Компьютерная математика

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, М.С. ДУНАЄВСЬКИЙ, А.А. СИРКУ, С.-Б. СУЛЕЙМАНОВ

ВАРТОСТІ ДОСКОНАЛОЇ ІНФОРМАЦІЇ ТА СТОХАСТИЧНОГО РІШЕННЯ

Показано, що моделі стохастичного програмування дають певні вимірювані переваги порівняно з аналогічними моделями детерміністичного математичного програмування.

Вступ. Стохастичне програмування має застосування в різноманітних галузях, потребуючи від розробника інтуїції, розуміння моделювання невизначеності та використання структури проблеми [1–3]. Кожна модель стохастичного програмування характеризується цілями, процесами рішення та їхніми обмеженнями, взаємозв'язками цілей та обмежень з випадковими елементами. Можна показати, що модель стохастичного програмування має певну перевагу порівняно з аналогічною моделлю детерміністичного математичного програмування. Така перевага є вимірюваною і досить великою для того, щоб вивчати властивості та методи розв'язання задач стохастичного програмування. Хоча загальні моделі стохастичного програмування можна застосовувати до практично всіх задач прийняття рішень з невідомими параметрами, ці моделі залишаються узагальненнями детерміністичних моделей математичного програмування, в яких частина даних не є точно відомою. Типові риси таких даних – множинність допустимих значень багатьох змінних рішення, дискретність часових періодів для рішення, застосування функціоналів математичного сподівання як цільових функцій чи обмежень на основі інформації про ймовірнісні розподіли невідомих параметрів. Проте ці риси не є характерними для суміжних областей прийняття рішень – статистичної теорії прийняття рішень, аналізу рішень, динамічного програмування, марковських або напівмарковських процесів рішень, стохастичного керування.

Оскільки задачі стохастичного програмування є складними для чисельного розв'язання, то на практиці їх часто замінюють простішими варіантами, наприклад, детерміністичними задачами математичного програмування, де коефіцієнти – сподівані значення стохастичних змінних при даному сценарії. Маючи розв'язки таких детерміністичних задач при всіх сценаріях, можна визначати розв'язок відповідної задачі стохастичного програмування.

Основна мотивація статистичної теорії прийняття рішень [4 – 6] – визначити найкращі рівні змінних x з деякої множини X, які впливають на випадковий результат $\omega \in \Omega$ експерименту. Якщо результат ω має розподіл $F(\omega)$ і відповідає виграшу (reward) $r(x, \omega)$, то визначення найкращого значення $x = x(F(\omega))$ зводиться до певної задачі стохастичної максимізації по x математичного сподівання (expectation)

$$E_{\omega}[r(x, \omega) \mid F] = \int_{\omega} r(x, \omega)\, d\, F(\omega). \qquad (1)$$

Якщо основні питання стохастичного програмування пов'язані з пошуком виду функції $r(x, \omega)$ та змінами в розподілі $F(\omega) = F(\omega(x))$, то у статистичній теорії прийняття рішень основним питанням є максимізація по x функції (1).

Проілюструємо це на простому прикладі фермерства. Нехай у Європі фермер, спеціалізуючись на вирощування пшениці, кукурудзи і буряку на своїх 500 акрах землі, у період між збором урожаю та посівною приймає рішення про виділення площ x_1, x_2 і x_3 під ці культури 1, 2 та 3 відповідно.

Цей фермер знає, що для годівлі худоби потрібно принаймні 200 т пшениці та 240 т кукурудзи. Ці корми можуть вирощуватися на фермі чи купуватися в оптовика. Будь-який надлишок пшениці чи кукурудзи продаватиметься. Протягом попереднього десятирічного періоду середні ціни продажу пшениці та кукурудзи оптовику становили $P_1 = 170$ дол./т та $P_2 = 150$ дол./т відповідно, перевищуючи на 40 % ціни купівлі (з урахуванням маржі оптовика і транспортних витрат). Крім того, очікувана ціна продажу буряка дорівнює $P_3 = 36$ дол./т, але на його виробництво фермер має квоту (quota) $q = 6000$ т, введену Європейською Комісією: будь-який надлишок буряка продаватиметься за ціною $P_4 = 10$ дол./т (тому понадквотовий буряк можна вважати іншим ринковим товаром). Виходячи з минулого досвіду, фермер знає, що середня урожайність (yield) на його землі становить $y_1 = 2.5$ т/акр, $y_2 = 3$ т/акр, $y_3 = 20$ т/акр для пшениці, кукурудзи, буряка відповідно. Припустимо, витрати (costs) фермера на обробку площ під пшеницю, кукурудзу, буряк становлять $c_1 = 150$ дол./акр, $c_2 = 230$ дол./акр, $c_3 = 260$ дол./акр відповідно.

