КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и методы оптимизации

УДК 519.85

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ, Т.А. БАРДАДЫМ

ДВОЙСТВЕННАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

Для линейной задачи дополнительности рассмотрена эквивалентная постановка в виде квадратичной экстремальной задачи, которая имеет точную двойственную оценку, если решение исходной задачи существует. Предложен путь нахождения приближения к одному из решений квадратичной экстремальной задачи общего вида двойственным подходом в случае точной двойственной оценки.

Введение. Линейная задача дополнительности (ЛЗД), состоит в нахождении вектора $x \in R^n$, такого что

$$Mx + q \geq 0, \quad (1)$$

$$x \geq 0, \quad (2)$$

$$x^T (Mx + q) = 0, \quad (3)$$

для заданных матрицы M размера $n \times n$ и вектора $q \in R^n$.

Если все элементы вектора q неотрицательны, то задача (1) – (3) имеет очевидное решение $x = 0$. В общем случае ЛЗД – это NP-трудная задача. Как показано в [1] (со ссылкой на [2]), ЛЗД с нижнетреугольной отрицательно определенной матрицей M специального вида эквивалентна задаче о рюкзаке.

Выделение задач дополнительности в самостоятельный класс часто связывают с работами [3, 4], хотя условие дополнительности появилось значительно раньше при решении вариационных неравенств (см., например, ссылки в [5, 6]) . В работе [3] показано, что если матрица M положительно определена (не обязательно симметрична), то в задаче квадратичного программирования, которая эквивалентна ЛЗД,

$$f^* = \min\left(x^T \left(\frac{M + M^T}{2} \right) x + x^T q) \right), \quad (4)$$

$$Mx + q \geq 0, \quad (5)$$

$$x \geq 0, \quad (6)$$

оптимальное значение целевой функции

f^* равно нулю. В работе [4] этот результат обобщен для случая, когда все главные миноры матрицы M положительны.

Для решения ЛЗД применяются алгоритм Лемке или его модификации [5, 6], модификации метода внутренних точек [7], алгоритмы на основе теории глобального поиска для минимизации разности выпуклых функций (d.c. functions) [8], алгоритм с использованием определенной очередности перехода односторонних связей механических систем в альтернативное состояние [9] и др. В данной работе будет рассмотрена возможность применения для решения ЛЗД двойственных квадратичных оценок [10]. Напомним, что двойственная оценка ψ^* оптимального значения целевой функции f^* квадратичной экстремальной задачи

$$f^* = \inf_{z\in T\subseteq R^n} f_0(z)\,, \tag{7}$$

где $T=\{z: f_i(z)\le 0, i\in I,\ f_i(z)=0,\ j\in J\}$, $f_i(z)=z^T A_i z+b^T{}_i z+c_i$, $i\in\{0\}\bigcup I\bigcup J$ – квадратичные функции в n-мерном пространстве, определяется следующим образом [10]:

$$\psi^* = \sup_{\substack{A(u)\succ=0,\\ u\in U^+}} \psi(u) \le f^*, \tag{8}$$

где $\psi(u)=\inf_{z\in R^n} L(z,u)$, $L(z,u)=z^T A(u)z+b^T(u)z+c(u)$ – функция Лагранжа для задачи (7), $U^+=\{u: u_i\ge 0, i\in I\}$, $A(u)\succ=0$ ($A(u)\succ 0$) определяет множество двойственных переменных, при которых матрица $A(u)$ неотрицательно (положительно) определена.

Принимая во внимание неоднозначность постановки квадратичных оптимизационных задач, соответствующих задаче (1) – (3), можно получать различные результаты. Например, для задачи (4) – (6), если матрица $\left(\dfrac{M+M^T}{2}\right)$ положительно определена, то в результате применения двойственного подхода (нахождения двойственной оценки (8)) получаем как точную оценку $\psi^*=f^*=0$, так и точку минимума, которая удовлетворяет условиям (1) – (3). Если же $\left(\dfrac{M+M^T}{2}\right)$ является отрицательно определенной матрицей, множество $u=\{u: A\succ=0, u\in R^m\}$ пусто и двойственная оценка ψ^* (8) не определена. Это соответствует тому, что значение оценки, полученной лагранжевой релаксацией этой задачи, равно $-\infty$. Рассмотрим другую квадратичную постановку

$$f^* = \min_{x\in R^n, y\in R^n} (y-Mx-q)^T(y-Mx-q), \tag{9}$$

$$x\ge 0, \tag{10}$$

$$y\ge 0, \tag{11}$$

$$(x,y)=0. \tag{12}$$

Эта задача всегда имеет не пустую область определения (10) – (12) и конечное значение глобального минимума. Если минимальное значение f^* целевой функции задачи (9) – (12) равно нулю, множество ее решений совпадает с множеством решений ЛЗД (1) – (3); если же $f^* > 0,$ то ЛЗД не имеет решений.

