Компьютерная математика

УДК 519.8

П.І. СТЕЦЮК, О.П. ЛИХОВИД, О.В. ФЕСЮК

NLP-ПРОГРАМИ ДЛЯ ELD-ЗАДАЧ ЗАВАНТАЖЕННЯ ЕНЕРГОСИСТЕМИ

Розглядається задача оптимального завантаження енергосистеми з обмеженнями на допустимі зміни потужностей енергоблоків для двох нелінійних функцій витрат умовного палива: опуклої квадратичної функції та негладкої неопуклої функції, яка в процесі генерації електроенергії враховує так званий ефект «пульсації» за рахунок включення вхідних клапанів енергоблоку. Наведено результати обчислювальних експериментів по знаходженню розв'язків задач за допомогою NLP-програм, які знаходяться на NEOS-сервері.

Вступ. Традиційно розглядають дві основні задачі оптимального завантаження енергосистеми [1, 2]. Перша задача в англомовній літературі має назву Economic Load Dispatch Problem (ELD-задача). В задачі задано набір працюючих енергоблоків та їх характеристики. Потрібно знайти електричне навантаження кожного енергоблоку (кількість електроенергії, яку генерує кожний енергоблок), щоб задовольнити потреби споживачів та забезпечити мінімальні сумарні витрати на генерацію електроенергії. Друга задача в англомовній літературі має назву Unit Commitment Problem. В задачі задано набір енергоблоків з можливістю їх включення/відключення. Потрібно знайти моменти часу, коли кожний енергоблок потрібно включити/виключити, та електричне навантаження кожного включеного енергоблоку, щоб задовольнити потреби споживачів з мінімальними сумарними затратами на генерацію електроенергії.

В роботі досліджується ELD-задача з обмеженнями на допустимі зміни потужностей енергоблоків для двох нелінійних функцій витрат умовного палива. Перша функція представлена опуклою квадратичною функцією. Друга функція витрат умовного палива представлена негладкою неопуклою функцією, яка враховує так званий ефект «пульсації» [1, с. 13]. Відповідна їй ELD-задача є негладкою. Мета даної роботи – дослідження ефективності знаходження розв'язків опуклої та негладкої ELD-задач за допомогою NLP-програм, які знаходяться на відомому NEOS-сервері [3].

1. Квадратична та негладка ELD-задачі. Енергосистема складається з N паралельно працюючих енергоблоків. Для кожного енергоблоку i ($i=1,\ldots,N$) задані: P_i^{low} і P_i^{up} – відповідно нижня і верхня границі його електричного навантаження; DR_i і UR_i – допустимі значення на послідовні зменшення і збільшення електричного навантаження i-го енергоблоку. Задані T – тривалість планового періоду та E_t – планове електричне навантаження енергосистеми для кожного інтервалу t ($t=1,\ldots,T$).

Будемо розглядати наступну задачу нелінійного програмування: знайти

$$f^* = \min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} f_i(x_{i,t}) \tag{1}$$

при лінійних обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,t} = E_t, \quad t=1,\ldots,T, \tag{2}$$

$$x_{i,t} - x_{i,t-1} \le UR_i, t=2,\ldots,T, i=1,\ldots,N, \tag{3}$$

$$x_{i,t-1} - x_{i,t} \le DR_i, t=2,\ldots,T, i=1,\ldots,N. \tag{4}$$

$$P_i^{low} \le x_{i,t} \le P_i^{up}, \quad i=1,\ldots,N, \quad t=1,\ldots,T, \tag{5}$$

де $x_{i,t}$ – невідоме електричне навантаження i-го енергоблоку в інтервалі t, $f_i(x_{i,t})$ – нелінійна сепарабельна функція витрат умовного палива.

