УДК 004.021:519.6

Л.П. ВАКАЛ

ГЕНЕТИЧНІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ ЧЕБИШОВСЬКОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

L. Vakal

GENETIC ALGORITHMS FOR CHEBYSHEV APPROXIMATION

A genetic algorithm for Chebyshev approximation of one and several variables functions by approximants of different types is proposed. A comparison of the genetic algorithm with traditional algorithms of approximation is made.
Key words: Chebyshev approximation, genetic algorithm.

Предложен генетический алгоритм для чебышевского приближения функций одной и многих переменных аппроксимантами разных типов. Проведено его сравнение с традиционными алгоритмами аппроксимации.
Ключевые слова: чебышевская аппроксимация, генетический алгоритм.

Запропоновано генетичний алгоритм для чебишовського наближення функцій однієї та декількох змінних апроксимантами різних типів. Проведено його порівняння з традиційними алгоритмами апроксимації.
Ключові слова: чебишовська апроксимація, генетичний алгоритм.

Вступ. Генетичні алгоритми (ГА) – це сучасні ефективні методи розв’язання складних багатопараметричних задач оптимізації. Ідея ГА запозичена у живої природи і полягає в комп’ютерній організації еволюційного процесу створення, модифікації та відбору кращих розв’язків з метою появи нових, більш прийнятних варіантів розв’язання задачі. При цьому алгоритм працює з популяцією особин, у хромосомі кожної з яких закодований можливий розв’язок задачі.

Вперше схема ГА запропонована Джоном Холландом у 1975 році [1]. Вона включає наступні етапи: 1) створення початкового покоління популяції; 2) визначення для кожної особини її пристосованості за функцією цілі; 3) вибір батьківських пар для схрещування; 4) створення нащадків; 5) мутація нащадків; 6) формування за допомогою редукції та селекції нового покоління популяції; 7) перевірка критерію зупинки алгоритму (у разі його невиконання еволюційний процес повторюється для нового покоління).

Спочатку в ГА використовувалась фіксована довжина і двійкове кодування хромосом. Пізніше для пошуку в неперервних просторах великої розмірності були розроблені генетичні алгоритми з дійсним кодуванням, в яких гени хромосоми напряму подаються у вигляді дійсних чисел [2, 3]. У більшості випадків ці алгоритми здійснюють пошук оптимуму краще та швидше, ніж ГА з двійковим кодуванням [3].

Сьогодні ГА використовуються для розв’язання різноманітних задач: оптимізації запитів у базах даних, керування роботами, обробки рентгенівських зображень, прогнозу розвитку фінансових ринків, налаштування і навчання нейронних мереж, добування нових знань з великих масивів даних та ін. [4, 5].

Крім того, ГА можуть застосовуватись у задачі апроксимації сіткових функцій для знаходження коефіцієнтів апроксиманта [6, 7]. У цьому випадку хромосома складається з генів – коефіцієнтів $A=(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ апроксиманта $F(X;A)$, значення яких потрібно оптимізувати, щоб якнайкраще наблизити задану функцію $f(X)$, $X=(x_1,\ldots,x_s)$. При s=1 маємо випадок наближення функції однієї змінної $f(x)$.

Для апроксимації часто використовують апроксимант найкращого наближення в розумінні чебишовської (рівномірної) норми. При цьому максимальне значення зваженої (з вагою $w(X)>0$) похибки ρ

$$\rho(A)=\max_{X\in D}\left|F(X;A)-f(X)\right|\cdot w(X) \quad (1)$$

досягає на множині точок сітки $D=\{X^{(1)},\ldots,X^{(p)}\}$, $p>k$, свого найменшого значення. При $w(X)\equiv 1$ маємо чебишовське наближення з найменшою абсолютною похибкою, при $w(X)=1/f(X)$ – з найменшою відносною похибкою.

У статті досліджується результативність ГА для чебишовського наближення функцій.

Генетичний алгоритм для чебишовської апроксимації функцій. Як відомо, існує чимало алгоритмів чебишовського наближення функцій. Найкраще розроблено алгоритмічний базис для наближення функцій *однієї змінної* лінійними апроксимантами (степеневими і тригонометричними поліномами, узагальненими многочленами за чебишовськими системами базисних функцій та ін.) [8–10]. У нелінійному випадку ефективні алгоритми створені лише для деяких типів виразів (дробово-раціональних, експоненціальних, логарифмічних та ін.) [9–12]. Ще скромнішим виглядає алгоритмічний арсенал для наближення функцій *декількох змінних* [13–15]. Кожний з алгоритмів чебишовської апроксимації має свої переваги і недоліки. Водночас їх спільна риса – вузька спеціалізація, тобто можливість наближення лише апроксимантами певного типу.

