{\min}) + f^G(N(W_i)) \tag{6}$$

і в силу побудови V_i

$$f^G(V_i) \le \rho \cdot (f^G(C^{I'}_{\min}) - f^G(N(W_i)) + f^G(N(W_i)) =$$
$$= \rho \cdot f^G(C^{I'}_{\min}) - (\rho - 1) \cdot f^G(N(W_i)). \qquad (7)$$

Беручи лінійну комбінацію (6) з коефіцієнтом $(\rho - 1)$ і (7) отримаємо

$$(\rho - 1) \cdot f^G(C^{I}_{\min} \cup V(W_i)) + f^G(V_i) \le (\rho - 1) \cdot f^G(C^{I'}_{\min}) + \rho \cdot f^G(C^{I'}_{\min}) =$$
$$= (2\rho - 1) f^G(C^{I'}_{\min}).$$

Оскільки
$$(\rho - 1) \cdot (f^G(C^{I}_{\min}) \cup N(W_i)) + f^G(V_i) \ge$$
$$\ge (\rho - 1 + 1) \cdot \min\{f^G(C^{I}_{\min} \cup N(W_i)), f^G(V_i)\} = \rho \cdot f^G(\overline{V}_i).$$

Маємо $\rho \cdot f^G(\overline{V}_i) \le (2\rho - 1) \cdot f^G(C^{I'}_{\min})$. Таким чином, отримані наближені розв'язки $\overline{V}_i$ екземпляра I', для яких

$$f^G(\overline{V}_i) \le \frac{2\rho - 1}{\rho} \cdot f^G(C^{I'}_{\min}) = (2 - \frac{1}{\rho}) \cdot f^G(C^{I'}_{\min}).$$

Так як кожний розв'язок

$$\overline{V}_i (i = 1, ..., 2^h - 1) \ є \ (2 - \frac{1}{\rho})$$

– наближений (один з них буде задіяним), то отриманий $(2 - \frac{1}{\rho})$ – наближений алгоритм для $Insh - 2 - MVC$. Для поліноміальності цього алгоритму досить вимагати, щоб $2^h \le n^c$, де $c = \text{const}$, звідси випливає умова $h = O(\log n)$. Для завершення доведення потрібно покласти $\rho = 2$, тобто застосувати наближений алгоритм з теореми 1.

2. Цей результат можна встановити, застосовуючи твердження 2 і 3 до доведення 1.

Таким чином, для реоптимізаційних версій багатокритеріальних оптимізаційних задач отримані поліпшені розв'язки (з кращою якістю наближення).

Висновки. Вивчається складність і наближення комбінаторних багатокритеріальних NP-складних оптимізаційних задач.

Визначені поняття розв'язків, наближених розв'язків, поняття NP-складності з допомогою поліноміальних зведень Тюрінга з багатозначних функцій.

Наводяться результати в яких випадках поліноміальна розв'язність перекладається з одного поняття на інше. Для задач, де всі цілі мінімізуються, результати наближення перекладаються з однокритеріальної оптимізації на багатокритеріальну. Цей факт був встановлений при дослідженні реоптимізаційної версії 2-критеріальної задачі про мінімальне вершинне покриття при додаванні $h = O(\log n)$ вершин з деякими інцидентними ребрами.

Цікаво дослідити інші реоптимізаційні версії NP-складних комбінаторних багатокритеріальних задач.

Н.А. Дрейчан

РЕОПТИМИЗАЦИЯ 2-КРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ ГРАФА

Изучается эффект добавления множества из $h = O(\log n)$ вершин с некоторыми инцидентными ребрами к произвольному экземпляру 2-критериальной задачи о минимальном вершинном покрытии на оптимальное решение. Такая реоптимизационная версия 2-критериальной задачи о минимальном вершинном покрытии удовлетворяет аппроксимационным понятиям $W^{\frac{3}{2}} - O$ и $D^{(3,3)} - O$ (первоначальный вариант – понятиям $W^{2} - O$ и $D^{(4,4)} - O$) и присутствует некоторый выигрыш как приближение.

N.A. Dreychan

REOPTIMIZATION OF 2-OBJECTIVE MINIMUM VERTEX COVER PROBLEM

We study the effect of adding a set of $h = O(\log n)$ vertices incident with some edges to an arbitrary instance of 2-objective problem of minimum vertex cover on the optimal solution. This reoptimization version of 2-objective problem of minimum vertex cover satisfies the approximation notions $W^{\frac{3}{2}} - O$ and $D^{(3,3)} - O$ (the original version is the notions $W^{2} - O$ and $D^{(4,4)} - O$), that is a gain as approximation.

1. *Glaβer Christian, Reitwieβner Christian, Schmitz Heinz, Witek Maximilian*. Hardness and approximability in multi-objective optimization // Computability in Europe (CiE). 2010. – Lecture Notes in Computer Science (LNCS), 6158. – 2010. – P. 180 – 189.
2. *Ausiello G., Escoffier B., Monnot J. and Paschos V.Th.* Reoptimization of minimum and maximum traveling salesman's tours // Lect. Notes Comput. Sci. – 2006. – Vol. 4059.– P. 196 – 207.
3. *Bockenhauer H.J., Forlizzi L., Hromkovic J. et al*. On the approximability of TSP on local modifications of optimal solved instances // Algorithmic Oper. Res. – 2007. – Vol. 2, N 2. – P. 83 – 93.
4. *Bockenhauer H. J., Hromkovic J., Momke T. and Widmayer P.* On the hardness of reoptimization // Lect. Notes Comput. Sci. – 2008. – Vol. 4910. – P. 50 – 65.

5. *Archetti C., Bertazzi L. and Speranza M.G.* Reoptimizing the travelling salesman problem // Network. – 2003. – Vol. 42, N 3. – 2003. – P. 154 – 159.
6. *Ausiello G., Bonifacci V. and Escoffier B.* Complexity and approximation in reoptimization // In: S. Barry Cooper and Andrea Sorbi, Eds., Computability in Context: Computation and Logic in the Real World. – London: Imperial College Press. – 2011. – P. 101 – 130.
7. *Mikhailyuk V.A.* Reoptimization of set covering problems // Cybernetics and Systems Analysis. – 2010. – Vol. 46, N 6. – P. 879 – 883.
8. *Berger A., Bonifaci V., Grandoni F., Schafer G.* Budgeted matching and budgeted matroid intersection via the gasoline puzzle // Mathematical Programming . – 2011. – 128, N 1 – 2. – P. 355 – 372.
9. *Ravi R., Goemans M.X.* The constrained minimum spanning tree problem // Lect. Notes Comput. Sci. – 1996. – Vol. 1097. – P. 66 – 75.
10. *Selman A.L.* A taxonomy on complexity classes of functions // Journal of Computer and System Sciences. – 1994. – **48**. – P. 357 – 381.
11. *Хачиян Л.Г.* Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1980. – **20**. – С. 51 – 68.
12. *Karmarkar N.* A new polynomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica. – 1984. – **4**. – P. 373 – 395.

Одержано 10.04.2015

Про автора:

Дрейчан Надія Анатоліївна,
аспірантка Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна.
E-mail: tkachuk_nadyushka@mail.ru