КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Информационные технологии в экологии

УДК 519.8

Л.Ф. ГУЛЯНИЦЬКИЙ

АГРЕГОВАНА ЗАДАЧА УПРАВЛІННЯ ВИРОБНИЦТВОМ ТА ЗБЕРІГАННЯМ ПРОДУКЦІЇ

Розглянуто формальну постановку задачі управління виробництвом, яка об'єднує етапи оптимізації планування випуску та складування продукції із урахуванням витрат, що пов'язані з виготовленням, зберіганням, застарíванням та дефіцитом продукції. Розроблено та проведено порівняльний аналіз ефективності трьох метаевристичних алгоритмів розв'язування на основі результатів аналізу обчислювального експерименту.

Вступ. Розглядається формальна постановка задачі, яка об'єднує етапи планування випуску та зберігання продукції підприємства з метою задоволення попиту споживачів – зазвичай, цим етапам відповідають дві різні задачі. Припускається, що підприємство випускає *n* видів продукції, яка надходить на склад, а потім реалізується споживачам. Кінцевою метою є отримання максимального прибутку. Проте, з одного боку, можливості підприємства обмежені виробничими потужностями, тобто кількість продукції, що випускається, не може перевищувати певного рівня, а з іншого – попитом споживачів, оскільки немає сенсу випускати продукцію, яка не буде реалізована. Окрім того, обсяг попиту не є стабільним, тобто можливі його сезонні або інші коливання. А отже, в діяльності підприємства бувають періоди, коли потрібно реалізувати продукції більше, ніж воно встигне виготовити. Це обумовлює необхідність мати на складі достатній запас продукції, виготовленої заздалегідь, для того щоб задовольнити збільшений попит споживачів і не втратити потенційний прибуток [1]. Використання складу, в свою чергу, теж накладає певні обмеження: кількість продукції, що може бути там розміщена, обмежена складськими потужностями; зберігання продукції на складі потребує певних затрат і було б бажано їх мінімізувати; продукція зазвичай має термін придатності, після закінчення якого вона вже не може бути реалізована.

З іншого боку, при збільшенні обсягів випуску продукції зростають витрати, оскільки виробництво переходить у стан понаднормового режиму роботи, що вимагає додаткових затрат.

Таким чином, задача полягає у складанні такого оптимального плану випуску продукції, при якому, з одного боку, підприємство не буде втрачати прибуток через незадоволений попит, а з іншого, не буде нести збитки через «перевиробництво» (виробництво надлишків продукції, які не зможе реалізувати) та мінімізує витрати на зберігання продукції на складі.

Цим пояснюється актуальність проблем оптимізації процесів планування випуску та зберігання продукції з метою задоволення попиту споживачів, які будемо розглядати комплексно.

Математична постановка задачі.

Дано:

n – кількість видів продукції;

n_i – кількість продукції виду i, $i = \overline{1,n}$;

τ_i – термін придатності одиниці i-го продукту, $i = \overline{1,n}$;

T – період, за який проводиться планування;

t_j – відрізки часу, на які розбивається період планування, $j = \overline{1,m}$ (інші одиниці вимірювання часу мають бути зведені до t_j);

$Q_{i,o}$ – початковий рівень запасу (надається експертами), $i = \overline{1,n}$;

X_i – максимальна кількість продукції, яку підприємство може виготовити, працюючи в нормальному режимі;

d_{ij} – попит на одиницю продукції виду i за період часу t_j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$;

m – кількість інтервалів розбиття заданого періоду.

Змінні:

x_{ij} – кількість виготовленої продукції i-го виду в момент часу j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Загалом, кількість продукції, що знаходиться на складі (рівень запасу), може змінюватись: у сторону збільшення за рахунок виготовлення нової – фактор x_{ij}; у сторону зменшення внаслідок збуту (задоволення попиту) – залежить від величини попиту d_{ij}; у сторону зменшення внаслідок застарівання продукції – залежить від моменту надходження та від терміну придатності. По закінченню терміну придатності нереалізована продукція має бути утилізована.

Внаслідок розбиття періоду T на m відрізків, можемо говорити або про j-й момент часу (коли йдеться про «одномоментні» події, якими вважається, наприклад, поставка продукції), або про період часу t_j − власне період від (j − 1)-го до j-го моментів часу (коли йдеться про процеси, розтягнуті в часі, як, наприклад, попит на продукцію).