Лінійні обмеження задачі (1) – (5) мають наступний зміст. Лінійні рівності (2) означають виконання E_t – плану по генерації електричної енергії у кожному інтервалі t планового періоду, $t=1,\ldots,T$. Лінійні нерівності (3) та (4) задають максимально допустимі границі на величину можливого збільшення та зменшення потужності i-го енергоблоку між інтервалами $t-1$ і t, $t=2,\ldots,T$. Двосторонні обмеження (5) означають, що для кожного i-го енергоблоку та кожного інтервалу t електричне навантаження x_{it} вибирається із діапазону $[P_i^{low}, P_i^{up}]$ – діапазону можливих електричних навантажень i-го енергоблоку.

Мінімізація нелінійної цільової функції (1) означає знаходження f^* – мінімальних сумарних витрат на генерацію електроенергії за весь плановий період, які визначаються видом нелінійної сепарабельної функції витрат умовного палива $f_i(x_{i,t})$. Будемо розглядати задачу (1)–(5) для двох різних нелінійних сепарабельних функцій витрат умовного палива.

У першому випадку функція витрат умовного палива буде мати вигляд квадратичної функції

$$f_i(x_{i,t}) = a_i x_{i,t}^2 + b_i x_{i,t} + c_i, \quad a_i > 0, b_i \ge 0, \tag{6}$$

де a_i, b_i, c_i – задані параметри. При параметрах $a_i > 0$ та $b_i \ge 0$ квадратична функція $f_i(x_{i,t})$ є строго опуклою, її точка мінімуму $x_{i,t}^* = -b_i \big/ 2a_i$ реалізується

зліва від області визначення функції $x_{i,t} \in \left[P_i^{low}, P_i^{up} \right]$. Тому в області визначення квадратична функція (6) є строго опуклою та монотонно зростаючою функцією. Її вигляд показано на рисунку зліва.

У другому випадку функція витрат умовного палива буде мати вигляд негладкої нелінійної функції

$$f_i(x_{i,t}) = a_i x_{i,t}^2 + b_i x_{i,t} + c_i + d_i \left| \sin(\omega_i \times (P_i^{low} - x_{i,t})) \right|, \quad a_i > 0, b_i \geq 0, d_i > 0, \omega_i > 0, \quad (7)$$

де $a_i, b_i, c_i, d_i, \omega_i$ – задані параметри. Функція (7) є сумою квадратичної функції (6) та функції $\varphi(x_{i,t}) = d_i \left| \sin(\omega_i \times (P_i^{low} - x_{i,t})) \right|$, яка враховує так званий ефект «пульсації» для великих енергоблоків. Ефект «пульсації» характеризує генератори великих енергоблоків, які мають декілька вхідних клапанів, що послідовно відкриваються для збільшення потужності енергоблоку [1, с. 13]. Для енергоблоку з трьома вхідними клапанами на рисунку справа наведено графік функції витрат умовного палива вигляду (7) в діапазоні $[P_i^{low}, P_i^{up}]$. Точки відкриття клапанів відмічено цифрами 1, 2, 3. При збільшенні потужності клапани включаються послідовно: в точці 1 включається клапан 1, у точці 2 включається ще й клапан 2 і так далі. Такому включенню відповідає функція витрат умовного палива вигляду (7), яка є негладкою та неопуклою функцією.

