КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

Т.И. СЕРГИЕНКО

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ПОИСКА РЕШЕНИЙ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПАРЕТО

Для векторной задачи оптимизации с неограниченным множеством допустимых решений исследованы условия разрешимости, в том числе устойчивой и неустойчивой разрешимости, на основе использования свойств рецессивного конуса допустимого множества и конуса, частично упорядочивающего допустимое множество относительно векторного критерия оптимизации.

Введение. Среди вопросов о корректности постановок многокритериальных оптимизационных задач вопрос об их разрешимости является важным как в теоретическом, так и в прикладном отношении. Цель данной работы – это определение условий существования Парето-оптимальных решений векторных задач с неограниченным множеством допустимых решений на основе использования свойств рецессивного конуса допустимого множества и конуса, который частично упорядочивает это множество относительно линейных критериев, из которых состоит векторный критерий оптимизации. Рассматривается также вопрос об устойчивости свойств разрешимости и неразрешимости для указанных задач в случае возможных возмущений входных данных.

Продолжая исследования, касающиеся вопросов корректности постановок векторных оптимизационных задач и представленные, в частности, в публикациях [1 – 12], рассмотрим следующую задачу поиска элементов множества Парето $P(C,X)$:

$$Z(P(C,X)): \max\{Cx \mid x \in X\}.$$

Здесь X – неограниченное выпуклое множество в n-мерном действительном векторном пространстве R^n; C – линейное отображение $R^n \to R^\ell$ и соответствующая ему матрица $C = \left[c_{ij}\right] \in R^{\ell \times n}$, у которой строки $c_i = (c_{i1},...,c_{in})$, $i \in \{1,...,\ell\}$, представляют собой наборы коэффициентов линейных целевых функций $\langle c_i, x\rangle$, составляющих векторный критерий $Cx = \left(\langle c_1, x\rangle, ..., \langle c_\ell, x\rangle\right)$ задачи $Z(P(C, X))$; множество Парето $P(C, X)$ состоит из всех тех точек x допустимого множества X, для которых выполняется условие:

$$\nexists y \in X : Cy \geq Cx,\ Cy \neq Cx .$$

Согласно [13] неограниченность множества X допустимых решений задачи $Z(P(C, X))$ означает, что рецессивний конус этого множества

$$0^+ X = \left\{ y \in R^n \mid x + \lambda y \in X \quad \forall x \in X, \lambda \geq 0 \right\}$$

обязательно содержит точку, отличную от начала координат: $0^+ X \setminus \{0\} \neq \varnothing$. Введем в рассмотрение также линейное подмножество множества X:

$$L_X = (-0^+ X) \bigcap 0^+ X .$$

Отметим, что в том случае, когда допустимое множество X является многогранным и имеет следующий вид:

$$X(A,b) = \{x \in R^n \,|\, Ax \leq b\}, \tag{1}$$

где $A = \left[a_{ij} \right] \in R^{m \times n}$, $b = (b_1, ..., b_m) \in R^m$, рецессивный конус и линейное подмножество множества X могут быть записаны с помощью формул $0^+ X = \{x \in R^n \,|\, Ax \leq 0\}$ и $L_X = \{x \in R^n \,|\, Ax = 0\}$.

Изучение условий разрешимости задачи $Z(P(C, X))$, т. е. условий существования ее Парето-оптимальных решений, проведем с учетом свойств как рецессивного конуса $0^+ X$, так и многогранного конуса

$$K = K(C) = \left\{ x \in R^n \mid Cx \geq 0 \right\},$$

который частично упорядочивает множество допустимых решений задачи относительно векторного критерия оптимизации, а именно: переход из любой точки $x \in X$ в некоторую точку $(x + y) \in X$, где $y \in K$, приводит к неравенствам $C(x + y) \geq Cx$. Очевидно, для произвольной точки $x \in X$ истинно высказывание

$$x \in P(C, X) \Leftrightarrow (x + K) \bigcap X \subset K_0,$$

где $K_0 = K_0(C) = \left\{ x \in R^n \mid Cx = 0 \right\}$ J ядро линейного отображения $C : R^n \to R^\ell$ [14], представляющее собой совокупность всех тех векторов $x \in K$, образы которых в R^ℓ совпадают с нулевым вектором.

В следующей теореме сформулировано необходимое условие разрешимости задачи $Z(P(C, X))$ [2, 3].

Теорема 1. Если множество Парето-оптимальных решений задачи $Z(P(C, X))$ не пусто, то

$$K \bigcap 0^+ X \subset K_0 . \tag{2}$$

При дополнительном предположении о замкнутости допустимого множества X докажем следующее достаточное условие разрешимости задачи $Z(P(C,X))$.