Оскільки прогнозні значення величини попиту та інших оцінок можуть надаватись на більші періоди, ніж прийнята величина t_j, то для масштабування величину d_{ij} приписують кожному моменту прогнозного періоду. Наприклад, якщо маємо прогнозні значення величини попиту помісячно, а одиничний відрізок періоду планування – доба, то для кожного дня місяця встановлюємо значення величини попиту рівним прогнозованому на місяць.

Отже, враховуючи можливі напрямки зміни кількості продукції на складі, можемо знайти рівень запасу i-го виду продукції в j-й момент часу:

$$Q_{ij} = \sum_{j=1}^{2_i} q_{i,j,l}, \tag{1}$$

де $q_{i,j,l}$ – кількість продукції i-го виду, наявної на складі в j-й момент часу, з терміном придатності рівним l,

$$q_{i,j,l} = \begin{cases} [x_{ij}]^+, \text{ якщо } l = \tau_i, \\ [q_{i,j-1,l+1} - \left[d_{i,j} - \sum_{k=1}^{l} q_{i,j-1,k} \right]^+]^+, \text{ якщо } l < \tau_i, \end{cases}$$

$$[a]^+ = \max[0, a]. \tag{2}$$

Таким чином, для кожного виду продукції створюється вектор, значення кожної компоненти якого дорівнює кількості продукції з рештою терміну придатності, рівною номеру компоненти.

В задачі також передбачено можливість понаднормового режиму роботи підприємства, при якому воно зможе виготовити більше продукції, але тоді також збільшаться і затрати на виробництво одиниці продукції.

Обмеження на виробничі потужності:

$$x_i \le \overline{X}_i, \tag{3}$$

де $\overline{X}_i$ – максимальна кількість продукції, яку підприємство може виготовити, працюючи в понаднормовому режимі.

Обмеження на складські потужності:

$$\sum_{i=1}^{N} v_i \cdot Q_{i,j} \le V, \; j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

де v_i − обсяг, який займає одиниця продукції i-го виду; V − загальний обсяг наявних складських площ.

Нашою метою є мінімізація витрат на виробництво та зберігання продукції, а також втрат від незадоволеного попиту чи нереалізованої продукції. Розглянемо різні види витрат більш детально.

Витрати, пов’язані з виробництвом продукції. Витрати на виробництво продукції будуть різними, залежно від того, в нормальному чи в понаднормовому режимі працює виробництво:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \cdot C_i,$$

де C_i – витрати на виготовлення однієї одиниці продукції i-го виду;

$$C_i = \begin{cases} C_{1i}, & \text{якщо } x_{ij} \le X_i, \\ C_{2i}, & \text{якщо } x_{ij} > X_i. \end{cases} \quad (5)$$

Витрати, пов'язані зі зберіганням продукції на складі. Тут також є складові, що залежать від кількості продукції, і є такі, що від неї не залежать (наприклад, орендна плата сплачується незалежно від того, заповнений склад чи ні):

$$\sum_{i=1}^{N} \left(Q_{i,j-1} \cdot S_i\right) + S_0, \quad (6)$$

де S_i – витрати на зберігання одиниці продукції i-го виду; S_0 – витрати на утримання складських приміщень.

Витрати, пов'язані зі застаріванням продукції. Такі витрати виникають, якщо в певний момент часу існує запас продукції, залишок терміну придатності якої становить 1 одиничний відрізок періоду планування, і ця кількість перевищує попит. Тоді розмір витрат внаслідок застарівання товарів можна визначити виходячи з наступної формули:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot (q_{i,j,1} - d_{i,j+1})^+, \quad (7)$$

де r_i – збитки через застарівання одиниці продукції i-го виду (втрачений прибуток, витрати на утилізацію і т. п.).

Витрати, пов'язані з дефіцитом продукції:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \beta \cdot (d_{i,j} - Q_{i,j-1})^+ + B_i \cdot (1-\beta) \cdot (d_{i,j} - Q_{i,j-1})^+, \quad (8)$$

де A_i – витрати через незадоволений (заборгований) попит; B_i – витрати через втрачений попит; β – коефіцієнт – частка попиту, що може бути задоволена, відповідно, $(1-\beta)$ – частка попиту, що буде втрачена.

