КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, А.А. СИРКУ, С.-Б. СУЛЕЙМАНОВ

МОДЕЛІ АНАЛІЗУ ОХОПЛЕННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ДАНИХ

При аналізі охоплення даних враховується різна їхня можлива природа – некерованість, недискреційність, категоріальність, ординальність, неточність.

Вступ. Традиційні моделі аналізу охоплення даних (data envelopment analysis, DEA) загалом стосуються однорівневих ситуацій, в яких бажано оцінювати стан ефективності кожного елемента даної множини n підрозділів прийняття рішень (decision making units, DMUs) у даний момент часу [1, 2]. Ситуації вимірювання ефективності можна вважати багаторівневими. З багаторівневих моделей DEA виділяють багатоетапні послідовні моделі, зокрема, мережеві моделі DEA. Останні ґрунтуються на понятті підтехнологій загальної технології даного DMU [3], які дозволяють детальніше вивчати внутрішні операції виробничого процесу та краще розуміти цей процес. Виділяють загальні мережеві моделі – статичну, динамічну, освоєння технології [4 – 6]. У статичній моделі пов'язуються елементи скінченної множини підтехнологій (діяльностей), утворюючи мережу. Ця модель дозволяє аналізувати розміщення проміжних продуктів. У прикладі [4] вхідний продукт x генерує вихідний продукт y, використовуючи деякі проміжні продукти (intermediate products) p^1, p^2, p^3, причому p^1, p^2 – це проміжні продукти для продукту p^3.

Динамічна модель дозволяє контролювати послідовність технологій виробництва, де рішення на одному етапі (проміжку часу) впливає на подальші етапи. При цьому проміжні продукти – це виходи попередніх і входи наступних етапів.

Модель освоєння технології дозволяє, серед іншого, контролювати виробництво на різних процесорах (машинах). Розподіл входів серед процесорів дозволяє визначати (вибирати) підходящу технологію.

Є підходи DEA для контролю за ланцюгами постачання від покупця до постачальника з оцінюванням їхньої ефективності. Важливо оцінювати ефективність не лише окремих частин такого ланцюга, але й ланцюга в цілому. При цьому рекомендоване поліпшення ефективності для однієї частини ланцюга може призвести до зменшення ефективності його інших частин. Розроблено підходи до моделювання двоетапних процесів [7, 8]. У прикладі [9] ланцюг постачання включає вхід x_S до продавця (seller) та вихід y_S від продавця, причому y_S є входом до покупця (buyer), а також вихід y_B від покупця і ще один вхід x_B до покупця. У цьому прикладі вимірюються загальна ефективність ланцюга й ефективність кожного елемента ланцюга.

Ряд моделей ланцюгів постачання оснований на теоретико-ігрових кооперативних і некооперативних підходах [10]. В останніх продавець вважається лідером, а покупець – послідовником: на першому етапі максимізує свою ефективність лідер, а на другому – послідовник, причому на другому етапі послідовник обмежений діями, що не змінюють значення ефективності лідера, досягнуте на першому етапі. Такий підхід зводиться до задачі нелінійного параметричного програмування. У кооперативних підходах немає лідера чи послідовника.

Вищезазначені багаторівневі постановки спрямовані загалом на послідовні процеси. У багатьох ситуаціях під множинністю компонентів розуміють паралельність роботи цих компонентів. При дослідженні ефективності роботи банківської філії у загальній її діяльності виділяються діяльність з продажу та послуг [11]. Оскільки аналіз кожного виду діяльності ускладнюється тим, що вони мають спільні входи (трудові ресурси), то пропонуються модель агрегованої (загальної) ефективності з оцінюванням ефективності кожного компонента [11, 12] та модель декомпозиції міри ефективності [13].

Деякі ситуації багаторівневого вимірювання ефективності включають ієрархічні чи вбудовані структури. Наприклад, кожна електростанція з даної множини складається з окремих енергогенераторів [14, 15], які можна вважати DMUs 1 рівня. Водночас, на наступному рівні ієрархії, електростанції є DMUs 2 рівня. На кожному рівні ієрархії розглядаються свої входи і виходи. При вимірюванні ефективності екіпажів експлуатації доріг окремі патрулі 1 рівня формують районні групи 2 рівня, які, в свою чергу, формують регіональні групи 3 рівня [16].