У статті для чебишовської апроксимації пропонується ГА, головною перевагою якого порівняно з вищезгаданими спеціалізованими алгоритмами є його універсальність: він дозволяє визначити оптимальні значення коефіцієнтів апроксимантів різних типів при наближенні функцій як однієї, так і декількох змінних. Цей алгоритм належить до групи генетичних алгоритмів із дійсним кодуванням і має наступні характеристики.

1. Початкове покоління популяції формується з n хромосом (особин) $A=(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, де k – число генів у хромосомі, параметри яких вибираються випадковим чином із заданого діапазону чисел $[num_1, num_2]$ (за умовчанням $n=100$, $num_1=-1$, $num_2=1$).

2. Для кожної особини обчислюється цільова функція за формулою (1). Чим

менше значення функції цілі, тим більш пристосованою є особина.

3. При виборі батьківських пар використовується процедура парного турнірного відбору [16]. З поточної популяції випадково вибираються дві особини, і та з них, значення цільової функції якої менше, заноситься у проміжний масив. Ця операція повторюється *n* разів. У створенні нащадків бере участь кожна пара сусідніх особин з проміжного масиву.

4. Для схрещування застосовується змішаний BLX–α кросовер з $\alpha = 0{,}5$. У цьому випадку пара батьків $A_1 = \left(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1\right)$ і $A_2 = \left(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_k^2\right)$ породжує одного нащадка $B = \left(b_1, b_2, \ldots, b_k\right)$, у якого значенням відповідного гена b_i є випадкове число з діапазону $\left[a_{\min} - \alpha \cdot \delta, a_{\max} + \alpha \cdot \delta\right]$, де $a_{\min} = \min\left(a_i^1, a_i^2\right)$, $a_{\max} = \max\left(a_i^1, a_i^2\right)$, $\delta = a_{\max} - a_{\min}$, $i = \overline{1,k}$. Особливість цього кросовера в тому, що значення гена нащадка може лежати в області, яка виходить за межі значень батьківських генів на величину $\alpha \cdot \delta$. Результати розрахунків для тестових функцій показали [3], що BLX–α кросовер при α = 0,5 переважає за ефективністю більшість операторів схрещування (хоча, очевидно, не існує кросовера, ефективного в усіх випадках).

5. При мутації змінюється значення випадкового гена одного нащадка, який також вибирається випадковим чином. Якщо мутує, наприклад, ген b_i, то його нове значення $b_i^{/}$ визначається за правилом [16]

$$b_i^{/} = b_i \pm \gamma \cdot \lambda ,$$

де знаки + або – вибираються з рівною ймовірністю, $\gamma = 0{,}5 \times$ пошуковий простір (інтервал зміни значення гена), а величина λ обчислюється за формулою

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \beta(i) \cdot 2^{-i} ,$$

де $\beta(i) = 1$ з ймовірністю $1/m$, у протилежному випадку $\beta(i) = 0$, m – заданий параметр (за умовчанням $m = 10$).

6. З розширеної популяції батьків та їх нащадків для включення в нове покоління вибираються тільки *n* особин з найменшим значенням функції цілі (1).

7. Як критерій закінчення алгоритму використовується обмеження на максимальне число поколінь $p_{\max}$ (за умовчанням $p_{\max} = 200$). Кращою є особина з кінцевої популяції з найменшим значенням цільової функції.

Тестування алгоритму проводилось з використанням класичних тестових функцій. У табл. 1 наводяться отримані за алгоритмом результати для сферичної функції Де Іонга $f(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$, для якої глобальний мінімум $f(x) = 0$, точки мінімуму $x_i = 0$, $i = \overline{1,k}$ [16]. Ці результати показують, що із збільшенням розмірності вектора змінних погіршується точність алгоритму, оскільки сильно зростає розмір області пошуку. Про цей негативний факт щодо стандартних ГА повідомляється і в науковій літературі [17].

