КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.854

В.А. МИХАЙЛЮК, Н.В. ЛИЩУК

МЕТОД РЕЗОЛЮЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧ 0-1 ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Поскольку метод резолюции для линейных задач 0-1 программирования полный, то представляет интерес его изучение и использование. Приведены такие изменения ограничений и целевой функции, при которых оптимальное решение остается неизменным. При этом возмущения ограничений и целевой функции удовлетворяют системе линейных неравенств.

Введение. Термин анализ устойчивости не отделим от процедуры решения задачи, где находится оптимальное решение, и выполняются дополнительные вычисления для определения зависимости оптимального решения от изменений входных данных. Цель анализа устойчивости состоит в определении таких изменений входных данных, при которых оптимальное решение остается неизменным [1].

Как правило устойчивость оптимального или приближенного к нему решения характеризуется некоторыми параметрами: область, шар, радиус устойчивости и т. д. [2 – 4]. В работе [2] рассмотрены общие понятия теории устойчивости, введено важное понятие радиуса устойчивости задачи. Изучаются вопросы вычисления радиуса устойчивости ε-приближенного решения для некоторого класса дискретных экстремальных задач в [3]. Определены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых радиус устойчивости равен нулю или бесконечности. Предложен алгоритм вычисления радиуса устойчивости и выделен класс задач, для которых этот алгоритм является полиномиальным. При этом все изучаемые величины касаются изменений коэффициентов целевой функции задачи. Представлены и изучены алгоритмы вычисления радиуса устойчивости ε-оптимального решения для оптимизационной задачи с разными целевыми функциями [4]. При этом также изменяются значения коэффициентов целевой функции задачи. В работах [5, 6] получены результаты относительно устойчивости локальных решений задач целочисленного программирования. Важное значение уделяется оценкам сложности анализа устойчивости дискретных задач оптимизации. Для NP-трудных задач это сводится к анализу существования полиномиальных алгоритмов нахождения оптимальных решений измененных задач, исходя из оптимальных решений исходной задачи. В работе [7] приводятся результаты по сложности анализа устойчивости 0/1 задач с линейной целевой функцией при изменении значений целевого вектора. Показано, что является NP-трудным (не существует полиномиального алгоритма при $P \neq NP$) определить остается ли оптимальное решение неизменным для NP-трудных задач при произвольном изменении вектора значений целевой функции. Подобных результатов по изменению коэффициентов вектора ограничений или вообще нет, или они малочисленны. В этом направлении следует отметить работы [8 – 11]. С понятием стойкости тесно связано понятие постоптимального анализа задач дискретной оптимизации [12].

П. Пардалос и Б. Гольденгорин [13 – 15] разработали группу толерантных методов (методы допустимых отклонений, tolerance-based methods).

Верхняя толерантность, верхнее допустимое отклонение (the upper tolerance) по отношению к элементу e, который входит в оптимальное решение, – максимальное увеличение веса $e(c(e))$, при котором оптимальное решение остается оптимальным (весовые коэффициенты остальных элементов – неизменны). Нижняя толерантность, нижнее допустимое отклонение (the lower tolerance) по отношению к элементу, который не входит в оптимальное решение, – максимальное уменьшение веса $e(c(e))$, при котором прежнее оптимальное решение остается неизменным.

Роль толерантностей.

1. Они используются для нахождения «хороших» или оптимальных решений задач. Для эвристических методов – определяется какие элементы сохраняются в каждой итерации. Для методов ветвей и границ они используются для определения какие элементы следует включить или исключить в шаге ветвления. Верхние толерантности определяют какие элементы сохраняются. Нижние толерантности определяют какие элементы не следует выбирать.

2. Толерантности могут быть использованы для определения нижних оценок целевых функций (для задачи минимизации).

3. Могут быть использованы для частичного анализа устойчивости комбинаторных задач.

Tolerance-based methods используют релаксацию. Например, это (Assignment Problem, проблема о назначениях) для решения MSTP (Minimum Spanning Tree Problem) и ATSP (Asymmetric Traveling Salesman Problem). Выигрыш в сложности в n раз дает решение AP с использованием двойственного подхода (см. ст. «The reduction of computation times of upper...») в сравнении с тем, если бы толерантности находились независимо от нахождения оптимального решения исходной задачи. Tolerance-based methods классифицируются:

а) числом вычисленных толерантностей (от некоторых до всех верхних и нижних);

б) частотой вычисленных толерантностей (только на начальном шаге или во всех итерациях).