Література з DEA містить багато робіт стосовно обмежень на множники (зважування входів і виходів) [1]. Деякі ці обмеження є непрямими, бо випливають з аналізу їхніх граней. У перших таких роботах вводилися абсолютні верхні та нижні межі [17] на множники v_i входів і множники μ_r виходів [1], наприклад, при вимірюванні ефективності екіпажів експлуатації доріг [16, 18]. Оскільки ці межі залежать від масштабів, обраних для змінних входів і виходів, то є сенс дослідити спочатку модель DEA без обмежень на множники.

Дослідження великих галузевих банків виявило потребу в обмеженнях на множники [19]. Тому запропоновано ввести для множників лінійні обмеження, які задають опуклий конус. Допустима область для вектора $(v_1,...,v_m)$ множників входів визначається через поліедральний опуклий конус V, який є множиною всіх векторів $\vec{v}$, побудованих на множині з k допустимих (admissible) векторів $\vec{a}_l$, $l=1,...,k$: $\vec{v}=\sum_{l=1}^{k}\alpha_l\vec{a}_l$, $\alpha_l \ge 0$, $l=1,...,k.$

Позначаючи U аналогічний поліедральний опуклий конус для вектора $(\mu_1,...,\mu_s)$ множників виходів, приходимо до моделі авторів Charnes, Cooper, Rhodes (CCR) роботи [20] з конічними відношеннями [1].

$$e_0 = \max_{\mu_r, v_i} \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0},$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \le \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \quad \forall j = 0,...,n, \ \vec{v} \in V, \ \vec{\mu} \in U.$$

Цій моделі відповідає двоїста [19]. Крім того, цю модель можна узагальнювати, вводячи зв’язуючі конуси між конусами V та U на прикладі вугільних шахт штату Іллінойс США [21].

Ідею конічних відношень застосовує поняття області впевненості (assurance region, AR) [22, 23]. Це поняття розроблене для того, щоб не допускати великих відмінностей у значеннях множників входів (виходів), вводячи верхні та нижні межі на відношення множників входів (виходів).

Загалом введення меж на величини чи відношення множників, введення конічних відношень погіршує значення ефективності. Зазначимо, що у прикладі 2 [1] нахили граней пов’язані з відношеннями множників входів. Якщо ввести межі на відношення множників, то деякі нахили не будуть допустимими, межа ефективності стане прямішою (матиме меншу кривизну), а точка (DMU) D може не бути ефективною [24].

Застосування поняття AR ведуть до різних моделей DEA, вказуючи підходящі межі на множники. Наприклад, при вивченні ефективності банківських філій виходами є різні класи трансакцій філії (внесення чи зняття грошей тощо), а множниками цих виходів є проміжки часу (в хвилинах або годинах) для виконання трансакцій [11]. Хоча величини цих проміжків є різними для різних філій або працівників, можна встановлювати верхні та нижні межі таких величин.

Поняття AR узагальнюється через глобальні обмеження на множники для кожного DMU [25, 26]. Наприклад, якщо вхід 1 становить у загальному зваженому вході довільного DMU не менше 10 % і не більше 20 %, то таким глобальним обмеженням буде

$$0.1 \le v_1 x_{1j} \left(\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \right)^{-1} \le 0.2 \quad \forall \quad j = 1, ..., n .$$

У моделі DEA з контекстно-залежною областю впевненості (context-dependent assurance region) моделі CAR-DEA – обмеження на відношення множників можуть бути різними для різних підмножин DMUs [27]. Зважаючи на потенційну несумісність цих обмежень, бажано визначати певний вхід (вихід) одиницею виміру для всіх входів (виходів) і переходити від груп обмежень AR (для підмножин DMUs) до єдиної множини обмежень AR для всіх DMUs [28].