Обмеженнями фермера є

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 500, \qquad (2)$$

$$y_1 x_1 + d_1 - s_1 \geq 200, \tag{3}$$

$$y_2 x_2 + d_2 - s_2 \geq 240, \tag{4}$$

де d_i та s_i – обсяг купівлі (попиту, demand) та обсяг продажу (sale) культури i відповідно за цінами, $i = 1, 2$. Нехай фермер мінімізує свої загальні витрати

$$\begin{gathered} C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + 1.4 P_1 d_1 + 1.4 P_2 d_2 - P_1 s_1 - P_2 s_2 - \\ - P_3 \min\{q; y_3 x_3\} - P_4 \max\{0; y_3 x_3 - q\} = \\ = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + P_1 (1.4 d_1 - s_1) + P_2 (1.4 d_2 - s_2) - \\ - P_3 \min\{6000; y_3 x_3\} - P_4 \max\{0; y_3 x_3 - 6000\}, \end{gathered} \tag{5}$$

обираючи невід'ємні значення x_1, $x_2, x_3, d_1, d_2, s_1, s_2$. Оскільки задача (2)–(5) є негладкою, введемо додаткову змінну s_3 для обсягу $y_3 x_3$ продажу буряка при

$$y_3 x_3 \leq q,$$

а також додаткову змінну s_4 для обсягу $(y_3 x_3 - q)$ продажу буряка при

$$y_3 x_3 > q.$$

Таким чином, задача (2) – 5) негладкої оптимізації зводиться до задачі лінійного програмування мінімізації по x_1, x_2, x_3, d_1, d_2, s_1, s_2, s_3, s_4 функції

$$C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + P_1 (1.4 d_1 - s_1) + P_2 (1.4 d_2 - s_2) - P_3 s_3 - P_4 s_4 \tag{6}$$

при обмеженнях (2) – (4), а також обмеженнях

$$s_3 \leq q, \tag{7}$$

$$s_3 + s_4 \leq y_3 x_3. \tag{8}$$

Тоді, застосовуючи MS Excel Solver, знаходимо оптимальні значення:

$$\begin{gathered} x_1^* = 120, \; x_2^* = 80, \; x_3^* = 300, \; d_1^* = 0, \; d_2^* = 0, \\ s_1^* = 100, \; s_2^* = 0, \; s_3^* = 6000, \; s_4^* = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

При цьому нерівність (6) задовольняється як рівність, а знайденим значенням відповідає оптимальна величина цільової функції

$$\begin{gathered} C^* = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + c_3 x_3^* + P_1 (1.4 d_1^* - s_1^*) + P_2 (1.4 d_2^* - s_2^*) - P_3 s_3^* - P_4 s_4^* = \\ = 150 \times 120 + 230 \times 80 + 260 \times 300 + 170 (1.4 \times 0 - 100) + 150 (1.4 \times 0 - 0) - \\ - 36 \times 6000 - 10 \times 0 = -118600 \text{ [дол.]}, \end{gathered}$$

причому величина $(-C^*)$ означає оптимальний прибуток фермера.

Отже, фермер виділяє достатньо площі під буряк, щоб вийти на свою квоту q. Наступним пріоритетом фермера є пшениця, частину якої можна продати. Кукурудза вирощується для задоволення обмеження (4) як рівності.

У певному сенсі оптимальне рішення зводиться до простого евристичного правила виділення площі у порядку зменшення прибутку на акр. Проте обмеження на сівозміну чи оплату праці ускладнюватимуть пошук оптимуму.

Водночас фермер мав різні урожайності для однієї й тієї самої культури в різні роки, головним чином, через погодні умови. Більшість культур потребує вологи протягом кількох тижнів після сіяння чи саджання, а також тепла протягом решти періоду вирощування. Надмірне тепло може вести до посухи і зниження урожайності, але суха погода бажана під час збору урожаю. Тому спостерігаються коливання врожайності відносно середньої, які сягають її чверті.