Теорема 2. Если совокупность всех общих точек упорядочивающего конуса K и рецессивного конуса 0^+X совпадает с пересечением двух их подмножеств: ядра $K_0 \subset K$ линейного отображения C и линейного подмножества L_X выпуклого замкнутого допустимого множества X, т. е.

$$K \bigcap 0^+ X = K_0 \bigcap L_X \ , \tag{3}$$

то $P(C,X) \neq \varnothing$.

Доказательство проведем, опираясь на теорему 1 из [15, §3.2], в которой утверждается, что из условия компактности всех множеств вида

$$R(y) = \left\{ z \in Y \middle| z \geq y \right\},$$

где $y \in Y$, следует существование точек оптимального множества задачи $Z(P(C,X))$. Здесь использовано обозначение Y для образа в R^ℓ допустимого множества $X \subset R^n$ относительно отображения $C : R^n \to R^\ell$, т. е.

$$Y = CX = \left\{ z = Cx \in R^\ell \middle| x \in X \right\}.$$

Очевидно, $Y \neq \varnothing$ и, следовательно, $R(y) \neq \varnothing$.

Итак, покажем, что при выполнении условия (3) множество $R(y)$ – это компакт для любой точки $y \in Y$, т. е. оно замкнуто и ограничено. Для этого представим его в виде пересечения двух множеств:

$$R(y) = Y \bigcap \overline{R}(y) \, , \tag{4}$$

где $\overline{R}(y) = \left\{ z \in R^\ell \middle| z \geq y \right\}$ – многогранное множество (следовательно, выпуклое и замкнутое).

К выводу относительно замкнутости множества Y приходим согласно теореме 3.7 из [16], так как выполняются оба ее условия: во-первых, допустимое множество X не пусто, выпукло и замкнуто, а во-вторых, имеет место включение

$$K_0 \bigcap O^+ X \subset -O^+ X \, ,$$

непосредственно вытекающее из условия (3). Кроме того, согласно теореме 3.4 из [13] выпуклость множества X в R^n влечет за собой выпуклость и его образа Y в R^ℓ.

Опираясь на формулу (4) и учитывая замкнутость и выпуклость множеств Y и $\overline{R}(y)$, делаем вывод о замкнутости и выпуклости их пересечения $R(y)$.

Нам осталось убедиться в ограниченности множества $R(y)$. В соответствии с теоремой 8.4 из [13] непустое замкнутое выпуклое множество является ограниченным тогда и только тогда, когда его рецессивний конус содержит лишь нулевой вектор, т. е. в нашем случае, когда

$$0^+ R(y) = \{0\}.$$

Покажем, что это соотношение действительно выполняется. Воспользуемся следствием 8.3.3 из [13], позволяющим утверждать, что замкнутость и выпуклость множеств Y и $\bar{R}(y)$, а также непустота их пересечения приводят к равенству

$$0^+ R(y) = 0^+ \bar{R}(y) \bigcap 0^+ Y, \qquad (5)$$

где $0^+ \bar{R}(y) = \left\{ z \in R^\ell \,\middle|\, z \geq 0 \right\}$. Кроме того, примем во внимание, что согласно упомянутой выше теореме 3.7 из [16] выполняется соотношение

$$0^+ Y = C(0^+ X).$$

Опираясь на равенство (5) и привлекая формулу (2), непосредственно вытекающую из условия (3) доказываемой теоремы, получаем цепочку соотношений

$$0^+ R(y) = \left\{ z \in R^\ell \,\middle|\, z \geq 0 \right\} \bigcap C(0^+ X) = \left\{ z = Cx \,\middle|\, Cx \geq 0, x \in 0^+ X \right\} =$$

$$= \left\{ z = Cx \,\middle|\, x \in K \bigcap 0^+ X \right\} = C(K \bigcap 0^+ X) \subset C(K_0) = \{0\},$$

которая завершает доказательство.

Рассмотрим вопрос о разрешимости векторной задачи оптимизации в том случае, когда ее входные данные могут подвергаться некоторым достаточно малым возмущениям. Учитывая это введем в рассмотрение понятия (не)устойчиво (не)разрешимой задачи $Z(P(C, X))$ с многогранным допустимым множеством $X = X(A, b)$, определенным согласно формуле (1).