Дослідження ідентифікації та розширення граней намагалися з’ясувати обставини появи нульових ваг (ε -ваг) множників. Ці дослідження зводилися до проекції слабко ефективних або неповновимірних граней. В аналізі обмежених граней (constrained facet analysis, CFA), при проектуванні DMU на слабко ефективну грань, розширюється вибрана Парето-ефективна (повновимірна) грань, на яку проектується даний DMU [29]. У CFA застосовують двохетапний підхід з пошуком повновимірної грані, на яку найкраще проектувати даний DMU [30 – 32]. У трьохетапному підході [31] на 1 етапі розв’язується стандартна модель CCR, щоб знайти повну множину $E \cup E'$ ефективних DMUs, де E – множина екстремальних ефективних DMUs (країв граней), E' – множина неекстремальних ефективних DMUs (внутрішностей граней). На 2 етапі ця повна множина ділиться на дві підмножини [33]. На 3 етапі розв’язується задача змішаного цілочисельного програмування

$$e_0 = \max_{\mu_r,\ \nu_i, z_j} \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0},$$

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \le \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} \quad \forall\, j \in E ,$$

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \ge \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} - M\, z_j \quad \forall\, j \in E , \qquad M >> 0 ,$$

$$z_j \in \{0,1\} \quad \forall\, j \in E , \qquad \sum_{i=1}^{m} \neg_i x_{i0} = 1, \qquad \sum_{j \in E} z_j = |E| - (m + s - 1),$$

$$\mu_r \ \ge 0 \le \neg_i \quad \forall\ r = 1, \ldots, s ,\ \forall\ \ i = 1, \ldots, m .$$

Ця гранева модель гарантує, що рівно $(m + s - 1)$ з $(m + s)$ обмежень задовольнятимуться як рівності. Тоді якнайбільше одна змінна нев’язки буде додатною, всі змінні μ_r, $\neg_i$ будуть додатними, а даний DMU проектуватиметься на повновимірну грань.

При розширенні граней для усунення слабко ефективних проекцій можуть генеруватися нові DMUs, які не входили у множину спостережуваних. Такі DMUs визначаються перетинами розширених граней і променів від початку координат до DMUs, які не є відповідно охопленими [1]. Процедура генерації нових неспостережуваних DMUs дає засоби розширення спостережуваних граней [26]. Така процедура зводиться до отримання інформації від особи, яка приймає рішення, про оцінки взаємозаміни між наборами факторів.

У структурі DEA можна поєднувати як стандартні DMUs [34], так і стандарти виробництва [35].

Загалом у моделі DEA s виходів $\{y_{rj}\}_{r=1}^{s}$ генеруються m входами $\{x_{ij}\}_{i=1}^{m}$. У прямій задачі охоплення вважається, що всі входи мають радіальну проекцію на ефективну межу, всі змінні є чисельними, а набір оцінюваних DMUs є порівняно однорідною групою (кожний DMU можна порівняти з будь-яким іншим DMU цієї групи). З появою нових застосувань моделі DEA стало за потрібне узагальнювати її припущення і структуру, зокрема, припущення щодо змінних.

У багатьох застосуваннях DEA певні вхідні змінні можуть не бути під повним контролем менеджменту. Наприклад, при аналізі DEA ефективності банківських філій така вхідна змінна, як фіксовані витрати (на оренду, комунальні послуги тощо), не змінюється пропорційно подібно до змінних витрат (на персонал). Тому серед усіх m вхідних змінних важливо розрізняти підмножину D дискреційних (discretionary) змінних (таких, як витрати на персонал) та множину ND недискреційних (non-discretionary) змінних (таких, як фіксовані витрати банківської філії).

У задачі лінійного програмування мінімізації (модифікації задачі (2) [1])

$$\min_{\lambda_j, s_i^-, s_r^+} \theta_0 - \varepsilon\left(\sum_{i\in D} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) \qquad (1)$$

без обмежень для θ_0 та при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0},\ i\in D,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0},\ i\in ND, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0},,\ r=1,\ldots,s,$$

$$\lambda_j,\ s_i^-,\ s_r^+ \ge 0\ \ \forall\, j=1,\ldots,n,\ i=1,\ldots,m,\ r=1,\ldots,s,$$

недискреційні вхідні змінні x_{i0}, $i\in ND$, не множаться на θ_0 [36].