Таким чином, цільова функція матиме вигляд:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} [\sum_{i=1}^{n} x_{ij} C_i + \sum_{i=1}^{n} (Q_{i,j-1})^+ \cdot S_i + S_j + \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot (q_{i,j,1} - d_{i,j+1})^+ +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (A_i \cdot \beta \cdot (d_{i,j} - Q_{i,j-1})^+ + B_i \cdot (1-\beta) \cdot (d_{i,j} - Q_{i,j-1})^+)], \quad (9)$$

де $x = (x_{ij})_{n \times m}$.

Для розв'язування сформульованої задачі (1) – (9) розроблені наближені алгоритми таких методів комбінаторної оптимізації: імітаційного відпалу (АІВ), пошуку зі змінними околами та H-методу.

Загальна схема алгоритму імітаційного відпалу. В алгоритмі імітаційного відпалу (англ. Simulated annealing) пошук глобального розв’язку імітується процесом релаксації механічної системи з багатьма ступенями свободи, значенням узагальненої енергії якої виступає цільова функція задачі [2]. Імовірність p переходу з одного стану в деякий «близький» йому стан (флуктуація) описується з розподілу Больцмана – Гіббса так: $p = e^{\frac{\Delta E}{kT}}$, де ΔE – зміна узагальненої енергії, TJ температура, k – стала Больцмана.

Отже, передбачається, що кожен варіант роз’язку задачі комбінаторної оптимізації x задає деяку конфігурацію атомів стохастичної системи, а значення цільової функції $f(x)$ визначає величину узагальненої енергії. Перша обчислювальна процедура, що імітує поведінку стохастичної системи, була запропонована Метрополісом. Подальшим узагальненням цього методу став алгоритм імітаційного відпалу, на основі якого останнім часом інтенсивно розвиваються алгоритми розв’язування задач комбінаторної оптимізації із різних класів (рис. 1).

```
procedure SA(x);
   x: = <деякий припустимий варіант розв’язку>;
   h: = 0;                    {h –  лічильники ітерації по температурі};
   T: = <початкова температура>;
   while не виконується умова зупинки   do
      while  не досягнута рівновага    do
          y: = <чергова точка околу O(x) >
          Δ = f(y) − f(x);
          p := min{1, exp(−Δ/T)}
          ξ:= random[0,1];
          if   p>ξ   then  x: = y;
      endwhile;
      h: = h + 1;
      T: = <нове значення>;
   endwhile;
   return  x;
end
```

РИС. 1. Схема алгоритму імітаційного відпалу

Породження сусідніх розв’язків із (метричного) околу $O(x)$ може здійснюватися як на основі їх випадкового вибору, так і детерміновано.

Розроблений алгоритм імітаційного відпалу для досліджуваної задачі оперував з наступним. Як зазначалося, варіантом розв'язку буде матриця розміром $n \times m$, де n – кількість видів продукції, m – кількість інтервалів у плановому періоді. Таким чином, множина всіх варіантів розв'язку – множина матриць x розмінності $n \times m$, елементи яких x_{ij} приймають значення в межах: $0 \le x_{ij} \le \overline{X}_i, \ i = \overline{1,n}$.

Відповідно, сусідніми до поточного варіанта розв'язку будуть такі розв'язки $O(x)$, один з елементів матриці яких відрізняється від відповідного елемента поточного розв'язку на одиницю.

Ймовірність переходу визначено, як і в алгоритмі Метрополіса, тобто:

$$P(x \to y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } f(y) - f(x) < 0, \\ \dfrac{f(y) - f(x)}{T}, & \text{якщо } f(y) - f(x) \ge 0, \end{cases}$$

де x – поточний варіант розв'язку, y – згенерований сусідній варіант розв'язку, тобто $y \in O(x)$.

Умова рівноваги вважається виконаною, якщо здійснено задане значення M_1 переходів до нового розв'язку або число спроб перевищило параметр M_2.

Температурний розклад обрано прискорений скрізь:

$$T_{h+1} = \alpha T_h, \ 0 < \alpha < 1,$$

де T_h – поточне значення температури; T_{h+1} – нове значення температури; α – константа, зазвичай $\alpha \in [0{,}9 – 0{,}95]$.

Пошук із пульсуючими (змінними) околами (у зарубіжній літературі – Variable Neighborhood Descent, VND) – метаевристика, яка явно застосовує стратегію, засновану на динамічній зміні структури околів у базовому алгоритмі локального пошуку. Вперше алгоритм цього класу запропоновано в [3], він отримав назву алгоритма пульсуючих околів, і перевідкрито незалежно у [4] під назвою алгоритм спуску зі змінними околами.

