Компьютерная математика

УДК 681.3

О.О. ПРОВОТАР

# АРИФМЕТИКА НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ

*Запропонована модель подання підмножини нечітких чисел типу L-P, яка суттєво спрощує виконання арифметичних операцій над такими числами.*



**Вступ**. Теоретико-ймовірнісні методи широко й успішно використовуються в наукових дослідженнях для моделювання у термінах випадковості багатьох аспектів невизначеності. Разом з тим, теоретико-ймовірнісні методи виявилися не досить ефективними при моделюванні складних фізичних, соціальних і економічних систем. Цим пояснюється підвищений інтерес до неймовірнісних (або гібридних) моделей невизначеності та їх застосуванні до розв'язання практичних задач.

В даній роботі пропонується та обгрунтовується підхід до подання нечітких чисел у формі, яка значно спрощує нечітку арифметику, що використовується для змістовної інтерпретації поняттю «можливості» як верхньої межі ймовірності [1].

Для цього ймовірності визначаються нечіткими трикутними числами (які можуть задовольняти тим або іншим умовам). Наприклад, ймовірність випадіння числа 1 при підкиданні кубика може бути визначена нечітким числом з діаграмою Заде вигляду (рис. 1).


РИС. 1

**Нечіткі числа.** В теорії нечітких множин [2 – 5] виділяються нечіткі множини, які визначаються на осі дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ і є нормальними і випуклими та мають неперервні функції належності.

Нечітким числом називається нечітка множина $A$, визначена на множині дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, функція належності якої

$$\mu : \boldsymbol{R} \to [0,1]$$

задовольняє умовам:

1. $\sup\limits_{x \in R} \mu_A(x) = 1$, тобто нечітка множина нормалізована;
2. $\mu[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\}$, тобто множина $A$ випукла;
3. $\mu(x)$ – неперервна.

Основні арифметичні операції – сума, різниця, множення і ділення двох нечітких чисел $A_1, A_2 \subseteq \boldsymbol{R}$ задаються за допомогою принципу розширення [1].

Сума двох нечітких чисел $A_1$ і $A_2$ позначається $A_1 \oplus A_2$, причому функція належності суми задається виразом

$$\mu_B(y) = \sup_{x_1 + x_2 = y} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)).$$

Різниця двох нечітких чисел $A_1$ і $A_2$ позначається $A_1 \div A_2$, причому функція належності різниці задається виразом

$$\mu_B(y) = \sup_{x_1 - x_2 = y} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)).$$

Добуток двох нечітких чисел $A_1$ і $A_2$ позначається $A_1 \otimes A_2$, причому функція належності добутку задається виразом

$$\mu_B(y) = \sup_{x_1 x_2 = y} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)).$$

Ділення двох нечітких чисел $A_1$ і $A_2$ позначається $A_1 : A_2$, причому функція належності частки задається виразом

$$\mu_B(y) = \sup_{x_1 / x_2 = y} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)).$$

Арифметичні операції над нечіткими числами вимагають досить складних обчислень. Але справедлива

**Теорема** (Дюбуа і Прейда). Якщо нечіткі числа $A_1$ і $A_2$ мають неперервні функції належності, то результатами арифметичних операцій суми, різниці, добутку і ділення будуть нечіткі числа.

Дюбуа і Прейд запропонували деяку форму подання нечітких чисел за допомогою трьох параметрів, що значно спрощує нечітку арифметику.

Нехай $L$ і $P$ – функції, вигляду

$$(\infty, \infty) \to [0,1],$$

що задовольняють умовам:

1. $L(-x) = L(x),\ P(-x) = P(x)$,
2. $L(0) = 1,\ P(0) = 1$,
3. $L$ і $P$ – незростаючі на інтервалі $[0, \infty)$.

**Визначення.** Нечітке число $A \subseteq \boldsymbol{R}$ буде нечітким числом типу *L-P* тоді і тільки тоді, коли його функція належності має вигляд:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L(\dfrac{m-x}{\alpha}), \text{ якщо } x \le m \\ P(\dfrac{x-m}{\beta}), \text{ якщо } x \ge m \end{cases},$$

де $m$ – дійсне число, яке називається середнім значенням нечіткого числа $A$ $(\mu(m) = 1)$, $\alpha$ – додатне дійсне число, яке називається лівостороннім розподілом, $\beta$ – додатне дійсне число, яке називається правостороннім розподілом.