Задачі мінімізації відповідає двоїста задача максимізації

$$\max_{\mu_r, \nu_i} \sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{r0} - \sum_{i\in ND} v_i x_{i0},$$

$$\sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{rj} \le \sum_{i=1}^{m}\nu_i x_{ij} \quad \forall\ j = 1,\dots,n\,,$$

$$\mu_r \ge \varepsilon \le \nu_i \quad \forall\ r = 1,\dots,s\,,\ \forall\ \ i \in D, \tag{3}$$

$$v_i \ge 0 \quad \forall\ \ i \in ND\,. \tag{4}$$

При обмеженні (4) замість другого обмеження (3) маємо модифіковану цільову функцію (1) [24]. Іноді модель [36] може переоцінювати технічну ефективність, коли референтна множина не виключає недопустимих точок виробництва [37]. Щоб виключати такі точки з референтної множини, у підході ваги для виробничих можливостей при вищих вхідних значеннях x_{ij}, $i \in ND$, вважаються нульовими. Цей підхід дозволяє краще оцінювати ефективність [38 – 41].

Оскільки в цільовій функції (1) недискреційні нев'язки s_i^-, $i \in ND$, можуть бути додатними, то значення недискреційної змінної для оптимуму DMU 0 як лінійної комбінації інших DMUs може бути меншим, ніж значення цієї недискреційної змінної для спостережуваного DMU 0. Коли значення деяких входів (і виходів) залишаються на фіксованих рівнях, то порівнюють DMUs з лінійними комбінаціями на рівнях цих факторів, а ці фактори (змінні) вважають некерованими. Позначаючи N_1 і N_2 число некерованих входів і виходів відповідно, позначаючи $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$ число керованих (регулярних) входів і виходів відповідно, маємо модель DEA

$$\min_{\lambda_j, s_i^-, s_r^+} \theta_0 - \varepsilon\left(\sum_{i\in\overline{N}_1} s_i^- + \sum_{r\in\overline{N}_2} s_r^+\right)$$

без обмежень для θ_0 та при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_0 x_{i0},\ \ i \in \overline{N}_1\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} = x_{i0},\ \ i \in N_1\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0},\ \ r \in \overline{N}_2\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} = y_{r0},,\ \ r \in N_2\,,$$

$$\lambda_j,\ \ s_i^-,\ \ s_r^+ \ge 0 \quad \forall\ j = 1,\dots,n\,,\ i \in \overline{N}_1\,,\ r \in \overline{N}_2\,.$$

Інколи DMUs належать до різних природних категорій. Це стосується, наприклад, оцінювання множини роздрібних установ, які працюють за різними рівнями конкуренції. Тоді DMU даної категорії слід порівнювати з тими DMUs, які не належать до сприятливіших категорій [42].

У відповідній моделі розрізняють регулярні керовані входи x_{ij}, $i = 1, \ldots, m'$, категоріальні входи x_{ij}, $i = m'+1, \ldots, m$ [43]. Якщо категоріальна змінна x_{ij} не є керованою менеджментом, то її замінюють множиною бінарних змінних d_{ij}^k, $k = 1, \ldots, K_i$, де K_i – відповідна кількість категорій. Упорядковуючи категорії від більш до менш сприятливих, вважаємо, що DMU належить категорії k_l (найсприятливішою є категорія $k = 1$), коли $d_{ij}^k = 1$ при $k \le k_l$ і $d_{ij}^k = 0$ при $k > k_l$. Тоді обмеження (2) замінюють множиною нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j d_{ij}^k \le d_{il}^k, \ \ k = 1, \ldots, K_i,$$

а даний DMU порівнюють лише з іншими DMUs тієї самої чи менш сприятливої категорії. Отже, у випадку керованої категоріальної змінної пропонується змішана цілочислова задача лінійного програмування [43], яка має недоліки [44]. У випадку вхідних і вихідних категоріальних змінних цілочислову задачу можна зводити до зручніших задач лінійного програмування [45].