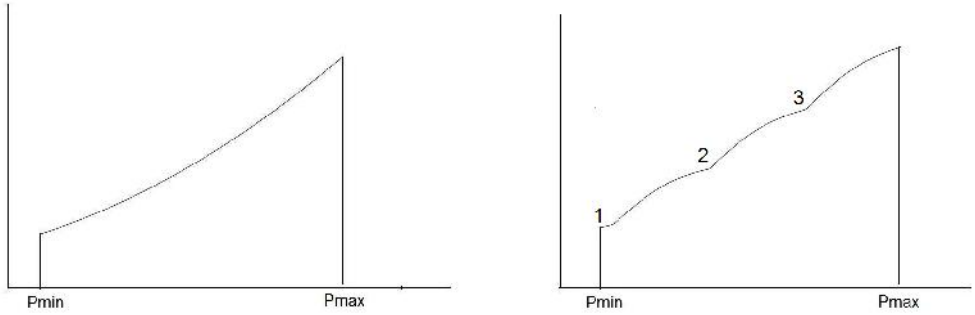

РИСУНОК. Графіки квадратичної та негладкої функцій витрат умовного палива

Задача (1) – (5) є задачею нелінійного програмування, в якій потрібно мінімізувати нелінійну цільову функцію (1) при лінійних обмеженнях (2) – (5). Задача містить $N \times T$ змінних $x_{i,t}$, $T + 2(T-1) \times N$ лінійних обмежень (2), (3) та (4), $N \times T$ двосторонніх обмежень на змінні $x_{i,t}$. Якщо цільова функція (1) включає тільки функції витрат умовного палива вигляду (6), то задачу (1) – (5) будемо називати квадратичною ELD-задачею. Вона є задачею опуклого програмування, яка має єдиний розв'язок. Якщо цільова функція (1) включає хоча б одну із функцій витрат умовного палива вигляду (7), то задачу (1) – (5) будемо називати негладкою ELD-задачею. Їй відповідає задача мінімізації нелінійної неопуклої функції при лінійних обмеженнях, яка у загальному випадку є багатоекстремальною.

2. NLP-програми та ELD-задача (40 енергоблоків, 24 інтервали). Для розв'язання задач нелінійного програмування (Non-Linear Programming) розроблено багато ефективних NLP-програм. Центральні з них можна використовувати, наприклад, через NEOS-сервер [3], який є частиною системи NEOS (Network-Enhanced Optimization System). Система NEOS містить бібліотеку оптимізаційного програмного забезпечення, оптимізаційний сервер для використання цієї бібліотеки в мережі Інтернет, а також необхідну інформацію про програмне забезпечення. NLP-програми знаходяться в секції "Nonlinearly Constrained Optimization" NEOS-сервера. Дев'ять з них підтримують роботу з описом задач нелінійного програмування на мові моделювання AMPL [4]. Це програми: CONOPT 3.15C, filter, Ipopt 3.10.3, KNITRO 9.0.0, LANCELOT, LOQO 7.00, MINOS 5.51, MOSEK і SNOPT 7.2-10.

Наша мета – це дослідження ефективності знаходження розв'язків квадратичної та негладкої ELD-задач за допомогою вказаних дев'яти NLP-програм NEOS-сервера. За їх допомогою для квадратичної ELD-задачі можна знайти глобальний оптимальний розв'язок, а для негладкої ELD-задачі – локально-оптимальний розв'язок, яким будемо вважати найкращий по цільовій функції розв'язок, знайдений із заданої кількості різних стартових точок. Обчислювальний експеримент проводився для ELD-задач з кількістю енергоблоків $N = 40$ та тривалістю планового періоду $T = 24$, що відповідає задачам добового погодинного завантаження енергосистеми з 40 паралельно працюючими енергоблоками. Тестові задачі містять 960 змінних та 1864 обмеження, не враховуючи двосторонніх обмежень на змінні.

Параметри $P_i^{low}, P_i^{up}, UR_i, DR_i$ для всіх сорока енергоблоків та параметри $a_i, b_i, c_i, d_i, \omega_i$ для функцій витрат умовного палива вигляду (6) та (7) взяті із статті [5] та наведені в табл. 1. Серед енергоблоків є дві пари повністю однакових – це енергоблоки **1** і **2** та енергоблоки **27** і **28**. В табл. 1 для них усі параметри збігаються. Остання колонка "k_i" табл. 1 містить кількість вхідних клапанів енергоблоків, які характеризують ефект «пульсації». Кількість вхідних клапанів для енергоблоку дорівнює кількості точок, де квадратична функція (6) збігається з негладкою нелінійною функцією (7). Максимальна кількість вхідних клапанів у **26** енергоблока (**8** клапанів), мінімальна кількість – у **3**, **5**, **6**, **30**, **33**, **34** та **35** енергоблоків (**2** клапани).