Такі мінливості врожайності можна моделювати за допомогою дискретних корельованих випадкових змінних, а також за допомогою неперервних некорельованих випадкових змінних. Крім того, можливі флуктуації цін.

Хоча в задачі (2) – (4), (6) – (8) число допустимих варіантів виділення площ під культури є величезним, стохастичне програмування дозволяє ефективно знаходити найкращий з них. Залежність урожайностей культур від погоди веде до постановки задачі стохастичного програмування.

Коли ділянки для сіяння (саджання) чи набори культур є новими, то фермер не матиме безпосередньої інформації про урожайності. Тому фермер використовуватиме, мабуть, деякий апріорний розподіл урожайності, який уточнюватиме з часом. Така постановка задачі властива статистичній теорії прийняття рішень. Якщо при цьому допустиму площу під кожну культуру вимірювати великими ділянками (скажімо, ділянками по 50 акрів), то число допустимих варіантів істотно зменшуватиметься. Тоді фермер може застосовувати перебірні алгоритми чи процедури стохастичного програмування, уточнюючи свої гіпотези про розподіли урожайності культур.

Таким чином, у цільовій функції (1) фермер замінює розподіл F на $F(\omega) = F(\omega(x))$, враховуючи частковий вибір $x = x(F)$ і деякі спостереження ω. Коли множина X є невеликою скінченною, то замість процедур стохастичного програмування можна застосовувати перебірні алгоритми статистичної теорії прийняття рішень.

Сценарний аналіз припускає деяку кореляцію поміж урожайностей різних культур. У спрощеному сценарному аналізі урожайності всіх культур є середніми у звичайний сезон (рік), вищими середніх (скажімо, на 20 %) у кращий сезон і нижчими середніх (на 20 %) у гірший сезон. Для простоти вважаємо, що погодні умови й урожаї фермера не впливають на ціни.

Фермер знає свої оптимальні значення (9) для звичайного сезону, розуміючи, що вони чутливі до урожайності. Для кращого (better) сезону задача (2) – (4), (6) – (8) замість y_i використовує $y_i^b = 1.2\, y_i$ і має такі оптимальні значення:

$$x_1^* = 183.33,\ \ x_2^* = 66.67,\ \ x_3^* = 250,\ \ d_1^* = 0,\ \ d_2^* = 0,$$

$$s_1^* = 350,\ \ s_2^* = 0,\ \ s_3^* = 6000,\ \ s_4^* = 0. \qquad (10)$$

Цим значенням відповідають мінімальні витрати

$$C^* = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + c_3 x_3^* + P_1(1.4\,d_1^* - s_1^*) + P_2(1.4\,d_2^* - s_2^*) - P_3 s_3^* - P_4 s_4^* =$$
$$= 150 \times 183.33 + 230 \times 66.67 + 260 \times 250 + 170(1.4 \times 0 - 350) + 150(1.4 \times 0 - 0) -$$
$$-36 \times 6000 - 10 \times 0 = -167667 \text{ [дол.].}$$

Для гіршого (worse) сезону задача (2) – (4), (6) – (8) замість y_i використовує $y_i^w = 0.8\,y_i$ і має такі оптимальні значення:

$$x_1^* = 100,\ x_2^* = 25,\ x_3^* = 375,\ d_1^* = 0,\ d_2^* = 180,$$
$$s_1^* = 0,\ s_2^* = 0,\ s_3^* = 6000,\ s_4^* = 0. \qquad (11)$$

Цим значенням відповідають мінімальні витрати

$$C^* = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + c_3 x_3^* + P_1(1.4\,d_1^* - s_1^*) + P_2(1.4\,d_2^* - s_2^*) - P_3 s_3^* - P_4 s_4^* =$$
$$= 150 \times 100 + 230 \times 25 + 260 \times 375 + 170(1.4 \times 0 - 0) + 150(1.4 \times 180 - 0) -$$
$$-36 \times 6000 - 10 \times 0 = -59950 \text{ [дол.].}$$

Оптимальні значення (10) пояснюються тим, що при високих урожайностях потрібно менше площі для вирощування необхідних (за обмеженнями (3) і (4)) обсягів пшениці та кукурудзи, а також буряка (за обмеженнями (7) і (8)). При цьому решта площі використовується для пшениці на продаж. При низьких урожайностях потрібно більше площі для вирощування необхідних обсягів пшениці і кукурудзи, а також буряка. При оптимальних значеннях (11) обмеження (4) задовольнятиметься при закупівлі кукурудзи.