Хоча загалом моделі DEA основані на множині числових (кардинальних) вхідних і вихідних змінних, іноді варто брати до уваги нечислові (ординальні) фактори чи дані. Таким фактором є, наприклад, компетентність менеджменту. Тоді DMUs можна впорядковувати за цим фактором. На практиці часто неможливо адекватно забезпечувати точнішу числову міру для подібного фактора.

У перших моделях DEA вважалося, що DMU k за рангом або порядком виходу r належить до певного класу $\delta \le n$, а значення виходу чи вартості становить $y_r(\delta)$ [46, 47]. Досліджувалася структура DEA при так званих неточних даних [48]. Рангова модель [49] узагальнювалася [50]. При розробці аналізу охоплення неточних даних (imprecise DEA, IDEA) головну увагу звертають на дані про ранг і порядок. Такі дані обробляють для застосування у дискретних і неперервних моделях [51], зберігаючи методологію DEA.

У DEA зазвичай кращими вважаються DMUs з більшими обсягами виходів при менших обсягах входів. Проте у деяких ситуаціях виходами DMU можуть бути небажані відходи (рівні забруднення повітря внаслідок роботи електростанції) [52 – 55]. При моделюванні небажаних факторів застосовуються їхні лінійні перетворення, функції відстані за напрямом, модифікації непараметричних методів оцінювання тощо [56].

В.М. Горбачук, А.А.Сырку, С.-Б.Сулейманов

МОДЕЛИ АНАЛИЗА ОХВАТА НЕСТАНДАРТНЫХ ДАННЫХ

При анализе охвата данных учитывается разная их возможная природа – неуправляемость, недискреционность, категориальность, ординальность, неточность.

V.M. Gorbachuk, A.A. Syrku, S.-B.Suleimanov

THE MODELS OF NONSTANDARD DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

In the data envelopment analysis, their different possible nature, such as non-controllability, non-discretionality, categoriability, ordinality, and inaccuracy, is taken into account.

1. *Горбачук В.М., Сирку А.А., Сулейманов С.-Б.* Основи аналізу охоплення даних. *Вісник Одеського національного університету. Економіка*. 2017. Т. 22. Вип. 1 (54). С. 178 – 182.
2. *Горбачук В.М., Сирку А.А., Сулейманов С.-Б.* Ірраціональність і раціональність у прийнятті рішень. *Економічний вісник Запорізької державної інженерної академії*. 2017. Вип. 2 (08). Ч. 2. С. 132 – 136.
3. *Fare R., Grosskopf S.* Intertemporal production frontiers: with dynamic DEA. Boston, MA: Kluwer Academic, 1996.
4. *Fare R.S., Grosskopf S.* Network DEA. *Socio-economic journal*. 2000. 5(1 – 2). P. 9 – 22.
5. *Fare R.S., Grosskopf S., Lovell C.A.K.* Production frontiers. Cambridge University Press, 1994.
6. *Fare R.S., Lovell C.A.K.* Measuring the technical efficiency of production. *Journal of economic theory*. 1978. **19.** P. 150 – 162.
7. *Seiford L.M., Zhu J.* Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks. Management science. 1999. 45(9). P. 1270 – 1288.
8. *Chen Y., Zhu J.* Measuring information technology's indirect impact on firm performance. *Information technology & management journal*. 2004. 5(1 – 2). P. 9 – 22.
9. *Zhu J.* Quantitative models for performance evaluation and benchmarking: data envelopment analysis with spreadsheets. Kluwer Academic Publishers, 2003.
10. *Liang L.F., Yang F., Cook W.D., Zhu J.* DEA models for supply chain efficiency evaluation. *Annals of operations research*. 2006. 145(1). P. 35 – 49.
11. *Cook W.D., Hababou M., Tuenter H.* Multi-component efficiency measurement and shared inputs in data envelopment analysis: an application to sales and service performance in bank branches. *Journal of productivity analysis*. 2000. 14. P. 209 – 224.
12. *Kirilyuk V.S., Norkin V.I., Domrachev V.N.* A Nonparametric index approach for estimating subjects of financial market by profitability-risk criterion by example of commercial banks. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2002. 34(12). P. 36 – 45.
13. *Portela M., Thanassoulis E.* Developing a decomposable measure of profit efficiency using DEA. *Journal of the Operational Research Society*. 2007. 58(4). P. 481 – 490.
14. *Cook W.D., Chai D., Doyle J., Green R.H.* Hierarchies and groups in DEA. *Journal of productivity analysis.* 1998. **10**. P. 177 – 198.
15. *Cook W.D., Green R.H.* Evaluating power plant efficiency: a hierarchical model. *Computers and operations research.* 2005. **32**. P. 813 – 823.
16. *Cook W.D., Roll Y., Kazakov A.* A DEA model for measuring the relative efficiency of highway maintenance patrols. *INFOR*. 1990. **28**. P. 113 – 124.
17. *Dyson R.G., Thanassoulis E.* Reducing weight flexibility in DEA. *Journal of Operational Research Society.* 1988. 39(6). P. 563 – 576.
18. *Roll Y., Cook W.D., Golany B.* Controlling factor weights in data envelopment analysis. *IIE transactions*. 1991. 23. P. 2 – 9.
19. *Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.L.* Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*. 1978. 2(6). P. 429 – 444.
20. *Charnes A., Cooper W.W., Huang Z.M., Sun D.B.* Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks. *Journal of econometrics*. 1990. **46**. P. 73 – 91.
21. *Thompson R.G., Dharmapala S., Thrall R.M.* Linked-cone DEA profit ratios and technical inefficiencies with applications to Illinois coal mines. *International journal of production economics.* 1995. 39. P. 99 – 115.