Добовий погодинний графік планового навантаження енергосистеми $E = \{E_1, ..., E_{24}\}$ будемо розглядати у двох варіантах $E^{(1)}$ і $E^{(2)}$. Вони задаються наступними векторами:

$E^{(1)}$ = [9000 9200 9600 10000 10400 10800 11000 11200 11400 11500 11600 11600 11500 11400 11200 11200 11400 11980 12000 12200 12200 11600 10000 9000];

$E^{(2)}$ = [7100 6600 6300 6300 6600 7300 8100 8700 9600 10100 10200 10000 9900 9900 10000 10600 11800 12200 11700 11000 10500 10000 8800 7700];

та побудовані таким чином, щоб реалістично відобразити добову динаміку потреб в електроенергії, де пік приходиться на вечірні години. В пікові години для першого графіка використовується майже весь потенціал енергоблоків, а для другого залишаються більші резерви за потужністю енергоблоків.

ТАБЛИЦЯ 1. Характеристики енергоблоків та параметри функцій (6) і (7) [5]

i	P_i^{low}	P_i^{up}	DR_i	UR_i	a_i	b_i	c_i	d_i	ω_i	k_i
1	36	114	120	80	0.0069	6.73	94.705	100	0.084	3
2	36	114	120	80	0.0069	6.73	94.705	100	0.084	3
3	60	120	130	130	0.02028	7.07	309.54	100	0.084	2
4	80	190	130	130	0.00942	8.18	369.54	150	0.063	3
5	47	97	120	80	0.0114	5.35	369.03	120	0.077	2
6	68	140	120	80	0.01142	8.05	148.89	100	0.084	2
7	110	300	120	80	0.01142	8.03	222.33	200	0.042	3
8	135	300	100	65	0.00357	6.99	287.71	200	0.042	3
9	135	300	100	60	0.00492	6.6	391.88	200	0.042	3
10	130	300	100	60	0.00573	12.9	455.76	200	0.042	3
11	94	375	80	80	0.00605	12.9	722.82	200	0.042	4
12	94	375	80	80	0.00515	12.8	635.2	200	0.042	4
13	125	500	80	80	0.00569	12.5	654.69	300	0.035	5
14	125	500	55	55	0.00421	8.84	913.4	300	0.035	5
15	125	500	55	55	0.00752	9.15	1760.4	300	0.035	5
16	125	500	120	80	0.00708	9.15	1728.3	300	0.035	5
17	220	500	120	80	0.00708	7.97	1728.3	300	0.035	4
18	220	500	130	130	0.00313	7.95	647.83	300	0.035	4
19	242	550	130	130	0.00313	7.97	647.81	300	0.035	4
20	242	550	120	80	0.00313	7.97	647.85	300	0.035	4
21	254	550	120	80	0.00313	6.63	785.96	300	0.035	4
22	254	550	120	80	0.00218	6.63	785.96	300	0.035	4
23	254	550	100	65	0.00284	6.66	794.53	300	0.035	4
24	254	550	100	60	0.00284	6.66	794.53	300	0.035	4
25	254	550	100	60	0.00277	7.1	801.32	300	0.035	4
26	254	550	80	80	0.00277	7.1	801.32	300	0.077	8
27	10	150	80	80	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	4
28	10	150	80	80	0.52124	3.33	1055.1	120	0.077	4
29	10	150	55	55	0.52124	6.43	1055.1	120	0.077	4
30	47	97	55	55	0.0114	6.43	148.89	120	0.063	2
31	60	190	120	80	0.0016	6.43	222.92	150	0.063	3
32	60	190	120	80	0.0016	8.95	222.92	150	0.063	3
33	60	190	130	130	0.0016	8.62	222.92	150	0.042	2
34	90	200	130	130	0.0001	8.62	107.87	200	0.042	2
35	90	200	120	80	0.0001	5.88	116.58	200	0.042	2
36	90	200	120	80	0.0001	5.88	116.58	200	0.098	4
37	25	110	120	80	0.0161	5.88	307.45	80	0.098	3
38	25	110	100	65	0.0161	3.33	307.45	80	0.098	3
39	25	110	100	60	0.0161	3.33	307.45	80	0.098	3
40	242	550	100	60	0.00313	7.97	647.83	300	0.035	4