Подход к исследованию устойчивости, основанный на применении метода резолюции и элементов теории выводимой двойственности (inference duality) рассмотрен в работах [16, 17].

В данной работе используется и развивается именно этот подход.

Постановка задачи. Выводимая двойственность. Рассмотрим общую оптимизационную задачу программирования вида.

$$\begin{gathered} \min f(x), \\ C(x), \\ x \in D, \end{gathered} \tag{1}$$

где $C(x)$ задает допустимое решение x, D задает ограничения на компоненты вектора x (целочисленность, булевость и т. д.). Выводимая двойственность к задаче (1): максимизировать нижнюю оценку $f(x)$, которая может быть выведена из ограничений. Это задача поиска доказательства оптимальности оценки. Двойственная задача может быть записана в виде.

$$\begin{gathered} \max v \\ C(x) \xrightarrow{P} (f(x) \geq v), \\ v \in R, P \in \mathrm{P}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $C(x) \xrightarrow{P} (f(x) \geq v)$ означает, что доказательство P выводит $f(x) \geq v$ из $C(x)$. Область действия переменной P – семейство доказательств P и двойственное решение – это пара (v, P). Когда прямая задача (1) – недопустима, двойственная (2) – не ограничена, и двойственное решение содержит для произвольного x схему доказательства P, которая выводит $f(x) \geq v$ из $C(x)$ для произвольного данного v.

Лемма 1 (слабость логического вывода). Оптимальное значение прямой задачи ограничено снизу оптимальным значением любой двойственной задачи.

Разрыв между оптимальным значением z^* прямой и оптимальным значением v^* двойственной – разрыв двойственности. Разрыв может существовать, поскольку нет доказательства в P, что выводит $f(x) \geq z^*$ из C, если даже из C следует $f(x) \geq z^*$. Это может случиться, когда схема доказательств P является неполной, и означает то, что она не может вывести все ограничения, которые подразумеваются.

Отсутствие разрыва двойственности называется сильной двойственностью.

Теорема 1 [17]. Предположим, что семейство доказательств ο является полным по отношению к ограничениям $f(x) \geq v$. Тогда прямая задача (1) и двойственная (2) имеют одинаковые оптимальные значения. Более того допустимое решение x^* задачи (1) оптимально тогда и только тогда, когда (2) имеет допустимое решение (v, P) с $v = f(x^*)$.

Сертификаты, выводимая двойственность и сложность задач. Сертификат допустимости для экземпляра задачи – это информация для проверки, что экземпляр действительно допустимый (принадлежит допустимой области). Например, сертификат может быть множеством переменных, которые удовлетворяют ограничению. Сертификат недопустимости это доказательство, что экземпляр задачи не имеет допустимого решения. Сертификат оптимальности – специальный случай: если $v*$ (возможно бесконечное) оптимальное значение целевой функции $f(x),$ сертификат оптимальности это доказательство, что экземпляр задачи недопустим, когда $f(x) < v^*$ добавляется к ограничениям.

Оптимизационная проблема принадлежит $NP,$ если существует полиномиальный сертификат допустимости для любого данного допустимого экземпляра задачи. Оптимизационная проблема принадлежит $co-NP,$ если существует полиномиальный сертификат оптимальности для данного экземпляра.

Теорема 2 [17]. Оптимизационная задача (1) принадлежит $co-NP$ тогда и только тогда, когда (2) принадлежит NP для некоторого $P.$

Интересе факт, что большинство известных комбинаторных задач принадлежат не $co-NP,$ а $NP.$ Другими словами комбинаторная задача в основном принадлежит $NP,$ а ее выводимая двойственность – нет.

Общий переборный алгоритм для решения прямой задачи. В общем случае можно охарактеризовать прямой метод решения задачи как метод, проверяющий возможные значения переменных и двойственный метод, проверяющий возможные доказательства оптимальности без интерпретации переменных. В классической оптимизации метод ветвей и границ прямой, а метод отсекающих плоскостей двойственный [17]. Двойственно выводимая дискретная оптимизация может быть решена прямым методом, в частности, с помощью дерева перебора. Рассмотрим задачи.

$$\begin{aligned} &\min cx, \\ &Ax \geq 0, \\ &x \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\max z \quad (Ax \geq a, x \geq 0) \xrightarrow{R^n} cx \geq z, \tag{4}$$

где $A - m \times n$ матрица.