Для этого в пространстве R^q, где q – любое натуральное число, зададим норму с помощью формулы $\|x\| = \sum_{i=1}^{q} |x_i|$, где $x = (x_1, ..., x_q) \in R^q$. Под нормой некоторой матрицы $B = \left[b_{ij} \right] \in R^{q \times k}$ будем понимать норму вектора $(b_{11}, b_{12}, ..., b_{qk})$. Напомним [17], что в конечномерном пространстве R^q любые две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, т. е. существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что $\forall x \in R^q$ выполняются неравенства $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$. Учитывая это, отметим, что изложенные далее результаты справедливы для любых норм.

Для набора $u = (C, A, b)$ входных данных задачи $Z(P(C, X(A, b)))$, подвергающихся возмущениям, и любого числа $\delta > 0$ определим множество $O_\delta(u)$ возмущенных входных данных как окрестность $O_\delta(u) = O_\delta(C) \times O_\delta(A) \times O_\delta(b)$ точки u в пространстве входных данных $R^{\ell \times n} \times R^{m \times n} \times R^m$. Здесь

$$O_\delta(C) = \left\{ C(\delta) = \left[c_{ij}(\delta) \right] \in R^{\ell \times n} \,\middle|\, \|C(\delta) - C\| < \delta \right\},$$

$$O_\delta(A) = \left\{ A(\delta) = \left[a_{ij}(\delta) \right] \in R^{m \times n} \,\middle|\, \|A(\delta) - A\| < \delta \right\},$$

$$O_\delta(b) = \left\{ b(\delta) = (b_1(\delta), ..., b_m(\delta)) \in R^m \,\middle|\, \|b(\delta) - b\| < \delta \right\}.$$

Обозначим $u(\delta) = (C(\delta), A(\delta), b(\delta))$, $X(\delta) = X(A(\delta), b(\delta)))$.

Определение. Задача $Z(P(C, X(A,b)))$ называется устойчиво разрешимой, если $\exists\delta > 0$, такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$: $P(C(\delta), X(\delta)) \neq \varnothing$.

Определение. Задача $Z(P(C, X(A,b)))$ называется устойчиво неразрешимой, если $\exists\delta > 0$, такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$: $P(C(\delta), X(\delta)) = \varnothing$.

Определение. Задача $Z(P(C, X(A,b)))$ называется неустойчиво разрешимой, если она разрешима, т. е. $P(C, X(A,b)) \neq \varnothing$, однако $\forall\delta > 0$ $\exists u(\delta) \in O_\delta(u)$: $P(C(\delta), X(\delta)) = \varnothing$.

Определение. Задача $Z(P(C, X(A,b)))$ называется неустойчиво неразрешимой, если она неразрешима, т. е. $P(C, X(A,b)) = \varnothing$, но $\forall\delta > 0$ $\exists u(\delta) \in O_\delta(u)$: $P(C(\delta), X(\delta)) \neq \varnothing$.

Справедливы следующие достаточные условия устойчивой (неустойчивой) разрешимости (неразрешимости) задачи $Z(P(C, X(A,b)))$.

Теорема 3. Пусть $X = X(A,b)$. Если выполняется условие

$$K \cap O^+ X = \{0\},$$

то задача $Z(P(C, X))$ – устойчиво разрешима.

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что двойственный конус $(K \cap O^+ X)^* = \left\{ y \in R^n \,\middle|\, \langle x, y \rangle \geq 0 \ \ \forall x \in K \cap O^+ X \right\}$ совпадает со всем пространством R^n. Отсюда с учетом леммы 8.7 из [18] следует, что $\exists\delta > 0$, такое, что $\forall C(\delta) \in O_\delta(C), \forall A(\delta) \in O_\delta(A)$ также выполняется равенство $(K(C(¢)) \cap O^+ X(¢))^* = R^n$. Тогда $K(C(¢)) \cap O^+ X(¢) = \{0\}$ и, следовательно, $K(C(¢)) \cap O^+ X(¢) = K_0(C(¢)) \cap L_{X(¢)}$, что согласно теореме 2 позволяет сделать вывод о разрешимости задачи $Z(P(C(\delta), X(\delta)))$ и тем самым завершить доказательство.

Теорема 4. Пусть $X = X(A,b)$. Если справедливы соотношения (3) и

$$K_0(C) \cap L_X \neq \{0\}, \qquad (6)$$

то задача $Z(P(C, X))$ – неустойчиво разрешима.

Доказательство. Согласно теореме 2 соотношение (3) влечет за собой разрешимость задачи $Z(P(C, X))$. Учитывая также неравенство (6), заключаем, что в множестве $K \cap O^+ X(A,b)$ найдется точка $z = (z_1, ..., z_n) \neq 0$, для которой выполняются условия: $Cz = 0$ и $Az = 0$. Выбрав произвольно число $\delta > 0$, возмутим набор $u = (C, A, b)$ входных данных следующим образом.