Функция Лагранжа для задачи (9) – (12) равна

$$L(x,y,u) = (y - Mx - q)^T (y - Mx - q) + u_1^T x + u_2^T y + u_3 x^T y =$$
$$= z^T A(u) z + b^T(u) z + c(u),$$

где $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ – вектор двойственных переменных, $u_1 \in R^n$, $u_2 \in R^n$, $u_3 \in R^1$,

$$A(u) = \begin{pmatrix} M^T M & -M^T + u_3 I \\ -M + u_3 I & I \end{pmatrix},$$

$$b(u) = \begin{pmatrix} 2M^T q + u_1 \\ -2q + u_2 \end{pmatrix},$$

$$c(u) = q^T q\ .$$

При $u^* = 0$ имеем

$$L(z,u^*) = (y - Mx - q)^T (y - Mx - q)\ .$$

Тогда, если ЛЗД имеет решение, то $f^* = 0$ и функция $L(z,u^*) - f^*$ представима в виде суммы квадратов линейных форм, что является необходимым и достаточным условием получения точной двойственной оценки (т. е. $\psi^* = f^*$) [11, теорема 4]. Однако при данном значении u^* мы не получим искомые x^* и y^*, так как оптимальное значение двойственной оценки $\psi^* = 0$ достигается для произвольного $\tilde{x}$ при $\tilde{y} = M\tilde{x} + q$. Рассмотрим один из возможных приемов, который в ряде случаев дает возможность все же получить решение исходной ЛЗД.

Для произвольной квадратичной экстремальной задачи (7) с оптимальным значением f^* в точке z^* справедливо

Утверждение 1. Если $\psi^* = \psi(u^*) = f^*,$ то $z^* \in Z(u^*) = \arg\min_z L(z,u^*).$

Доказательство. Допустим противное: пусть $z^* \notin Z(u^*) = \arg\min_z L(z,u^*),$ т. е. $L(z^*,u^*) > \psi(u^*) = L(z(u^*),u^*) = f^*$. Но для функции Лагранжа для $\forall u \in U^+$ и $\forall z \in T$ справедливо $L(z,u) \le f_0(z)$. Поскольку $u^* \in U^+,$ $z^* \in T,$ то $L(z^*,u^*) \le$ $\le f(z^*) = f^*.$ Получили противоречие, которое доказывает справедливость утверждения.

Если двойственная оценка точная и достигается при некотором векторе двойственных переменных u^*, то согласно утверждению 1 множество Z^* точек глобального минимума задачи (7) принадлежит множеству $Z(u^*)$ решений внутренней задачи $\inf\limits_{z\in R^n} L(z,u^*)$ в (8). Таким образом, задача нахождения точки глобального минимума при условии точной двойственной оценки сводится к вопросу ее выделения из множества $Z(u^*)$.

Утверждение 2. Если $\psi^* = f^*$, то существует такое ε-возмущение элементов матрицы A_0 и вектора b_0 целевой функции задачи (7), что для возмущенной задачи решение u_ε^* задачи (8) удовлетворяет условию $A(u_\varepsilon^*) \succ 0$ и, следовательно, z_ε^* определяется точно.

Доказательство. Поскольку оценка точная $(\cdot^{*} = f^*)$, то функция $L(z,u^*) - f^*$ представима в виде суммы квадратов линейных форм [11, теорема 4], причем из доказательства этой теоремы следует, что

$$L(z,u^*) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u^*)(\xi_i (u^*), z - z(u^*))^2 + f^*,$$

где $\lambda_i (u^*)$ – собственные числа, а $\xi_i (u^*)$ – собственные вектора матрицы $A(u^*)$, $z(u^*)$ – точка, к которой стремится последовательность решений внутренней задачи $z(u) = -A^{-1}(u)b(u)/2$ при $u \to u^*$ (подчеркнем, что $z(u^*)$ не обязательно удовлетворяет ограничениям исходной задачи и, соответственно, не обязательно является ее решением).

Определим множество $J(u^*)$: $j \in J(u^*)$, если $\lambda_j (u^*) = 0$. Выбрав некоторое решение z^* задачи (7), построим возмущенную задачу

$$f^* = \inf_{z\in T\subseteq R^n} \left(f_0(z) + \sum_{j\in J(u^*)} \varepsilon_j (\xi_j^*, z - z^*)^2) \right),$$

которая имеет то же оптимальное значение и ту же точку глобального минимума, что и исходная задача. Для нее двойственная оценка (8) достигается при том же векторе двойственных переменных u^*, что для исходной задачи, и $\psi_\varepsilon^* = \psi^*$ (т. е. является точной). Но матрица $A(u^*)$ не вырождена (положительно определена), и, следовательно, $z_\varepsilon(u^*) = z^*$. Доказательство завершено.