3. Обчислювальний експеримент. Для дев'яти вказаних NLP-програм, які на NEOS-сервері підтримують опис задач нелінійного програмування на мові моделювання AMPL (A Mathematical Programming Language), проведено обчислювальний експеримент з розв'язання квадратичної та негладкої ELD-задач для енергосистеми, яка включає всі сорок енергоблоків із табл. 1. Експеримент складався із двох частин. Перша частина експерименту пов'язана з розв'язанням квадратичних задач для добових погодинних графіків $E^{(1)}$ і $E^{(2)}$, друга – з розв'язанням негладкої задачі для більш напруженого графіка $E^{(1)}$. Для всіх дев'яти NLP-програм використовувались їх параметри, які встановлено за замовчуванням.

У першій частині експерименту два підготовлених AMPL-коди для квадратичної ELD-задачі відправлялися на відповідну NLP-програму до NEOS-сервера. Перший AMPL-код відповідає задачі для добового графіка $E^{(1)}$, другий – для добового графіка $E^{(2)}$. Враховуючи, що кожна квадратична ELD-задача є задачею мінімізації строго опуклої функції при лінійних обмеженнях на змінні, то всі дев'ять програм повинні були знайти її єдиний оптимальний розв'язок. Успішно розв'язали обидві задачі ті вісім NLP-програм, результати для яких наведено в табл. 2. У другій та четвертій колонках наведено f_1^* та f_2^* – мінімальні значення цільової функції для квадратичних задач відповідно з добовими графіками $E^{(1)}$ та $E^{(2)}$. Вони вказані з тією точністю, яку підтримує протокол роботи відповідної NLP-програми. В третій та п'ятій колонках наведено t_1 і t_2 – час (в секундах), який затрачено програмами на розв'язання квадратичних ELD-задач для добових графіків $E^{(1)}$ та $E^{(2)}$, відповідно.

ТАБЛИЦЯ 2. Результати NLP-програм для квадратичної ELD-задачі

NLP-програми	f_1^*	t_1	f_2^*	t_2
CONOPT 3.15C	3021209.491	0.203968	2531441.506	0.25696
filter	3021209.491	0.317951	2531441.506	0.342947
Ipopt 3.10.3	3021209.480	0.169973	2531441.499	0.174972
KNITRO 9.0.0	3021209.491	0.05799	2531441.506	0.107983
LANCELOT	3021209.491	1.19382	2531441.506	1.55476
LOQO 7.00	3021209.510	0.035993	2531441.509	0.048991
MOSEK	3021209.492	5.95209	2531441.511	0.687894
SNOPT 7.2-10	3021209.491	0.19497	2531441.506	0.104983

З табл. 2 видно, що максимальний час для розв'язання квадратичних задач дорівнює 5.95209 секунд. Його затрачує програма **MOSEK** на розв'язання задачі для добового графіка $E^{(1)}$. Програма **LANCELOT** затрачує на розв'язання задач

трохи більше однієї секунди. Затрати по часу для всіх інших програм менше однієї секунди. Найкращою серед них виявилася програма **LOQO 7.00**, перші версії якої були призначені для розв'язання саме задач квадратичного програмування [6].

Програма **MINOS 5.51** не знайшла оптимального розв'язку для обох варіантів задачі. Вона закінчила свою роботу аварійним повідомленням **"the superbasics limit (50) is too small".** Це пояснюється тим, що розміри задач (960 змінних та 1864 обмежень) є достатньо великими для параметрів програми, які встановлені за замовчуванням. Якщо для програми **MINOS 5.51** вказати опцію **"superbasics limit = 200"**, то вона розв'язує обидві задачі: за 0.25496 секунд для першого графіка ($f_1^* = 3021209.491$) та за 0.25496 секунд для другого графіка ($f_2^* = 2531441.506$). У першому випадку програма виконує 2006 ітерацій, а в другому – 2102 ітерацій.

