КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 004.519.6, 539.3

Б.Е. ПАНЧЕНКО, С.А. ПИЛИПЕНКО

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ SH-ВОЛН С СИСТЕМОЙ ЖЕСТКИХ ТОНКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ВСТАВОК В ПОЛУПРОСТАНСТВЕ

Предложена схема параллельного решения задачи дифракции волн сдвига на системе жестких тонких криволинейных вставок в полубесконечной упругой среде. Задача сведена к решению системы сингулярных уравнений, которая реализована численно с использованием высокоточных схем. Приведены результаты расчета максимальных напряжений в окрестности вставок в зависимости от частоты колебаний и периода решетки отражателей.

Введение. Исследованию проблемы динамического разрушения конструкций должен предшествовать анализ волновых полей в модельных задачах. Учитывая это актуальной проблемой является разработка методов решения динамических задач теории упругости для бесконечных и полубесконечных тел с дефектами [1 – 4].

Большинство имеющихся в литературе исследований относится к задачам дифракции упругих волн на прямых и круговых разрезах. Однако в действительности дефект, как правило, не имеет прямолинейной или круговой формы, и, как показали исследования, его кривизна существенно влияет на величину максимальных контактных напряжений [4, 5].

Значения динамических максимальных контактных напряжений зависят также и от близости дефектов друг к друг, поскольку они всегда попадают в зону действия отраженной волны [5].

Постановка задачи. Рассмотрим упругое изотропное полупространство, ослабленное системой туннельных вдоль оси OZ криволинейных жестких вставок $L_j (j = \overline{1,K})$ (рис. 1), где L_j – простая разомкнутая дуга Ляпунова с началом в точке a_j и концом в точке b_j (предполагаем, что $\cap L_j = 0$). Таким образом, система дефектов не имеет общих точек.

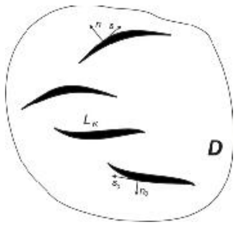

РИС. 1

Известно [4], что на берегах жестких вставок перемещения при переходе через $L = \cup L_j$ непрерывны, а напряжения терпят разрыв. Поэтому на вставке заданы смещения в виде константы:

$$W^{\pm} = \text{const}.$$

Или в более удобном виде

$$\left[\frac{dW}{ds_0}\right]^{\pm} = 0. \qquad (1)$$

Традиционно верхний знак соответствует левому берегу вставки при движении от его начала к концу.

Пусть из бесконечности излучается монохроматическая волна сдвига, нормаль к фронту которой составляет угол ψ с осью OX (зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$):

$$U_0 = \tau e^{-i\gamma(x_1 \cos\psi_0 + x_2 \sin\psi_0)}, \quad \tau = \text{const}, \; \gamma = \frac{\omega}{c}, \; c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \qquad (2)$$

Здесь ω – частота колебаний, c – скорость распространения волны сдвига, μ – модуль сдвига, ρ – плотность среды, зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$.

В результате взаимодействия падающей W_0 волны со вставками и границей полупространства возникает сложное волновое поле $W = W_1 + W_z$, где W_1 – поле, отраженное от вставок, а W_z – поле, отраженное от границы. W удовлетворяет уравнению антиплоской деформации [3, 4].

$$\Delta W + \gamma_2^2 W = 0, \; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \qquad (3)$$

Решение антиплоской задачи динамической теории упругости сводится к определению функции $W_1(x, y)$ – решения уравнения Гельмгольца (3) в плоскости с системой вставок при выполнении условий типа Зоммерфельда излучения на бесконечности и дополнительного условия [3, 4].

Рассматривается три варианта среды: неограниченное пространство ($A = 0$); полупространство с границей $y = 0$, свободной от сил ($A = -1$); полупространство с защемленной границей $y = 0$ (A=1).

$$A = -1: \quad \sigma_y\Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial W}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0;$$

$$A = 1: \quad W\Big|_{y=0} = 0. \qquad (4)$$

Математическая модель. Следуя [5], запишем функцию $W(x, y)$, характеризующую рассеянную разрезами волну перемещений в области D, в виде потенциала простого слоя:

$$W = \int_L p(s) H_0^{(1)}(\gamma r) ds - AW_z, \ W_z = \tau e^{i\gamma y}, \ p(s) = \left[\frac{\partial W}{\partial n}\right]. \quad (5)$$

Здесь $H_n^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода n -го порядка; $p(s)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая на L условию Гельдера.