22. *Thompson R.G., Singleton Jr. F.D., Thrall R.M., Smith B.A.* Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas. *Interfaces*. 1986. 16. P. 35 – 49.
23. *Thompson R.G., Langemeir L.N., Lee C., Lee E., Thrall R.M.* The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. *Journal of econometrics*. 1990. **46**. P. 93 – 108.
24. *Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K.* Introduction to data envelopment analysis and its uses. Springer, 2006.
25. *Allen R., Athanasopoulos A., Dyson R.G., Thanassoulis E.* Weights restrictions and value judgments in data envelopment analysis: evolution, development and future directions. *Annals of operations research*. 1997. **73**. P. 13 – 34.
26. *Thanassoulis E., Allen R.* Simulating weights restrictions in data envelopment analysis by means of unobserved DMUs. *Management science*. 1998. 44(4). P. 586 – 594.
27. *Cook W.D., Zhu J.* CAR-DEA: context dependent assurance regions in DEA. *Operations research.* 2008. 56(1). P. 69 – 78.
28. *Cook W.D., Zhu J.* Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis. *European journal of operational research*. 2007. 180(2). P. 692 – 699.
29. *Bessent A., Bessent W., Elam J., Clark T.* Efficiency frontier determination by constrained facet analysis. *Journal of Operational Research Society*. 1988. **36**. P. 785 – 796.
30. *Lang P., Yolalan O.R., Kettani O.* Controlled envelopment by face extension in DEA. *Journal of Operational Research Society*. 1995. 46(4). P. 473 – 491.
31. *Green R., Doyle J., Cook W.D.* Efficiency bounds in data envelopment analysis. *European journal of operational research*. 1996. **89**. P. 482 – 490.
32. *Olesen O.B., Petersen N.C.* Indicators of ill-conditioned data sets and model misspecification in data envelopment analysis: an extended facet approach. *Management science.* 1996. 42(2). P. 205 – 219.
33. *Charnes A., Cooper W.W., Thrall R.M.* Classifying and characterizing inefficiencies in data envelopment analysis. Operations research letters. 1986. 5/3. P. 105 – 110.
34. *Golany B., Roll Y.* Incorporating standards via data envelopment analysis. *Data envelopment analysis: theory, methodology and applications*. A. Charnes, W.W. Cooper, A. Lewin, L. Seiford (eds.) Boston, MA: Kluwer Academic, 1994. P. 313 – 328.
35. *Cook W.D., Zhu J.* Building performance standards into DEA structures. *IIE transactions*. 2005. 37. P. 267 – 275.
36. *Banker R.D., Morey R.* Efficiency analysis for exogenously fixed inputs and outputs. *Operations research.* 1986. 34(4). P. 513 – 521.
37. *Ruggiero J.* On the measurement of technical efficiency in the public sector. *European journal of operational research.* 1996. 90. P. 553 – 565.
38. *Syrjanen M.J.* Non-discretionary and discretionary factors and scale in data envelopment analysis. *European journal of operational research*. 2004. 158. P. 20 – 33.
39. *Muniz M., Paradi J., Ruggiero J., Yang Z.J.* Evaluating alternative DEA models used to control for non-discretionary inputs. *Computers & operations research*. 2006. **33**. P. 1173 – 1183.
40. *Ruggiero J.* Non-discretionary inputs in data envelopment analysis. *European journal of operational Research.* 1998. **111**. P. 461 – 469.
41. *Ruggiero J.* Non-discretionary inputs. Modeling data irregularities and structural complexities in data envelopment analysis. J. Zhu, W.D. Cook (eds.) Springer Science Series 2007.
42. *Горбачук В.М., Кулик В.В., Пілявський А.І., Сулейманов С.-Б.* Комп'ютерний аналіз ефективності виробництва товарів і послуг у районах столиці України за 2016 р. *Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи)*. К.: КНУ імені Т. Шевченка, 2017. С. 26 – 29.
43. *Banker R.D., Morey E.C.* The use of categorical variables in data envelopment analysis. *Management science.* 1986. 32(12). P. 1613 – 1627.