У другій частині експерименту підготовлений AMPL-код для негладкої ELD-задачі з добовим графіком $E^{(1)}$ відправлявся на кожну із дев'яти NLP-програм до NEOS-сервера. AMPL-код включає метод мультистарту, який запускає багаторазовий пошук локальних мінімумів задачі з різних стартових точок. Стартові точки генерувалися випадковим чином за допомогою AMPL-датчика **Uniform** таким чином, щоб забезпечити функцію рівномірного розподілу в інтервалі допустимих значень потужностей енергоблоків $[P_i^{low}, P_i^{up}]$. Після закінчення заданої кількості пошуків локальних мінімумів запам'ятовувався локально-оптимальний розв'язок задачі, тобто розв'язок з найменшим значенням цільової функції.

В табл. 3 наведено результати мультистарту для 10 запусків для тих чотирьох NLP-програм, які при параметрах за замовчуванням змогли знайти локально-оптимальні розв'язки. Усі програми використовували один і той же набір стартових точок. Для них наведено наступні характеристики: f_r^* – найкраще (рекордне) значення цільової функції; f_b^* – найгірше (bad) значення цільової функції; f_a^* – середнє (average) значення цільової функції для десяти запусків програми; t – загальний час (в секундах), затрачений NLP-програмою на розв'язання десяти задач.

ТАБЛИЦЯ 3. Результати NLP-програм для негладкої ELD-задачі

NLP-програми	f_r^*	f_b^*	f_a^*	t
filter	3143565.653	3247201.271	3164358.263	29.27
KNITRO 9.0.0	3150033.276	3167566.453	3158705.770	179.15
LOQO 7.00	3146730.448	3162776.029	3154344.907	131.6
SNOPT 7.2-10	3133932.372	3161519.453	3151777.156	720.72

З табл. 3 бачимо, що найкращою за часом виявилася програма **filter**, а найкращий локально-оптимальний розв'язок знайшла програма **SNOPT 7.2-10** [7]. Інші п'ять програм не розв'язали задачу. Програма **CONOPT 3.15C** аварійно завершилася з повідомленням **"Termination by solver (CONOPT bug)"**. Програма **Ipopt 3.10.3** закінчила обчислення з повідомленням **"Maximum Number of Iterations Exceeded"**. Програма **LANCELOT** завершилася з повідомленням **"SBMIN: maximum number of iterations reached, LANCELOT: too many iterations"**. Програма **MINOS 5.51** закінчила обчислення з повідомленням **"the superbasics limit (50) is too small"**. Програма **MOSEK** відмовилася розв'язувати неопуклу задачу з повідомленням **"MOSEK error: The optimization problem is nonconvex"**.

Висновок. З результатів обчислювального експерименту випливає, що для практичного розв'язання задач добового завантаження енергосистеми з опуклою квадратичною функцією вартості умовного палива можна застосовувати стандартні програми нелінійного програмування з NEOS-сервера. Вони дозволяють в оперативному режимі (за час близько однієї секунди) розв'язувати опуклі ELD-задачі для 40 енергоблоків та 24-х інтервалів планового періоду. Тому в майбутньому AMPL-код для квадратичної задачі з функцією вигляду (6) планується імплементувати в систему Маневр-New [8], яка призначена для розв'язання задач оптимального завантаження енергосистеми.