Один из способов решения (1) – перебор значений переменных, пока не будут найдены все допустимые решения. Поиск повторяется, если допустимое решение найдено или некоторое ограничение нарушено. Наилучшее допустимое решение есть оптимальным. Пусть z^* оптимальное решение, найденное перечислением. Для решения двойственной модифицируем дерево вариантов, чтобы оно отвергало $f(x) < z^*.$ Это делается просто добавлением ограничения $f(x) < z_t$ к множеству ограничений C для каждого узла $t,$ для которого найдено допустимое решение, где $z_t -$ значение решения. Тогда $f(x) < z_t$ – ограничение, которое нарушено на $t.$ Существует по крайней мере одно ограничение, нарушенное на каждом концевом узле.

Алгоритм

1. Пусть $C(x)$ множество ограничений, определяющих допустимость (1).

2. Пусть L список активных узлов, изначально содержащих корневой узел, ассоциирующийся с пустым множеством приписываний (меток).

3. Пусть $\bar{z}$ – верхняя оценка оптимального значения; первоначально $\bar{z} = \infty$.

4. Пока L не есть пустым, то исключаем узел с L и пусть A – это множество меток ассоциированных с узлом.

5. Если приписывание в A не нарушает огранчений в $C,$ то если A приписывание значений $v_1,...,v_n$ к каждому $x_1,...,x_n$ так чтобы, удовлетворить каждое ограничение.

6. Тогда выполнить $\bar{z} = \min\{\bar{z}, f(v_1,...v_n)\}$, иначе выбрать переменную x_j, к которой не приписано значение.

7. Для каждого $v \in D_{x_j}$: добавить узел к L и ассоциировать его с $A \cup \{x_j = v\}$.

8. Если $\bar{z} < \infty$, то $\bar{z}$ – оптимальное значение (1). Иначе (1) – несовместима.

Метод резолюции [16]. Пропозициональная логика состоит из переменных с отрицаниями (x_j и $\bar{x}_j$), а также логических связок $\{\wedge, \vee, \neg\}$. Логический клоз – дизъюнкция литералов, например, конъюнкция $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge \ \wedge(\neg x_2 \vee \neg x_3)$ двух клозов эквивалентна первой конъюнкции. Первая конъюнкция может быть опущена без эффекта, потому что она поглощается второй. Клоз C_1 заключает в себе клоз C_2 (из C_1 следует C_2) тогда и только тогда, когда C_1 поглощает C_2 или все литералы C_1 встречаются в C_2. Пустой клоз не содержит литералов и при необходимости – ложный. Метод Куайна выдает все импликации данного множества клозов. Резольвента (по x_j) состоит из дизъюнкции литералов кроме клозов с x_j и $\neg x_j$. Например, клозы $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ и $\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4$ получают резольвенту $x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4$. В примере x_1 либо ложно, либо истина. Если ложно с первого клоза следует $x_2 \vee x_3$. Если истина, со второго клоза следует $x_2 \vee \neg x_4$. В обоих случаях следует абсорбция. Алгоритм резолюции применяется к множеству клозов S таким образом. Определяем пару клозов в S, имеющих резолюцию R, которая не поглощается. Удаляем из S все клозы поглощаемые R и добавляем R к S. Продолжаем пока не появляются такие пары. Куайн показал, что алгоритм является полным: если он начинается с S и заканчивается S', то любой клоз, который следует с S поглощается некоторым клозом S'. В частности S – невыполнимая тогда и только тогда, когда S' содержит пустой клоз.

Пример.

Бракованные ограничения (nogood constraints). Успешные оптимизационные комбинаторные методы почти всегда прямо-двойственные методы: они комбинируют поиск относительно решений с выводом и релаксацией с точки зрения решения выводимо двойственной или релаксационно двойственной, так как они решают прямые задачи. Поиск в направлении улучшения ограничений – это ключевое понятие бракованных ограничений и используется в методе резолюции. Если z^* оптимальное решение прямой задачи (1), решение двойственной (2) равнозначно нахождению решения $f(x) \geq z^*$, используя ограничения и передаваемые посылки. Это предполагает правила вывода, полные в соответствующем виде: они предполагают путь получения действительных импликаций вида $f(x) \geq z$ от типа ограничений задачи. Метод доказательства резолюций сам по себе не нужен для анализа устойчивости. Он необходим для знания предпосылок (какие ложные клозы используются в узлах). Поскольку правило резолюции продолжает выполняться, когда данные изменяются при доступных предпосылках неравенства, ассоциированные с каждым узлом, продолжают выполняться при ложных клозах. Ложные клозы (nogood constraints) получаются с помощью резольвент.