Порівняння наборів оптимальних значень (9) – (11) свідчить, що коливання урожайності у межах 20 % від середньої (у межах відношення $1.2 / 0.8 = 1.5 = 150\,\%$ між відповідними максимумом і мінімумом) веде до помітно більших коливань оптимальних рішень фермера: коливання оптимальної площі під пшеницю від 100 до 183.33 акрів (у межах відношення 183.33 %), оптимальної площі під кукурудзу – від 25 до 80 акрів (у межах відношення $80 / 25 = 3.2 = 320\,\%$), оптимальної площі під буряк – від 250 до 375 акрів (у межах відношення $375 / 250 = 1.5 = 150\,\%$), оптимального прибутку – від 59950 до 167667 дол. (у межах відношення $167667 / 59950 = 2.80 = 280\,\%$).

Хоча фермер може користуватися довгостроковими прогнозами погоди для уточнення своїх рішень і зниження їхньої чутливості, немає досить точних метеорологічних прогнозів на півроку вперед. Тому для фермера завжди є ризик випадку $s_4 > 0,$ а також випадку великого значення $(q - s_3),$ зважаючи на відношення $P_3 / P_4 = 36 / 10 = 3.6 = 360\,\%.$

Отже, фермер усвідомлює неможливість прийняття досконалого рішення, що даватиме максимальний прибуток за будь-яких обставин, а тому прагне оцінки виграшів і втрат від кожного рішення в кожній ситуації. Фермер приймає рішення $x_1,\ x_2,\ x_3$ про виділення землі під культури, але не має точних значень

стосовно продажу $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$ та закупівлі $d_1,\ d_2$ культур, які залежать від урожайностей $y_1,\ y_2,\ y_3$ (за обмеженнями (3), (4), (8)). Нехай індекс (index) $i = 1,2,3$ сценарію відповідає кращому, звичайному, гіршому сезону відповідно. Тоді кожному сценарію $i = 1,2,3$ відповідають свої оптимальні значення s_{1i}, $s_{2i},\ s_{3i},\ s_{4i}, d_{1i},\ d_{2i},\ y_{1i},\ y_{2i},\ y_{3i}$.

Якщо фермер максимізує свій довгостроковий сподіваний прибуток, вважає всі можливі сценарії $i = 1,2,3$ рівноймовірними та є нейтральним до ризику, то мінімізує свою цільову функцію

$$C = \sum_{j=1}^{3} c_j x_j + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}[P_1(1.4\,d_{1i} - s_{1i}) + P_2(1.4\,d_{2i} - s_{2i}) - P_3 s_{3i} - P_4 s_{4i}] \qquad (12)$$

при обмеженнях (2) та модифікаціях обмежень (3), (4), (7), (8)

$$y_{1i}x_1 + d_{1i} - s_{1i} \geq 200,\ i = 1,2,3, \qquad (13)$$

$$y_{2i}x_2 + d_{2i} - s_{2i} \geq 240,\ i = 1,2,3, \qquad (14)$$

$$s_{3i} \leq q,\ i = 1,2,3, \qquad (15)$$

$$s_{3i} + s_{4i} \leq y_{3i}x_3,\ i = 1,2,3, \qquad (16)$$

де $y_{j1} = y_j^b,\ y_{j2} = y_j,\ y_{j3} = y_j^w,\ j = 1,2,3.$ Модель (12) – (16) стохастичних рішень відома як задача стохастичного програмування в розширеній формі, оскільки враховує в явному вигляді змінні $s_{1i},\ s_{2i},\ s_{3i},\ s_{4i},\ d_{1i},\ d_{2i},\ i = 1,2,3,$ рішень другого етапу для всіх сценаріїв. Оптимальний розв'язок задачі (12) – (16) задається рішеннями першого етапу (які приймаються до реалізації погодних умов і збору урожаю)

$$x_1^* = 170,\ x_2^* = 80,\ x_3^* = 250,$$

а також рішеннями другого етапу

$$d_{11}^* = 0 = d_{21}^*,$$
$$s_{11}^* = 310,\ s_{21}^* = 48,\ s_{31}^* = 6000,\ s_{41}^* = 0,$$
$$d_{12}^* = 0 = d_{22}^*,$$
$$s_{12}^* = 225,\ s_{22}^* = 0,\ s_{32}^* = 5000,\ s_{42}^* = 0,$$
$$d_{13}^* = 0,\ d_{23}^* = 48,$$
$$s_{13}^* = 140,\ s_{23}^* = 0,\ s_{33}^* = 4000,\ s_{43}^* = 0. \qquad (17)$$