**Трикутні нечіткі числа.** Розглянемо функції

$$L(x) = \begin{cases} x+1, \ x \le 0 \\ 1-x, \ x \ge 0 \end{cases}, \quad P(x) = \begin{cases} x+1, \ x \le 0 \\ 1-x, \ x \ge 0 \end{cases}.$$

Ці функції задовольняють вище приведеним умовам. Тому, наприклад, функцію належності нечіткого число $A$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x+1, \ x \le 0 \\ 1-x, \ x \ge 0 \end{cases}$$

можна подати у вигляді

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L(x), \ x \le 0 \\ P(x), \ x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} L(-x), \ x \le 0 \\ P(x), \ x \ge 0 \end{cases}.$$

Таке нечітке число є нечітким числом типу *L-P* і скорочено може бути записане у вигляді

$$A = (0, 1, 1)_{LP}.$$

В загальному випадку нечітке число $A$ з функцією належності

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L(\dfrac{m-x}{\alpha}), \text{ якщо } x \le m \\ P(\dfrac{x-m}{\beta}), \text{ якщо } x \ge m \end{cases}$$

скорочено може бути записане у вигляді

$$A = (m, \alpha, \beta)_{LP}$$

і називається трикутним нечітким числом.

Деякі операції над нечіткими числами типу $L-P$ зводяться до операцій над трьома параметрами. Зокрема, сума нечітких чисел

$$A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP} \text{ і } B = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LP}$$

має вигляд

$$A \oplus B = (m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B)_{LP}.$$

Протилежне до нечіткого числа

$$A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP}$$

має вигляд

$$-A = (-m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP}.$$

Далі будемо використовувати дещо іншу форму подання нечітких трикутних чисел за допомогою трьох параметрів, так звану *LP′* форму. Нечітке число $A = (a_1, a_2, a_3)$ в цьому випадку визначається функцією належності

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \le x \le a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \le x \le a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases}.$$

Операції додавання і різниці нечітких чисел $A = (a_1, a_2, a_3)$ і $B = (b_1, b_2, b_3)$ визначаються як

$$A \oplus B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),\ A_1 \div A_2 = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1).$$

Протилежне до нечіткого числа $A = (a_1, a_2, a_3)$ визначається як

$$-A = (-a_3, -a_2, -a_1).$$

Наприклад, розглянемо нечіткі числа

$$A = (-3, 2, 4) \quad \text{і} \quad B = (-1, 0, 6)$$

з діаграмами Заде [2] (рис. 2) відповідно. Тоді сума $A \oplus B$ задається діаграмою Заде вигляду (рис. 3).

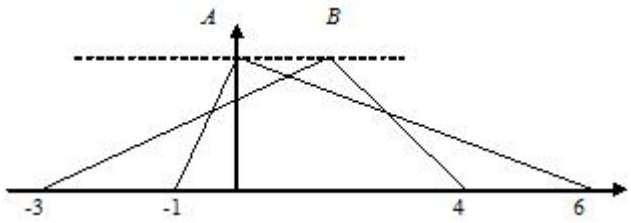


РИС. 2

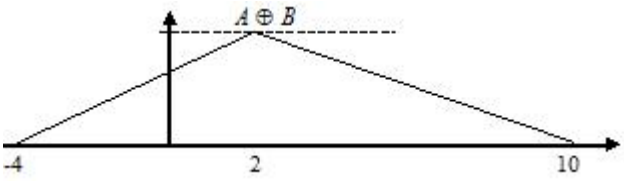


РИС. 3

Відповідно, різниця – діаграмою Заде вигляду (рис. 4).