На кроці ініціалізації у просторі розв'язків має бути визначена множина околів $|L_1| < |L_2| < \ldots < |L_{\circ\max}|$ – околів з потужністю, що збільшується. Потім генерується початковий розв'язок, ініціалізується поточний індекс околу і виконуються ітерації доти, поки не виконана умова завершення (рис. 2).

Як видно з наведеного опису, вибір структури околів – ключова частина пошуку і спуску зі змінними околами. Вибрані околи мають враховувати і відображати різні властивості і характеристики простора пошуку, тобто забезпечувати виділення різних підобластей простора пошуку.

У розробленому алгоритмі пошуку зі змінними околами сімейство околів визначалось так: окіл L_1 – це множина всіх варіантів розв'язку, які відрізняються від даного лише одним елементом матриці, окіл L_2 – це всі варіанти розв'язку, які відрізняються рівно двома елементами матриці і т. д.

```
procedure VND(x)
  Вибрати множину структур околів Lρ(x), ρ = 1, …, ρmax;
  x := ЗгенеруватиПочатковийРозв'язок;
  while не виконується умова зупинки do
    ρ: = 1;
    while ρ ≤ ρmax do
        x' := Вибрати випадково із Lρ(x);        {стадія струсу}
        x" := ЛокальнийПошук(x');
        if f(x") < f(x) then x : = x"; ρ : = 1
               else ρ := ρ+1
        end if
    end while
  end while
end
```

РИС. 2. Структура алгоритму пошуку із пульсуючими (змінними) околами

Алгоритм *H*-методу для задачі планування випуску та зберігання продукції. *H*-метод – це гібридна метаевристика, що використовує спеціально визначені відрізки та інтервали в просторі розв'язків та комбінування з алгоритмами локального пошуку [5, 6].

Нехай маємо певну чергову популяцію $P \subset X$ – набір розв'язків. Тоді основний механізм пошуку на ітерації алгоритму полягає у реалізації наступних кроків.

1. Відбір пари точок $x, y \in P$: $f(x) > f(y)$.

2. Побудова напівінтервалу $< x, x^{\infty}/$ такого, що $y \in < x, x^{\infty}/$, де x^{∞} – максимально відділена від x точка простору. Пошук z – кращої точки (субоптимального розв'язку) вздовж напівінтервалу.

3. Локальний пошук із точкою z як початкове наближення.

4. Доповнення популяції P знайденою точкою локального мінімуму.

При реалізації *H*-методу окіл та відстані між розв'язками визначалися так само, як і для AIB чи пошуку зі змінними околами.

Мутація – двоточкове схрещування на матриці варіанта розв'язку. Після мутації здійснювалася адаптація – корегування нащадка під обмеження задачі, враховуючи існуючі обмеження на площу складу, виробничі потужності та інше.

Дослідження ефективності розроблених алгоритмів. Це дослідження проводилося на основі аналізу результатів обчислювального експерименту із розв'язування задач планування випуску та зберігання продукції розмірності від 15 видів продукції до 1000. Генерування задач проводилось на основі датчика випадкових чисел з рівномірним розподілом.

Використовувалося таке апаратне забезпечення: процесор Intel Core2Duo E8400, 3 GHz, з ОС Windows 7 та оперативною пам'яттю 2 GB.

Результати розв'язування задач з 15 видами продукції та 12 періодами планування за точністю подано на рис. 3, де по осі ординат відкладено значення цільової функції, а по абсцисі – номери задач. Усереднені дані з розв'язування задачі з 1000 видами продукції і 12 періодами планування наведені в таблиці.