Цим рішенням відповідає оптимальне значення

$$C^* = \sum_{j=1}^{3} c_j x_j^* + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}[P_1(1.4\,d_{1i}^* - s_{1i}^*) + P_2(1.4\,d_{2i}^* - s_{2i}^*) - P_3 s_{3i}^* - P_4 s_{4i}^*] =$$
$$= 150 \times 170 + 230 \times 80 + 260 \times 250 +$$

$$+\frac{1}{3}[170(1.4\times 0-310)+150(1.4\times 0-48)-36\times 6000-10\times 0]+$$

$$+\frac{1}{3}[170(1.4\times 0-225)+150(1.4\times 0-0)-36\times 5000-10\times 0]+$$

$$+\frac{1}{3}[170(1.4\times 0-140)+150(1.4\times 48-0)-36\times 4000-10\times 0]=-108390 \text{ [дол.].}$$

Оптимальний розв'язок полягає у тому, щоб уникати продажу буряка за невигідною ціною P_4, дотримуючись обмеження (7) як рівності при сценарії 1, а також як строгої нерівності при сценаріях 2 і 3. Площа під кукурудзу виділяється так, щоб задовольняти обмеженню (4) при $d_{22}=0=d_{23}$ та $d_{23}>0$, а решта площі виділяється під пшеницю, надлишок якої (за обмеженням (3)) можна продати при будь-якому сценарії. При точному прогнозі фермер дотримуватиметься обмеження (7) як рівності завжди, а не лише при сценарії 1.

У реальності фермер не має точного прогнозу, а тому вимушений балансувати (хеджувати) свої рішення відносно різних сценаріїв. Ефект хеджування суттєво впливає на сподіваний оптимальний прибуток. Припустимо, урожайності змінюються циклічно: після року із сценарієм 1 іде рік із сценарієм 2, а після року із сценарієм 2 йде рік із сценарієм 3. Фермер приймає рішення (9), (10), (11) при сценарії 1, 2, 3 відповідно, що дає йому прибуток 167667, 118600, 59950 дол. відповідно, або в середньому $\dfrac{167667+118600+59950}{3}=115406$ [дол.].

Якщо урожайності змінюються не циклічно, а випадково, то при точному прогнозі фермер приймає рішення (9), (10), (11) при сценарії 1, 2, 3 відповідно, отримуючи в довгостроковому періоді сподіваний прибуток 115406 дол. на рік.

За відсутності точного прогнозу сценарію фермер приймає рішення (17), отримуючи в довгостроковому періоді сподіваний прибуток 108390 дол. на рік, що менше аналогічного прибутку при точному прогнозі на суму

115406 – 108390 = 7016 [дол.],

яку називають сподіваною вартістю досконалої інформації (expected value of perfect information, EVPI). Отже, наслідком невизначеності є втрата прибутку [7].

За відсутності точного прогнозу сценарію фермер може орієнтуватися на усереднений сценарій 2, приймаючи рішення (9) сподіваного значення (expected value solution) на першому етапі:

$$x_1^*=120,\ \ x_2^*=80,\ \ x_3^*=300. \tag{18}$$

Маючи рішення (18) на першому етапі, на другому етапі при (кращому) сценарії $i=1$ фермер обирає рішення s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41}, d_{11}, d_{21}, які при відповідних обмеженнях (13) – (16)

$$3\times 120+d_{11}-s_{11}=y_{11}x_1+d_{11}-s_{11}\ge 200,$$

$$3.6\times 80+d_{21}-s_{21}=y_{21}x_2+d_{21}-s_{21}\ge 240,$$

$$s_{31} \le q = 6000, \quad s_{31} + s_{41} \le y_{31}x_3 = 36 \times 300,$$

дозволяють досягати мінімального значення -148000 цільової функції (6).