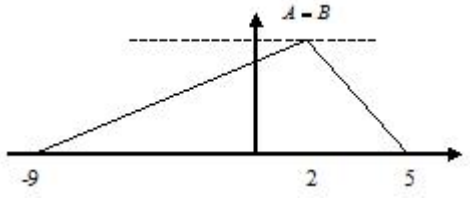


РИС. 4

**Теорема.** $(m, \alpha, \beta)_{LP} = (m-\alpha, m, m+\beta)_{LP'}$.

*Доведення*. Треба показати, що значення функцій належності цих чисел у довільній точці збігаються. Дійсно, значення функції належності $\mu_A(x)$ нечіткого числа $(m, \alpha, \beta)_{LP}$ в точці $x \le m$ дорівнює

$$\mu_A(x) = \frac{x-m}{\alpha} + 1.$$

Значення функції належності $\mu_A(x)$ нечіткого числа $(m, \alpha, \beta)_{LP}$ в точці $x \ge m$ дорівнює

$$\mu_A(x) = 1 - \frac{x-m}{\beta}.$$

Значення функції належності $\mu_{A'}(x)$ нечіткого числа $(m-\alpha, m, m+\beta)_{LP'}$ в точці $x \le m$ знаходимо із співвідношення

$$\frac{m-m+\alpha}{1} = \frac{x-m}{\mu_{A'}(x)-1}.$$

Після перетворень отримаємо

$$\mu_{A'}(x) = \frac{x-m}{\alpha} + 1.$$

Аналогічно, значення функції належності $\mu_{A'}(x)$ нечіткого числа $(m-\alpha, m, m+\beta)_{LP'}$ в точці $x \ge m$ знаходимо із співвідношення

$$\frac{m-m-\beta}{1} = \frac{x-m}{\mu_{A'}(x)-1}.$$

Після перетворень отримаємо

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \frac{x-m}{\beta}.$$

Таким чином, функції належності нечітких чисел приймають однакові значення, отже, теорема доведена.

***Наслідок* 1.** Протилежним до нечіткого числа $(m, \alpha, \beta)_{LP}$ типу $LP$ є нечітке число $(-(m+\beta), -m, -(m-\alpha))_{LP'}$ типу $LP'$.

***Наслідок* 2.** Для нечітких чисел

$$A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP} \quad \text{і} \quad B = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LP}$$

справедливе співвідношення

$$(m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B)_{LP} =$$
$$= (m_A + m_B - \alpha_A - \alpha_B, m_A + m_B, m_A + m_B + \beta_A + \beta_B)_{LP'}.$$

***Наслідок* 3.** Для нечітких чисел

$$A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP} \quad \text{і} \quad B = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LP}$$

справедливе співвідношення

$$(m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B)_{LP} =$$
$$= (m_A - \alpha_A - m_B - \beta_B, m_A - m_B, m_A + \beta_A - m_B + \alpha_B)_{LP'}.$$

**Висновки.** Таким чином, запропонований підхід дозволяє досліджувати поняття можливості нечіткими трикутними числами. Крім того, поняття можливості інтерпретується як верхня межа ймовірності і може бути корисним для обчислення (в тому числі за допомогою арифметики для нечітких чисел) верхніх меж ймовірності подій у задачах, де це зробити досить складно.

*А.А. Провотар*

АРИФМЕТИКА НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

Предложена модель представления подмножества нечетких чисел типа *L-P*, которая существенно упрощает выполнение арифметических операций над такими числами.

*A.A. Provotar*

ARITHMETICS OF FUZZY NUMBERS

A model for subset of fuzzy numbers of *L-P* type presentation that significantly simplifies the arithmetic operations on such numbers is proposed.

1. Провотар О.І., Провотар О.О. До питання про інтерпретацію можливості. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. № 6. С. 3 – 10.
2. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. Москва: Телеком, 2006. 382 с.
3. Zadeh L.A. Fuzzy Sets Zadeh L.A. Information and Control. 1965. Vol. 8. P. 338 – 353.
4. Провотар А.И., Лапко А.В. О некоторых подходах к вычислению неопределенностей. *Проблеми програмування*. 2010. № 2-3. С. 22 – 27.
5. Zadeh L.A., Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets ana Systems*. 1978. Vol. 1. P. 3 – 28.

Одержано 05.10.2017

***Про автора:***

*Провотар Олександр Олександрович*,
аспірант факультету комп'ютерних наук і кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
E-mail: aprovata@gmail.com