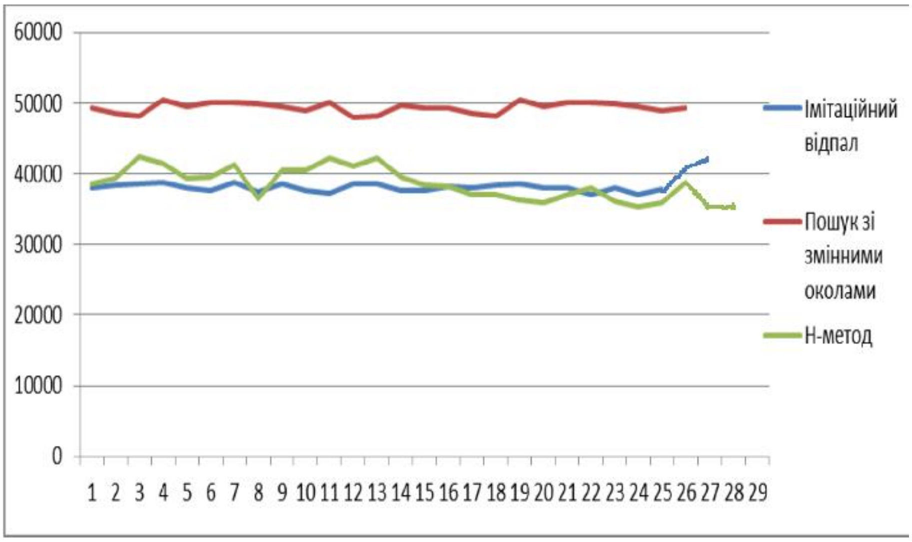

РИС. 3. Результати роботи алгоритмів

ТАБЛИЦЯ. Усереднені результати обчислень для n = 1000

Алгоритм	АІВ	Пошук зі змінними околами	Алгоритм *H*-методу
Цільова функція	39273,31	47321,56	39190,57
Час, с	3709,250	1832,081	2949,54

Висновки. Запропоновано і реалізовано три метаевристичних алгоритми розв'язування сформульованої задачі управління виробництвом та зберіганням продукції. Окрім дослідження алгоритмів на тестових задачах, виконано розрахунок задачі реальної розмірності 1000, оскільки на одному складі рідко зберігається більша кількість різних видів продукції. Крім того, оскільки розв'язання таких задач може знадобитися при вирішенні питань рівня загальної стратегії підприємства, можна зробити припущення, що на практиці розмірність буде ще меншою, бо на такому рівні оперують не окремими одиницями номенклатури, а цілими видами продукції. Виявлено, що серед розроблених алгоритмів оптимальним за поєднанням точності та швидкодії є алгоритм *H*-методу.

Л.Ф. Гуляницкий

АГРЕГИРОВАННАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ И ХРАНЕНИЕМ ПРОДУКЦИИ

Рассмотрена формальная постановка задачи управления производством, которая объединяет этапы оптимизации планирования выпуска и складирования продукции с учетом затрат, которые связаны с изготовлением, хранением, устареванием и дефицитом продукции. Разработаны три метаэвристических алгоритма решения и проведен сравительный анализ их эффективности на основе анализа результатов вычислительного эксперимента.

L.F. Hulianytskyi

THE AGGREGATED PROBLEM OF GOODS MANUFACTURING AND STORAGE MANAGEMENT

A formal statement of the manufacturing management problem is covered. The problem under examination unites the stages of goods supply and stocking planning optimization taking into account the expenses that are caused by manufacturing, storage, obsolescence, and stock-out of goods. Three methaeuristic algorithms for solving the problem are developed and comparison analysis of their efficiencies is made based on the results of computational experiment.

1. *Karáse J.* An overview of warehouse optimization. *International Journal of Advances in Telecommunications, Electrotechnics, Signals and Systems*. 2013. **2**, N 3. P. 111 – 117.
2. *Aarts E., Korst J., Michiels W.* Simulated annealing. In.: *Search methodologies. Springer US*, 2014. P. 265 – 285.
3. *Гуляницкий Л.Ф., Ходзинский А.Н.* Особенности реализации алгоритмов метода ветвей и границ и метода вектора спада в пакете ВЕКТОР-1В. В кн. “Вычислительные аспекты в пакетах прикладных программ”. Сб. науч. тр. Киев, ИК АН УССР, 1979. С. 45 – 48.
4. *Mladenović N., Hansen P.* Variable neighborhood search. *Computers & operations research*. 1997. **24**, N 11. P. 1097 – 100.
5. *Гуляницкий Л.Ф., Сергиенко И.В.* Метаэвристический метод деформированного многогранника в комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. № 6. С. 70 – 79.
6. *Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю.* Прикладні методи комбінаторної оптимізації. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. 142 с.

Одержано 12.01.2017

Про автора:

Гуляницький Леонід Федорович,
доктор технічних наук, завідувач відділу
Інституту кібернетики імені. В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: *leonhul.icyb@gmail.com*