Элементы возмущенной матрицы коэффициентов векторного критерия опишем формулами $c_{ij}(\delta) = c_{ij} + \frac{\gamma}{n\ell} sign(z_j)$, где $i = \overline{1,\ell}$, $j \in \overline{1,n}$, $\gamma \in (0,\delta)$. Тогда $\|C(\delta) - C\| = \frac{\gamma}{n\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n} |sign(z_j)| \le \gamma < \delta$ и, следовательно, $C(\delta) \in O_\delta(C)$. Относительно возмущений входных данных, определяющих допустимое множество решений задачи, положим, что $A(\delta) = A \in O_\delta(A)$, $b(\delta) = b \in O_\delta(b)$.

Покажем, что $z \in K(C(\delta)) \setminus K_0(C(\delta))$. Действительно, $\forall i \in \{1,...,\ell\}$ справедливы соотношения $\langle c_i(\delta), z\rangle = \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + \frac{\gamma}{n\ell} sign(z_j)) z_j = \frac{\gamma}{n\ell} \sum_{j=1}^{n} |z_j| > 0$, которые означают, что $C(\delta) z > 0$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы найдется точка $z \in K \cap O^+ X$, такая, что для любого числа $\delta > 0$ существует возмущенный набор входных данных $u(\delta) \in O_\delta(u)$, при котором точка z принадлежит множеству $0^+ X(\delta) \cap K(C(\delta)) \setminus K_0(C(\delta))$. Опираясь на теорему 1, сделанный нами вывод позволяет прийти к заключению о неразрешимости задачи $Z(P(C(\delta), X(\delta))$, входные данные которой возмущены описанным выше способом. Доказательство завершено.

Обозначим $\operatorname{int} B$ внутренность некоторого множества $B \subset R^n$.

Теорема 5 [8]. Пусть $X = X(A,b)$. Если $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} O^+ X \ne \varnothing$, то задача $Z(P(C, X))$ – устойчиво неразрешима.

Теорема 6. Пусть $X = X(A,b)$. Если справедливы соотношения

$$(K \setminus (\mathrm{K}_0 \cup \operatorname{int} K)) \cap O^+ X \ne \varnothing, \tag{7}$$

$$\operatorname{int} K \cap O^+ X = \varnothing, \tag{8}$$

$$K_0 \cap O^+ X \subset L_X, \tag{9}$$

то задача $Z(P(C, X))$ – неустойчиво неразрешима.

Доказательство. Неразрешимость задачи $Z(P(C, X))$ следует из неравенства (7), так как оно означает, что включение (2), являющееся согласно теореме 1 необходимым условием разрешимости задачи $Z(P(C, X))$, не выполняется. Далее, в соответствии с определением понятия неустойчивой неразрешимости задачи, следует убедиться, что $\forall \delta > 0 \;\; \exists u(\delta) \in O_\delta(u): \; P(C(\delta), X(\delta)) \ne \varnothing$.

Возмутим матрицу C коэффициентов векторного критерия следующим образом: $C^\tau = \left\{c_{ij}^\tau\right\} \in R^{\ell \times n}$, где $c_{ij}^\tau = c_{ij} - \tau u_j$ ($i = 1,...,\ell$, $j = 1,...,n$), $\tau \in R^1$ – параметр возмущений, $u = (u_1,...,u_n) = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i c_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i = 1$, $\mu_i > 0$ ($i = 1,...,\ell.$). Удостоверимся, что $\forall \delta > 0$ возмущенная матрица $C(\delta) = C^\tau$ принадлежит множеству $O_\delta(C)$, а задача $Z(C(\delta), X(\delta))$ с возмущенным набором входных данных $u(\delta) = (C(\delta), A, b)$ разрешима при условии, что значение параметра возмущений τ выбрано из интервала $\left(0, \min\left\{1, \frac{\delta}{\ell \|u\|}\right\}\right)$.