44. *Kamakura W.A.* A note on the use of categorical variables in data envelopment analysis. *Management science.* 1988. 34(10). 1273 – 1276.
45. *Rousseau J.J., Semple J.H.* Categorical outputs in data envelopment analysis. *Management science*. 1993. 39(3). P. 384 – 386.
46. *Cook W.D., Kress M., Seiford L.M.* On the use of ordinal data in data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society*. 1993. **44**. P. 133 – 140.
47. *Cook W.D., Kress M., Seiford L.M.* Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors. *Journal of the Operational Research Society*. 1996. **47**. P. 945 – 953.
48. *Cooper W.W., Park K.S., Yu G.* IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA. *Management science*. 1999. 45. P. 597 – 607.
49. *Cooper W.W., Park K., Pastor J.T.* RAM: range adjusted measure of inefficiency for use with additive models and relations to other models and measures in DEA. *Journal of productivity analysis*. 1999. 11(1). P. 5 – 42.
50. *Zhu J.* Imprecise data envelopment analysis (IDEA): a review and improvement with an application. *European journal of operational research.* 2003. **144**. P. 513 – 529.
51. *Cook W.D., Zhu J.* Rank order data in DEA: a general framework. *European journal of operational research*. 2006. **174**. P. 1021 – 1038.
52. *Scheel H.* Undesirable outputs in efficiency valuations. *European journal of operational research*. 2001. **132**. P. 400 – 410.
53. *Seiford L., Zhu J.* Modelling undesirable factors in efficiency evaluation. *European journal of operational research.* 2002. **142**. P. 16 – 20.
54. *Fare R., Grosskopf S.* Modelling undesirable factors in efficiency evaluation: comment. *European journal of operational research.* 2004. **157**. P. 242 – 245.
55. *Hua Z., Bin Y.* DEA with undesirable factors.Modeling data irregularities and structural complexities in data envelopment analysis. J. Zhu, W.D. Cook (eds.). Springer Science Series, 2007.
56. *Cook W.D., Seiford L.M.* Data envelopment analysis (DEA) – thirty years on. *European journal of operational research*. 2009. 192(1). P. 1 – 17.

Одержано 25.05.2017

Про авторів:

Горбачук Василь Михайлович,

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
E-mail: GorbachukVasyl@netscape.net

Сирку Андрій Анатолійович,

аспірант
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,

Сулейманов Сеїт-Бекір,

аспірант
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.