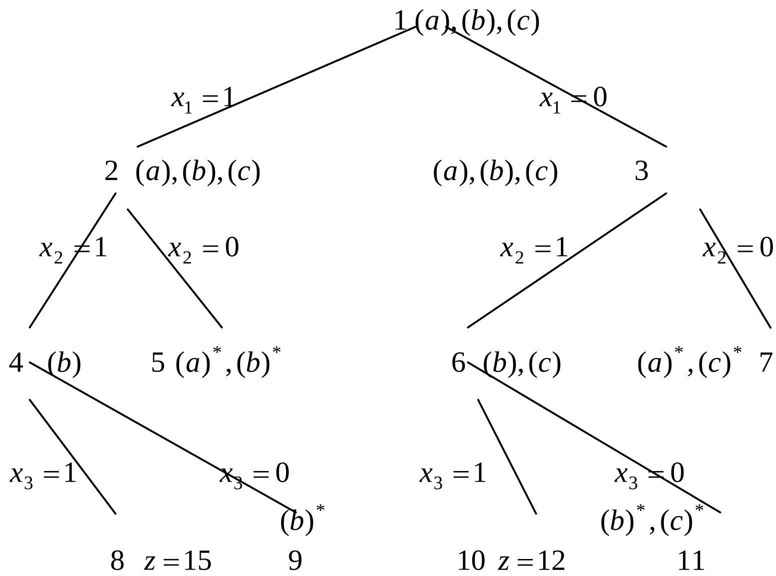
Рассмотрим пример:

$$\min 3x_1 + 5x_2 + 7x_3,$$
$$(a)\quad 2x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 3,$$
$$(b)\quad -x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 4,$$
$$(c)\quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 2,$$
$$x \in \{0, 1\}^3.$$

Оптимальное значение равно 12 (получено переборным алгоритмом). Доказательство, что $z \geq 12 - \Delta z$ (для данного $\Delta z \geq 0$) может быть ассоциировано для каждого узла неравенством, которое нарушается в данном узле. С каждым недопустимым узлом ассоциируем нарушенные ограничительные неравенства. С каждым допустимым узлом ассоциируем неравенство $cx \leq \tilde{z} - \Delta z - \varepsilon$, где $\tilde{z}$ значение функции цели в этом узле; $\varepsilon = \{0, \Delta z > 0, > 0, \Delta z = 0.$ Неравенства вида $cx \leq \tilde{z} - \Delta z - \varepsilon$ будем записывать $-cx \geq \varepsilon - \tilde{z} + \Delta z$. Поскольку дерево поиска является исчерпывающим неравенства в узлах должны быть изменчивыми. Доказательство их изменчивости доказывает оценку $z \geq 12 - \Delta z$ и, следовательно, решает выводимо двойственную.

Лемма 2 [17]. Простой способ проверки следует ли с $ax \geq \alpha$ клоз, который фальсифицируется для $(x_{j_1}, ..., x_{j_d}) = (v_{j_1}, ..., v_{j_d})$. Пусть J множество индексов j с $\{j_1, ..., j_d\}$, для которых $a_j > 0$, если $v_j = 1$ и $a_j < 0$, если $v_j = 0$. Пусть $x_j(v)$ есть x_j, если $v = 1$ и $\neg x_j$, если $v = 0$. Тогда $\bigvee_{j \in J} x_j(1 - v_j)$ – требуемый клоз, если $\sum_{j \in J} a_j v_j + \sum_{j \notin J} \max\{0, a_j\} < \alpha$, иначе не существует такого клоза.

Оставшиеся ограничения (еще не нарушенные) отмечены для каждого узла, ограничения нарушенные в каждом узле обозначены звездочками; если нет нарушенных ограничений показано целевую функцию z (рисунок). В таблице в каждом узле показаны такие нарушения (им соответствуют бракованные ограничения, nogood constraints). Опишем все бракованные ограничения таблицы.



РИСУНОК

ТАБЛИЦА

Узел 1	$\acute{\emptyset}$
Узел 2	$\neg x_1$
Узел 3	x_1
Узел 4	$\neg x_1 \vee \neg x_2$
Узел 5	$(\neg x_1 \vee x_2)$
Узел 6	$x_1 \vee \neg x_2$
Узел 7	$(x_1 \vee x_2)$
Узел 8	$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$
Узел 9	$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$
Узел 10	$(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$
Узел 11	$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$

Резольвенту конъюнкций K_1 и K_2 будем обозначать $\mathrm{Re}(K_1, K_2)$. Имеем систему резольвент для данной задачи.