Из приведенных рассуждений при доказательстве последнего утверждения следует и способ построения возмущения исходной задачи (7), который может позволить получить приближение к ее определенному решению. Если $z(u^*)$ достигается в недопустимой точке, т. е. когда $A(u^*)$ вырожденная матрица, вводится возмущение матрицы в целевой функции $A_0^\varepsilon = A_0 + A_\varepsilon$ так, чтобы

$A(u^*) + A_\varepsilon$ была не вырожденной (для этого достаточно $A_\varepsilon = \sum_{j \in J(u^*)} \varepsilon_j (\xi_j^*, x)^2$). Например, если использовать $A_\varepsilon = \varepsilon I$, где I – единичная матрица, то в результате решения возмущенной задачи получим приближение к точке глобального экстремума исходной задачи, которая наименее удалена от центра координат. В случае, если такое решение не единственно, следует возмутить и линейную часть целевой функции $b_0^\varepsilon = b_0 + b_\varepsilon$, т. е. добавить сдвиг, который убирает эту неоднозначность. Часто достаточно одного сдвига, чтобы получить необходимый результат [12].

Выше рассмотрена ситуация, когда решение ЛЗД существует. К сожалению, применяя двойственный подход к решению задачи не всегда можно выяснить, существует ли это решение. Объясняется это тем, что двойственная оценка ψ^* (8) в случае несовместности системы (1) – (3) может принимать как положительное значение, так и нулевое. Если $\psi^* > 0$ говорит о том, что решение ЛЗД не существует, то при $\psi^* = 0$ ситуация неопределенная.

В последнем случае ($\psi^* = 0$) нередко все же удается путем введением избыточных ограничений уточнить оценку ψ^*. Например, можно заменить ограничение (12) на эквивалентную систему равенств

$$(x_i, y_i) = 0, \; i = \overline{1,n},$$

добавить ограничения, которые являются следствием неравенств (10), (11),

$$x_i x_j \ge 0, \; y_i y_j \ge 0, \; x_i y_j \ge 0, \; i \ne j, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}$$

и другие ограничения.

Эти ограничения не меняют допустимую область задачи (9) – (12), но изменяют функцию Лагранжа, что может привести к уточнению двойственной оценки. В результате введения таких ограничений двойственная оценка может принять положительное значение, и неоднозначность будет исключена.

Работа выполнена при поддержке НАН Украины, проект 0117U000327.

О.А. Березовський, Т.О. Бардадим

ДВОЇСТА КВАДРАТИЧНА ОЦІНКА ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТІ

Для лінійної задачі комплементарності розглянута еквівалентна постановка у вигляді квадратичної екстремальної задачі, яка має точну двоїсту оцінку, якщо розв’язок початкової задачі існує. Запропоновано шлях знаходження наближення до одного з розв’язків квадратичної екстремальної задачі загального вигляду двоїстим підходом у разі точної двоїстої оцінки.

O.A. Berezovskyi, T.A. Bardadym

DUAL QUADRATIC ESTIMATE FOR LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEM

For the linear complementarity problem, the equivalent formulation in the form of a quadratic extremal problem is considered. If the solution of the original problem exists, then this quadratic extremal problem has an exact dual estimate. We propose a way of finding an approximation to one of the solutions of a quadratic extremal problem of general form by a dual approach in the case of an exact dual estimate.

1. *Pardalos P.M., Rosen J.B.* Global optimization approach to the linear complementarity problem. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1988. 9(2). P. 341 – 353.
2. *Chung S.J., Murty R.G.* Polynomially bounded ellipsoid algorithm for convex quadratic programming. In O.L. Mangassarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson (editors): Nonlinear programming 4. Academic Press, 1981. P. 439 – 485.
3. *Dorn W.S.* Self-dual quadratic program. *SIAM J. Appl. Math*. 1963. 9(1). P. 51 – 54.
4. *Dantzig G.B., Cottle R.W.* Positive (semi-) definite programming. In: Nonlinear Programming. A Course. Ed. J. Abadie. Amsterdam: Noth-Holland, 1967. P. 55 – 73.
5. *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгдел К.* Оптимизация в технике. Т. 2. М.: Мир, 1986. 134 с.
6. *Попов Л.Д.* Введение в теорию, методы и экономические приложения задач о дополнительности. Изд-во Урал. ун-та, 2001. 124 с.
7. *Simantiraki E.M., Shanno D.F.* An Infeasible-Interior-Point method for linear complementarity problems. Rutcor Research Report. 1996.
8. *Mazurkevich E.O., Petrova E.G., Strekalovsky A.S.* On the numerical solution of the linear complementarity problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2009. Т. 49, № 8. С. 1318 – 1331.
9. *Колесников Г.Н., Раковская М.И.* Алгоритмы решения линейной задачи о дополнительности и дискретные модели механических систем. *Электронный журнал «Исследовано в России»* http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/164.pdf .
10. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. К.: Наук. думка, 1989. 208 с.
11. *Березовский О.А.* О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 1. С. 33 – 39.
12. *Березовский О.А.* О решении одной специальной оптимизационной задачи, связанной с определением инвариантных множеств динамических систем. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 3. С. 33 – 40.

Получено 30.03.2017

Об авторах:

Березовский Олег Анатольевич,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: berezovskyi@mail.ru

Бардадым Тамара Алексеевна,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: tbardadym@gmail.com