Негладкі ELD-задачі з функцією вигляду (7), яка враховує ефект «пульсації», виявились досить важкими для розв'язання стандартними програмами нелінійного програмування. Наприклад, програми CONOPT, Ipopt, LANCELOT, MINOS, MOSEK не змогли знайти жодного локально-оптимального розв'язку для задач, які мають 960 змінних та 1864 обмежень. Тому актуальним є застосування r-алгоритму для знаходження оптимальних навантажень енергетичних об'єктів з нелінійними неопуклими функціями вартості умовного палива [9]. Використання r-алгоритму у сполученні з методом мультистарту є перспективним для реалізації алгоритмів розв'язання багатоекстремальних ELD-задач у паралельних обчислювальних системах.

Робота виконана за підтримки НАН України (проекти № 0112U002251 та № 0116U006078).

П.И. Стецюк, А.П. Лиховид, А.В. Фесюк

NLP-ПРОГРАММЫ ДЛЯ ELD-ЗАДАЧ ЗАГРУЗКИ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ

Рассматривается задача оптимальной загрузки энергосистемы с ограничениями на допустимые изменения мощностей энергоблоков для двух нелинейных функций затрат условного топлива: выпуклой квадратичной функции и негладкой невыпуклой функции, которая в процессе генерации электроэнергии учитывает так называемый эффект «пульсации» за счет включения входных клапанов энергоблока. Приведены результаты вычислительных экспериментов по нахождению решений задач с помощью NLP-программ, которые находятся на NEOS-сервере.

P.I. Stetsyuk, O.P. Lykhovyd, O.V. Fesyuk

NLP-PROGRAMS FOR ELD-PROBLEMS OF POWER SYSTEM LOADING

We consider the problem of optimal power system loading with constraints on admissible change of power of units for two non-linear fuel cost functions: convex quadratic function and non-smooth non-convex function, which, in the process of electricity generation, take into account the so-called "ripple" effect caused by opening input valves. We present the results of numerical experiments for finding solutions of the problems using NLP-programs from NEOS-server.

1. *Wood A.J., Wollenberg B.F.* Power Generation, Operation, and Control. 2end Edition. – John Wiley & Sons, 1996. 592 p.
2. *Стецюк П.І., Журбенко М.Г., Лиховид О.П.* Математичні моделі та програмне забезпечення в задачах енергетики. К.: ПП «Ательє Поліграфічний комплекс». 2012. 64 с.
3. *NEOS* Server [Електронний ресурс]: http://www.neos-server.org/neos/.
4. *Fourer R., Gay D., Kernighan B.* AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming. Belmont: Duxburry Press, 2003. 517 p.
5. *Muthu Vijaya Pandian S., Thanushkodi K.* Solving Economic Load Dispatch Problem Considering Transmission Losses by a Hybrid EP-EPSO Algorithm for Solving both Smooth and Non-Smooth Cost Function. *International Journal of Computer and Electrical Engineering*, 2010. Vol. 2, N 3. P. 560 – 568.
6. *Vanderbei R.J.* LOQO: An interior point code for quadratic programming. *Optimization Methods and Software.* 1999. N 12. P. 451 – 484.
7. *Gill P.E., Murray W., Saunders M.A.* SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Review.* 2005. N 47(1). P. 99 – 131.
8. *Фесюк О.В.* Система Маневр-New для знаходження оптимального завантаження енергоблоків. *Інформатика та системні науки (ІСН –2015):* Матеріали VI Все-української науково-практичної конференції за міжнародною участю, 19 – 21 березня 2015 р. Полтавський університет економіки та торгівлі. Полтава. 2015. С. 362 – 364.
9. *Лиховид А.П., Фесюк А.В.* Задачи нахождения оптимальных нагрузок энергетических объектов с нелинейными функциями стоимости. *Теорія оптимальних рішень.* К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. 2014. С. 84–90.

Одержано 22.08.2016

Про авторів:

Стецюк Петро Іванович,
доктор фізико-математичних наук,
завідувач відділу Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
E-mail: stetsyukp@gmail.com

Лиховид Олексій Петрович,
науковий співробітник Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
E-mail: o.lykhovyd@gmail.com

Фесюк Олександр Володимирович,
провідний інженер-програміст Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: alex@alexdevelop.com