1. $\mathrm{Re}(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3, \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) = \neg x_1 \vee \neg x_2$.
2. $\mathrm{Re}(\neg x_1 \vee \neg x_2, \neg x_1 \vee x_2) = \neg x_1$.
3. $\mathrm{Re}(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3, x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) = x_1 \vee \neg x_2$.
4. $\mathrm{Re}(x_1 \vee \neg x_2, x_1 \vee x_2) = x_1$.
5. $\mathrm{Re}(\neg x_1, x_1) = \acute{\varnothing}$.

Ограничение (c) не ассоциировано ни с каким узлом и двойственное доказательство сохраняет предпосылки (не изменяется), если даже (c) удалить из задачи. Таким образом, (c) излишне и может быть удалено без изменения оптимального решения. Дальше рассмотрим ограничение (b), которое связано с узлами 9 и 11. Фальсифицированный клоз в узле 9 – $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$, в узле 11 – $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$. Тогда (b) может быть изменено любым способом так, что оно продолжает имплицировать эти два клоза без изменения оценки $z \geq 12$. Предположим, что (b) изменилось до $(-1+\Delta b_1)x_1 + (1+\Delta b_2)x_2 + (4+\Delta b_3)x_3 \geq \ \geq 4+\Delta\beta$. Легко видеть с леммы 2, что с измененного неравенства следует $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ тогда и только тогда, когда $(-1+\Delta b_1)+(1+\Delta b_2) < 4+\Delta\beta$.

Аналогично следует $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ тогда и только тогда, когда $(1+\Delta b_2) < 4+\Delta\beta$. Таким образом, изменения $\Delta b, \Delta\beta$ допустимы, если они удовлетворяют линейной системе:

$$\Delta b_1 + \Delta b_2 < 4 + \Delta\beta\,,$$
$$\Delta b_2 < 3 + \Delta\beta. \tag{5}$$

Целевую функцию можно описать следующим образом. Поскольку толерантность Δz определена, целевая функция может быть изменена к любой функции $(3+\Delta c_1)x_1 + (5+\Delta c_2)x_2 + (7+\Delta c_3)x_3$ такой, что $-(3+\Delta c_1)x_1 - -(5+\Delta c_2)x_2 - (7+\Delta c_3)x_3 \geq \varepsilon - 15 + \Delta z$ продолжает следовать $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$ и $-(3+\Delta c_1)x_1 - (5+\Delta c_2)x_2 - (7+\Delta c_3)x_3 \geq \varepsilon - 12 + \Delta z$ продолжает следовать $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$. Это достигается при

$$\Delta c_1 + \Delta c_2 + \Delta c_3 \geq -\Delta z,$$
$$\Delta c_2 + \Delta c_3 \geq -\Delta z\,.$$

Выводы. Успешные оптимизационные комбинаторные методы почти всегда прямо-двойственные методы: они комбинируют поиск относительно решений с выводом и релаксацией с точки зрения решения выводимо двойственной или релаксационно двойственной, так как они решают прямые задачи.

Для решения двойственно выводимой задачи необходимо: идентифицировать правила вывода, которые являются полными для типа ограничений в задачах; использовать правила для доказательства оптимальности.

Поиск в направлении улучшения ограничений – ключевое понятие бракованных ограничений и используется в методе резолюции. Если z^* оптимальное решение прямой задачи (1), решение двойственной (2) равнозначно нахождению решения $f(x) \geq z^*$, используя ограничения и передаваемые посылки. Это предполагает правила вывода, полные в соответствующем виде: они предполагают путь получения действительных импликаций вида $f(x) \geq z$ от типа ограничений задачи. Метод доказательства резолюций сам по себе не нужен для анализа устойчивости. Он необходим для знания предпосылок (какие ложные клозы используются в узлах). Поскольку правило резолюции продолжает выполняться, когда данные изменяются при доступных предпосылках неравенства, ассоциированные с каждым узлом, продолжают выполняться при ложных клозах. Ложные клозы (nogood constraints**)** получаются с помощью резольвент. При различных Δz получаются различные оценки $z \geq 12 - \Delta z$. При их совпадении получаем последовательность решений, которые и есть множеством устойчивых задач.