Функция $W(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3), условиям излучения на бесконечности [3, 4], обеспечивает непрерывность перемещения и граничными условиями на границе $y = 0$.

Для совокупности жестких вставок характерно то, что главный вектор усилий, возникающих на берегах L, равен нулю [4]. Эту закономерность выберем в качестве дополнительного условия [3 – 6] для неизвестной функции $p(s)$:

$$\int_L p(s) ds = 0. \quad (6)$$

Известно, что такая схема решения сводит рассматриваемую краевую задачу к системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) относительно неизвестной функции $p(s)$ [4 – 6]:

$$\int_L [g(\zeta_0, \zeta) + G(\zeta_0, \zeta)] p(s) ds = N(\zeta_0), \ g(\zeta_0, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i\phi_0}}{\zeta - \zeta_0}\right\},$$

$$G(\zeta_0, \zeta) = \frac{\gamma}{4i}\left(\left(H_1(\gamma r_0) - \frac{2}{i\pi\gamma_2 r_0}\right)\cos(\phi_0 - \alpha_0) - A\left(H_1(\gamma r_{10}) - \frac{2}{i\pi\gamma_2 r_{10}}\right)\cos(\varphi_0 - \alpha_{10})\right)$$

$$N(\zeta_0) = \tau i\gamma (e^{-i\gamma\eta_0}) \sin\varphi_0,$$

$$\zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \varphi_0 = \varphi(\zeta_0), \ \zeta = \xi + i\eta, \ \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L. \quad (7)$$

Для однозначной разрешимости системы СИУ (7) к ней следует присовокупить дополнительное условие (6).

Численная реализация. Представим контур L в параметрической форме:

$$\zeta = \zeta(\beta), \ \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \ -1 \le \beta, \ \beta_0 \le 1, \ \zeta(-1) = a_j, \ \zeta(+1) = b_j. \quad (8)$$

Численная реализация проводилась методом механических квадратур. Представим неизвестную плотность $\Omega(\beta)$ интегрального уравнения (7) как совокупность функций $\Omega_j(\beta^j)$, определенных на контурах $L_j, j = \overline{1, K}$. Численная реализация интегрального уравнения проводится методом механических квадратур [3, 4]. Уравнение, соответствующее контуру L_p, удовлетворяется в узлах Чебышева второго рода $\theta_m = \frac{\pi m}{n_p}$ $(m = \overline{1, n_p - 1})$ и сводится к системе алгебраических уравнений относительно значений функции $\Omega_j(\beta)$ в узлах Чебышева первого рода $\theta_k = \frac{2k-1}{n_j}\pi$ $(k = \overline{1, n_j})$, где n_j – число точек разбиения контура L_j.

Для исследования сходимости построенного алгоритма рассмотрен случай нормального падения волны сдвига [3] на систему, состоящую из параболических вставок, расположенных в упругом пространстве на одинаковом расстоянии одна от другой и симметрично ориентированных вдоль оси Ox (рис. 2). Однако число вставок справа и слева от центральной не является обязательно равным ($L_{-T} \neq L_K$).

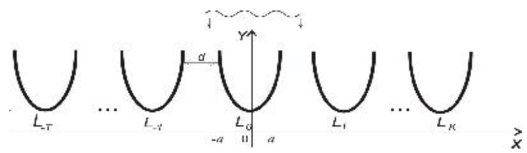

РИС. 2

Таким образом, задача сведена к системе СИУ, которая решается численно. Элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), к которой, в конечном итоге, сводится система СИУ, являются результатом дискретизации контуров [3 – 6]. Очевидно, что размер матрицы пропорционален числу дефектов. Применим распараллеливание алгоритма [5 – 7], в котором каждый элемент матрицы определяется координатами узлов дискретизации.

Как показано в [5, 6], данный метод в вычислительном смысле сводится к обходу каждого контура по точкам коллокации внеинтегральной переменной ζ_{k0} и одновременному же обходу каждого контура по аналогичным либо иным узлам переменной интегрирования ζ_k.

В работе определялись зависимости величины максимальных контактных напряжений жесткой вставки $\delta = |\Omega(\pm 1)| / 2\tau\gamma\sqrt{ls'(\pm)}$ от значения волнового числа волны из бесконечности. Здесь τ – амплитуда нагрузки, γ – волновое число, l – полудлина контура, т. е. $L = 2l$. Кривые имеют вид параболы. Для центральной неоднородности уравнение имеет вид $x = p_1\beta$, $y = p_2\beta^2$.