Аналогічно, маючи рішення (18) на першому етапі, на другому етапі при сценарії $i = 2$ фермер обирає рішення s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42}, d_{12}, d_{22} (рішення (9)), які при відповідних обмеженнях (13) – (16)

$$2.5 \times 120 + d_{12} - s_{12} = y_{12}x_1 + d_{12} - s_{12} \ge 200,$$

$$3 \times 80 + d_{22} - s_{22} = y_{22}x_2 + d_{22} - s_{22} \ge 240,$$

$$s_{32} \le q = 6000, \quad s_{32} + s_{42} \le y_{32}x_3 = 30 \times 300,$$

дозволяють досягати мінімального значення -118600 цільової функції (6).

Нарешті, маючи рішення (18) на першому етапі, на другому етапі при (гіршому) сценарії $i = 3$ фермер обирає рішення s_{13}, s_{23}, s_{33}, s_{43}, d_{13}, d_{23}, які при відповідних обмеженнях (13) – (16)

$$2 \times 120 + d_{13} - s_{13} = y_{13}x_1 + d_{13} - s_{13} \ge 200,$$

$$2.4 \times 80 + d_{23} - s_{23} = y_{23}x_2 + d_{23} - s_{23} \ge 240,$$

$$s_{33} \le q = 6000, \quad s_{33} + s_{43} \le y_{33}x_3 = 24 \times 300,$$

дозволяють досягати мінімального значення -55120 цільової функції (6).

Таким чином, подібна двокрокова оптимізація у довгостроковому періоді дає щорічний прибуток $\frac{148000 + 118600 + 55120}{3} = 107240$ [дол.], який менший прибутку 108390 [дол.], який досягається рішенням (17) задачі (одно-крокової) стохастичної оптимізації (12) – (16), на вартість стохастичного рішення (value of the stochastic solution, VSS)

$$108390 - 107240 = 1150 \text{ [дол.]}.$$

Отже, розв'язання задачі стохастичної оптимізації дає виграш, не менший виграшу, гарантованого фінансовим посередником. У даній задачі фермера EVPI значно перевищує VSS, але є задачі стохастичної оптимізації, де VSS > EVPI.

Величини VSS та EVPI мотивують розробку методів розв'язання задач стохастичної оптимізації: EVPI вимірює цінність точного знання про майбутнє, а VSS – цінність знання і використання розподілів майбутніх результатів. На практиці є більше інформації про розподіли майбутніх результатів, ніж точного знання про майбутнє. Якщо прогнози, вибірки і дослідження дозволяють точніше дізнаватися про майбутнє, то величина EVPI може служити підставою для проведення подальших прогнозів, вибірок і досліджень.

Загалом задача фермера – це стохастична задача вибору рішень за відсутності повної інформації про деякі випадкові події. Такі рішення називають рішеннями першого етапу і позначають вектором $\vec{x}$. Після прийняття рішення першого етапу спостерігається реалізація ω (сценарій i) для деякого випадкового вектора $\vec{\xi}(\omega)$ (вектора $\vec{\xi}$), що дає повну інформацію для прийняття рішення $\vec{y}(\omega)$ другого етапу, яке коригує рішення $\vec{x}$.

У задачі фермера випадковий вектор – це множина урожайностей і коригуючих дій продажу і купівлі продуктів. Тоді ця задача формулюється як двоетапна задача стохастичного програмування з фіксованою рекурсією, що задається матрицею W, – задача мінімізації по $\vec{x} \geq \vec{0}$ цільової функції

$$\vec{c}^T \vec{x} + E\, Q(\vec{x}, \vec{\xi}(\omega)) \tag{18}$$

при обмеженнях

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де $Q(\vec{x}, \vec{\xi}(\omega)) = \min\limits_{\vec{y}(\omega)\geq\vec{0}} \{\vec{q}^T(\omega)\vec{y}(\omega) \,|\, W\,\vec{y}(\omega) = \vec{h}(\omega) - T(\omega)\,\vec{x}\}$; E означає математичне сподівання (expectation) відносно випадкового вектора $\vec{\xi}(\omega)$, який складається з компонентів випадкових векторів $\vec{q}^T(\omega)$, $\vec{h}^T(\omega)$ і матриці $T(\omega)$ відповідної вимірності; детерміновані матриця A і вектор $\vec{b}$ мають вимірності, що відповідають вимірності вектора $\vec{x}$. Функцію

$$f(\vec{x}) = E\, Q(\vec{x}, \vec{\xi}(\omega))$$

називають функцією вартості рекурсії (recourse value function).