Представляет интерес вывод таких классов функций $\{f(x)\}$, для которых применим подход из данной статьи. В частности, представляют интерес функции «на узкие места» bottleneck (min-max) с целевыми коэффициентами вида $\max_{1 \leq i \leq n} c_i \cdot x_i$.

В.О. Михайлюк, Н.В. Ліщук

МЕТОД РЕЗОЛЮЦІЇ ДЛЯ АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ ЗАДАЧ 0-1 ПРОГРАМУВАННЯ

Оскільки метод резолюції для лінійних задач 0-1 програмування є повним, представляє інтерес його вивчення і використання. Наведені такі зміни обмежень та цільової функції, при яких оптимальний розв’язок залишається без змін. При цьому зміни обмежень та цільової функції задовольняють системі лінійних нерівностей.

V.A. Mikhailyuk, N.V. Lishchuk

RESOLUTION METHOD FOR THE ANALYSIS OF SENSITIVITY OF 0-1 PROGRAMMING PROBLEMS

Since the resolution method for 0-1 linear programming problems is complete, it is of interest to study and use it. Such changes of constraints and objective function are given that optimal solution remains unchanged. The perturbations of the constraints and the objective function satisfy a system of linear inequalities.

1. Fernandez-Baca D., Benkatachalam B. Sensitivity analysis in combinatorial optimization. Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics (ed. T. Guzalez). 2007. Chapman&Hall/CRC Computer and Information Science Series. P. 30-1 – 30-29.

2. Леонтьев В.К., Мамутов К.Х. Устойчивость решений в задачах линейного булева программирования. *Вычислительная математика и математическая физика.* 1988. Т. 28, № 10. С. 1475 – 1481.
3. Сотсков Ю.Н. Исследование устойчивости приближеного решения булевой задачи минимизации линейной формы. *Вычислительная математика и математическая физика.* 1993. Т. 33, № 5. С. 785 – 795.
4. Chakravarti N. and Wagelmans A.P. M. Calculation of stability radii for combinatorial optimization problems. *Operations Research Letters*. 1998. **23.** P. 1 – 7.
5. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наук. думка, 1985. 210 с.
6. Сергиенко И.В., Филоненко Н.В. Решение некоторых задач устойчивости в целочисленном линейном программировании. Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 6. С. 79 – 82.
7. Van Hoesel S., Wagelmans A. On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs. *Discrete Applied Mathematics*. 1999. **91.** P. 251 – 263.
8. Blair C. Sensitivity analysis for knapsack problems: a negative result. *Discrete Applied Mathematics*. 1998. **81.** P. 133 – 139.
9. Woeginger G.J. Sensitivity analysis for knapsack problems: another negative result. *Discrete Applied Mathematics*. 1999. **92.** P. 247 – 251.
10. Михайлюк В.А. Общий подход к оценке сложности постоптимального анализа дискретных задач оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. **46**, № 2. С. 134 – 141.
11. Михайлюк В.А., Лищук Н.В. Анализ устойчивости задачи о ранце: один отрицательный результат. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. **49**, № 2. С.48 –51.
12. Михайлюк В.О., Сергієнко І.В. Постоптимальний аналіз та наближені алгоритми реоптимізації для задач дискретного програмування. Київ: Наукова думка, 2015. 248 с.
13. Remco Germs, Boris Goldengorin, Marcel Turkensteen. Lower tolerance-based Branch and Bound algorithms for the ATSP. *Computer&Operations Research*. 2012. **39**, P. 291 – 298.
14. Gerold Jager, Boris Goldengorin, Panos M. Pardalos. The theory of Set Tolerances. *LION* 2014, LNCS 8426, 2014. P. 362 – 377
15. Marek Libura. Sensitivity analysis for minimum Hamiltonian path and traveling salesman problems. *Discrete Applied Mathematics*. 1991. 30. P. 197 – 211.
16. Chvatal V. Resolution Search. *Discrete Applied Mathematics*. 1997. 73. P. 81 – 99.
17. John N. Hooker. Integrated Methods for Optimization /Springer Science+Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York NY 10013, USA, 2007.

Получено 12.10.2017

Об авторах:

Михайлюк Виктор Алексеевич,

доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой прикладной математики и информатики
Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки,

E-mail: mikhailyukvictor2@gmail.com

Лищук Наталия Викторовна,

аспирантка Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки.

E-mail: lnatalkav@mail.ru