Для проверки достоверности алгоритма проведены два теста: удаление трех неоднородностей на расстояние 10^6 их длины друг от друга и насыщение системы [4 – 6] при увеличении числа геометрически равных отражателей в системе до 13 – 15. При удалении – характеристики каждого отражателя стремятся к характеристикам одиночного. В случае увеличения числа дефектов (расположенных периодично и параллельно фронту набегающей волны) – для большинства отражателей характеристики совпадают, задача сводится к периодической. Отклонения значений обнаруживаются только у крайних отражателей.

На рис. 3 – 4 показана зависимость величины $\delta = \delta_a$ от γl для любой из трех жестких параболических вставок, где $p_1 = 1$, $p_2 = 0.5$ (рис. 3) и $p_2 = -0.5$ (рис. 4). Отражатели расположены над осью Ox на высоте $l / h = 0.5$ и находятся друг от друга на расстоянии 10^6. Кривые 1, 2, 3 отвечают случаям бесконечного пространства, а также полупространств со свободной от сил и защемленной границей соответственно. Зависимости полностью совпадают с аналогичными из работы [4]. Кривая 1 также совпадает с аналогичной кривой из работы [6].

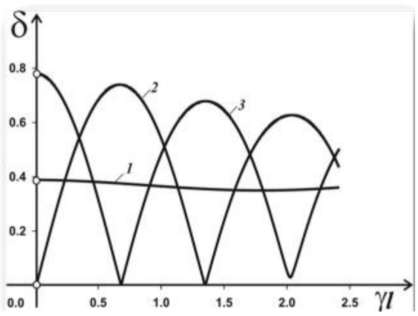

РИС. 3

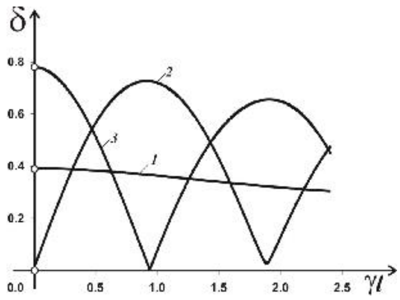

РИС. 4

На рис. 5 показана зависимость величины $\delta = \delta_a$ от $q = L\gamma / \pi$ для центральной параболической вставки из тринадцати объектов, где $p_1 = 1$ и $p_2 = 0.5$, что полностью совпадает с результатом для периодической задачи из [8].

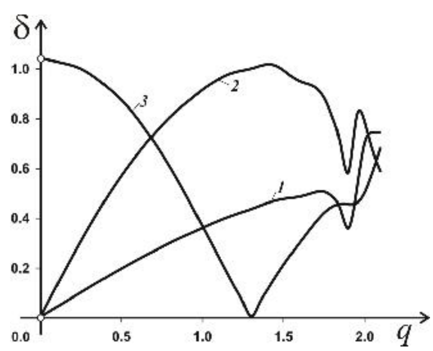

РИС. 5

На рис. 6 – 9 показана зависимость асимптотики контактных напряжений от $q = \gamma l$ для крайнего левого объекта (рис. 6 – 7) и для центрального объекта (рис. 8 – 9). Кривые 1, 2, 3 отвечают случаям A = 0, A = –1, A = 1 соответственно, коэффициент кривизны параболы равен 0,5 для рис. 6 – 8 и – 0,5 для рис. 7 – 9. Число отражателей – 9, высота подъема над границей равна $h = 2, 3$, а расстояние $l = 4$.