Действительно, в этом случае $C(\delta) \in O_\delta(C)$, так как $\|C(\delta) - C\| = \|C^\tau - C\| = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n} \left|c_{ij}^\tau - c_{ij}\right| = \tau \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n} \left|u_j\right| = \tau \ell \|u\| < \delta$. Для доказательства разрешимости задачи $Z(C^\tau, X(A,b))$ убедимся, опираясь на теорему 2, в справедливости включения

$$K(C^\tau) \bigcap 0^+ X(A,b) \subset K_0(C^\tau) \bigcap L_{X(A,b)}. \tag{10}$$

Принимая во внимание, что $0 < \tau < 1$, и воспользовавшись теоремой 7 из [12], получаем включение $K(C^\tau) \setminus K_0(C^\tau) \subset \operatorname{int} K$, откуда с учетом условия (8) вытекает соотношение $(K(C^\tau) \setminus K_0(C^\tau)) \bigcap 0^+ X(A,b) = \varnothing$, означающее, что $K(C^\tau) \bigcap 0^+ X(A,b) \subset K_0(C^\tau)$. А так как согласно утверждению 3 из [2] при $\tau \neq 1$ верно равенство $K_0 = K_0(C^\tau)$, то последнее включение совместно с условием (9) теоремы приводит к соотношению (10), что и завершает доказательство.

Выводы. В работе доказаны теоремы, в которых сформулированы условия существования Парето-оптимальных решений для многокритериальных задач с неограниченным допустимым множеством на основе использования свойств рецессивного конуса этого множества и конуса, который частично упорядочивает допустимое множество относительно линейных критериев, составляющих векторный критерий оптимизации. Исследованы вопросы устойчивости свойств разрешимости и неразрешимости задач оптимизации на многогранном множестве в случае возможных возмущений входных данных задач.

Т.І. Сергієнко

УМОВИ РОЗВ'ЯЗУВАНОСТІ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ПОШУКУ РОЗВ'ЯЗКІВ, ОПТИМАЛЬНИХ ЗА ПАРЕТО

Для векторної задачі оптимізації з необмеженою множиною допустимих розв'язків досліджено умови розв'язуваності, у тому числі стійкої та нестійкої розв'язуваності, на основі використання властивостей рецесивного конуса допустимої множини і конуса, що частково впорядковує цю множину щодо векторного критерія оптимізації.

T.I. Sergienko

CONDITIONS OF PARETO-OPTIMAL VECTOR PROBLEM SOLVABILITY

In the paper, we investigate the existence conditions of Pareto-optimal solutions to vector optimization problem with unbounded polyhedral set of feasible solutions. The study is based on the use of properties of recessive cone of feasible set and the use of the cone, which partially order a feasible set with respect to the linear objective function. The conditions of stable and unstable solvability of a vector problem with polyhedral feasible set in the case of input data changes are considered.

1. *Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Задача частично целочисленной векторной оптимизации: вопросы устойчивости // Кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 58 – 61.
2. *Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Кононова А.А.* Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ.– 1997. – № 1. – С. 3 – 10.
3. *Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В.* О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Там же. – 2000. – № 6. – С. 39 – 46.
4. *Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І.* До питання про розв'язуваність задач векторної оптимізації з необмеженою допустимою областю // Компьютерная математика. – 2001. – № 2. – С. 221 – 227.
5. *Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І.* Деякі умови оптимальності та розв'язуваності в задачах векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Теорія оптимальних рішень. – 2002. – № 1. – С. 142 – 148.
6. *Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І.* Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доповіді НАН України. – 2003. – № 10. – С. 80 – 85.
7. *Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I.* Stability of vector integer optimization problems with quadratic criterion functions // Theory of stochastic processes. – K.: In-te of Math. of NASU. – 2004. – 10(24), N 3-4. – P. 95 – 101.
8. *Kozeratska L.N., Forbes J.F., Goebel R.J., Kresta J.V.* Pertubed cones for analysis of uncertain multi-criteria optimization problems // Linear algebra and its applications. – 2004. – N 378. – P. 203 – 229.
9. *Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4. – С. 90 – 100.
10. *Сергиенко Т.И.* Устойчивость по векторному критерию и ограничениям целочисленных задач поиска решений, оптимальных по Слейтеру и Смейлу // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 145 – 151.

11. *Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И.* Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 142 – 148.
12. *Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И.* Свойства специальным образом возмущенных конусов, упорядочивающих множество допустимых решений векторной оптимизационной задачи относительно векторного критерия // Там же. – 2014. – **50**, № 5. – С. 71 – 77.
13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 470 с.
14. *Чарин В.С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. – Киев: Вища школа, 1978. – 191 с.
15. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
16. *Ржевский С.В.* Монотонные методы выпуклого программирования. – Киев: Наукова думка, 1993. – 319 с.
17. *Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К.* Математичний аналіз. – К.: Вища школа, 1992. – Ч. 1. – 495 с.
18. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 340 с.

Получено 25.09.2015

Об авторе:

Сергиенко Татьяна Ивановна,
старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.