У задачі фермера випадковий вектор $\vec{\xi}(\omega)$ є дискретною змінною, яка приймає тільки 3 різні значення, і складається з елементів випадкової матриці $T(\omega)$. Тоді при сценарії i задачу (12) – (16) фермера на другому етапі можна записати як задачу мінімізації по $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ d_1,\ d_2,$

$$Q(\vec{x}, i) = 238\,s_1 - 170\,d_1 + 210\,s_2 - 150\,d_2 - 36\,s_3 - 10\,s_4 \tag{19}$$

за обмежень

$$t_1(i)\,x_1 + d_1 - s_1 \geq 200,$$
$$t_2(i)\,x_2 + d_2 - s_2 \geq 240,$$
$$s_3 + s_4 \leq t_3(i)\,x_3, \quad s_3 \leq 6000, \quad \vec{s},\ \vec{d} \geq \vec{0},$$

де $t_j(i)$ – це урожайність культури j при сценарії (стані природи) i. Випадковий вектор $\vec{\xi}(\omega) = (\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$ задачі (18) задають три вектори урожайності $\vec{t}_1(i), \vec{t}_2(i), \vec{t}_3(i),$ або три різні вектори $\vec{\xi}_1 = (t_1(1), t_2(1), t_3(1))$, $\vec{\xi}_2 = (t_1(2), t_2(2), t_3(2))$, $\vec{\xi}_3 = (t_1(3), t_2(3), t_3(3))$ задачі (19).

Можна сказати, що випадковий вектор $\vec{\xi}(\omega)$ фактично залежить від сценарію $i = 1, 2, 3.$ Зазначимо, що в задачі (19) рішення $s_1, s_2, s_3, s_4,\ d_1, d_2$, неявно залежать від сценарію.

Таким чином, задачу стохастичного програмування можна задавати як у розширеній формі (12) – (16) (коли кожній можливій реалізації випадкового вектора відповідає певний вектор рішення на другому етапі), так і в неявній формі (18) або (19).

В.М. Горбачук, М.С. Дунаевский, А.А.Сырку, С.-Б. Сулейманов

СТОИМОСТИ СОВЕРШЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ И СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Показано, что модели стохастического программирования дают определенные измеряемые преимущества по сравнению с аналогичными моделями детерминистического математического программирования.

V.M. Gorbachuk, M.S. Dunaievskyi, A.A. Syrku, S.-B. Suleimanov

THE VALUES OF PERFECT INFORMATION AND STOCHASTIC SOLUTION

It is shown that stochastic programming models provide certain measurable advantages in comparison with similar models of deterministic mathematical programming.

1. Горбачук В.М., Чумаков Б.М., Сирку А.А. Стохастичний аналіз активного резерву. *Теорія прийняття рішень* (26 вересня – 1 жовтня 2016 р., Ужгород). Ужгород: УжНУ, 2016. С. 94 – 95.
2. Горбачук В.М., Єрмольєв Ю.М., Єрмольєва Т.Ю. Двоетапна модель еколого-економічних рішень. *Вісник Одеського національного університету. Економіка*. 2016. Т. 21, Вип. 9. С. 142 – 147.
3. Birge J.R., Louveaux F. Introduction to stochastic programming. 2-nd edition. Springer, 2011. 485 p.
4. Wald A. Statistical decision functions. *Annals of mathematical statistics*. 1949. Vol. 20, N 2. P. 165 – 205.
5. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 492 с.
6. Berger J.O. Statistical decision theory and Bayesian analysis 2-nd edition. New York, NY: Springer-Verlag, 1993. 618 p.
7. Gorbachuk V.M. An asymmetric Cournot-Nash equilibrium under uncertainty as a generalized Cournot-Stackelberg-Nash equilibrium. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 4. P. 471 – 477.

Одержано 09.11.2017

Про авторів:

Горбачук Василь Михайлович,
доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
E-mail: GorbachukVasyl@netscape.net

Дунаєвський Максим Сергійович,
аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,

Сирку Андрій Анатолійович,
аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,

Сулейманов Сеїт-Бекір,
аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.