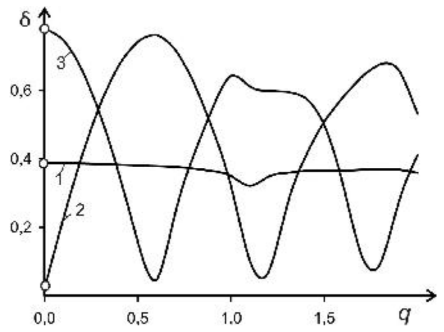

РИС. 6

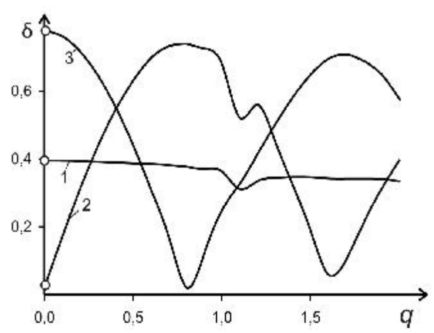

РИС. 7

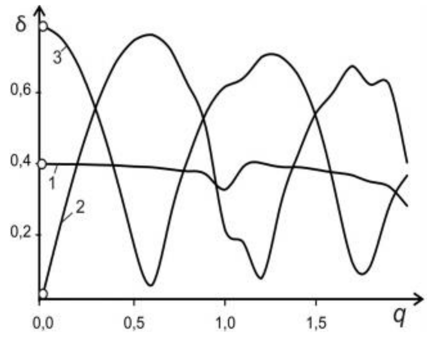

РИС. 8

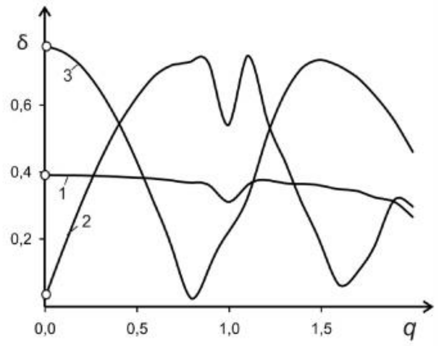

РИС. 9

В задаче дифракции SH-волны на системе жестких вставок параллельные алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля. Сочетание метода СИУ, снижающего на единицу размерность задачи, и значительная экономия времени вычислений за счет распараллеливания вычислительных процедур приводит к существенному увеличению эффективности предложенного алгоритма. При увеличении числа дефектов в системе обнаруживается эффект насыщения и задача сводиться к периодической.

Б.Є. Панченко, С.О. Пилипенко

ВЗАИМОДІЯ SH-ХВИЛЬ З СИСТЕМОЮ
ЖОРСТКИХ ТОНКИХ КРИВОЛІНІЙНИХ ВСТАВОК У НАПІВПРОСТОРІ

Запропоновано схему високоточного паралельного розв'язання задачі дифракції акустичних хвиль на системі жорстких тонких криволінійних вставок у напівпросторі. Задачу зведено до розв'язання сингулярних рівнянь, які реалізуються чисельно. Наведено залежності максимальних напружень від динамічних та геометричних характеристик.

B.E. Panchenko, S.O. Pylypenko

INTERACTION OF SH-WAVES WITH THE SYSTEM OF SOLID THICK CURVILINEAR INSERTS IN SEMI-INFINITE SPACE

A parallel algorithm for numerical solution for elasticity dynamic problem on the interaction of the harmonic SH-wave system with non-circular defects in a semi-infinite elastic medium is proposed. The boundary-value problem is reduced to a system of singular integral equations that are implemented using high-precision numerical schemes. The results of calculation of the maximum stress in the vicinity of the inserts depending on the oscillation frequency and on the period of reflector grid are provided.

1. *Агапов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. М.: АСВ, 2000. 152 с.
2. *Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В.* Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. Київ: Наук. думка, 1985. 136 с.
3. *Фильштинский Л.А.* Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (деформация продольного сдвига). *Докл. АН СССР*. 1977. № 6. С. 1327 – 1330.
4. *Назаренко А.М.* Решение некоторых задач теории упругости для полупространства с туннельными трещинами-разрезами или вставками: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков, ХПИ, 1984. 140 с.
5. *Панченко Б.Е., Назаренко А.М.* Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 1. С. 172 – 187.
6. *Назаренко А.М., Панченко Б.Е, Пилипенко С.А.* Схема параллельного решения задачи дифракции SH-волны на системе некруговых жестких вставок в бесконечной упругой среде. *Вісник Черкаського університету*. 2013. № 38(291). С. 82 – 87.
7. *Химич А.М., Полянко В.В.* Эффективность двумерных блочно-цикличных параллельных алгоритмов. *Проблеми програмування*. 2008. № 3. С. 145 – 149.
8. *Назаренко А.М.* Дифракция волны продольного сдвига на периодической системе жестких включений в полупространстве. *Динамика и прочность машин*. Харьков, 1983. С. 42 – 45.

Получено 21.09.2016

Об авторах:

Панченко Борис Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Пилипенко Светлана Александровна,
аспирантка Сумского государственного университета.