ТАБЛИЦЯ 1. Результати тестування алгоритму для сферичної функції Де Іонга

k	p_{max}=100		p_{max}=200	
	мінімум $f(x)$	x_i	мінімум $f(x)$	x_i
2	$0{,}54\cdot10^{-31}$	$0{,}18\cdot10^{-15}$	$0{,}67\cdot10^{-601}$	$0{,}81\cdot10^{-30}$
4	$0{,}25\cdot10^{-16}$	$0{,}41\cdot10^{-8}$	$0{,}47\cdot10^{-31}$	$0{,}17\cdot10^{-15}$
6	$0{,}13\cdot10^{-10}$	$0{,}16\cdot10^{-6}$	$0{,}15\cdot10^{-19}$	$0{,}91\cdot10^{-10}$
8	$0{,}44\cdot10^{-8}$	$0{,}47\cdot10^{-4}$	$0{,}10\cdot10^{-14}$	$0{,}19\cdot10^{-7}$
10	$0{,}11\cdot10^{-5}$	$0{,}50\cdot10^{-3}$	$0{,}56\cdot10^{-9}$	$0{,}23\cdot10^{-4}$
20	$0{,}38\cdot10^{-1}$	$0{,}90\cdot10^{-1}$	$0{,}12\cdot10^{-2}$	$0{,}18\cdot10^{-1}$

Аналіз результатів чисельного експерименту. Проведено чисельний експеримент з перевірки результативності запропонованого ГА для чебишовської апроксимації. Як оптимальний розв'язок брався кращий за 100 пусків результат алгоритму (оскільки будь-який ГА базується на імовірнісному підході, то прийнятний розв'язок можна отримати лише за наявності достатнього числа пусків). В експерименті виконувалась апроксимація з найменшою абсолютною похибкою функції e^x за її значеннями на множині 101 точки відрізку [0, 1] (точки рівновіддалені) за допомогою степеневих поліномів

$$P_k(x)=\sum_{i=1}^{k+1} a_i x^{i-1} \tag{2}$$

і дробово-раціональних виразів

$$R_{k,l}(x)=P_k(x)\Bigg/\left(1+\sum_{j=2}^{l+1} b_i x^{j-1}\right), \tag{3}$$

а також функцій двох змінних $e^{\frac{x+y}{2}}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos x\cdot\sin y$ і $y^2\cdot\cos x$ за їх значеннями на множині точок трикутника $1\ge x\ge y\ge 0$ (крок сітки за обома змінними 0,2) за допомогою узагальнених многочленів

$$F_k(X)=\sum_{i=1}^{k} a_i\varphi_i(X) \tag{4}$$

за системами k лінійно незалежних базисних функцій $\varphi_i(X)$. З використанням розробленого генетичного алгоритму з параметрами за умовчанням були знайдені оптимальні значення коефіцієнтів апроксимантів (2) – (4) та похибки наближення $\rho_{ГА}$ (мінімальні значення функцій цілі).

Крім того, виконано наближення вказаних функцій за допомогою спеціалізованих чебишовських алгоритмів (ЧА), а саме: другого алгоритму Ремеза для випадку апроксимації поліномом (2), комбінованого алгоритму Ремеза-Вернера для випадку наближення раціональним дробом (3), алгоритму зведення до задачі лінійного програмування для випадку апроксимації функцій декількох змінних узагальненим многочленом (4) [10, 15]. Отримані за цими алгоритмами похибки найкращої чебишовської апроксимації $\rho_{ЧА}$ порівнювались з похибками наближення $\rho_{ГА}$ за генетичним алгоритмом (похибки, а не значення коефіцієнтів, вибрані з точки зору зручності їх аналізу).

Порівняльний аналіз похибок (табл. 2 і 3) показав, що для апроксимантів з невеликим числом коефіцієнтів k ($k \le 4$ в одновимірному випадку і $k \le 6$ у багатовимірному випадку) похибки наближення за генетичним алгоритмом практично збіглися з похибками чебишовських алгоритмів.

ТАБЛИЦЯ 2. Порівняння результатів чебишовської апроксимації функції e^x степеневими поліномами і дробово-раціональними виразами

Апроксимант	Число коефіцієнтів	Похибка $\rho_{ЧА}$ наближення за ЧА	Похибка $\rho_{ГА}$ наближення за ГА	Величина $\rho_{ГА}/\rho_{ЧА}$
$P_1(x)$	2	0,1059	0,105933	1,0
$R_{0,1}(x)$	2	$0{,}9773 \cdot 10^{-1}$	$0{,}9773 \cdot 10^{-1}$	1,0
$P_2(x)$	3	$0{,}8753 \cdot 10^{-2}$	$0{,}8753 \cdot 10^{-2}$	1,0
$R_{1,1}(x)$	3	$0{,}4295 \cdot 10^{-2}$	$0{,}4296 \cdot 10^{-2}$	1,0
$P_3(x)$	4	$0{,}5447 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6225 \cdot 10^{-3}$	1,1
$R_{2,1}(x)$	4	$0{,}1801 \cdot 10^{-3}$	$0{,}2753 \cdot 10^{-3}$	1,5
$P_4(x)$	5	$0{,}2715 \cdot 10^{-4}$	$0{,}1834 \cdot 10^{-3}$	6,8
$R_{2,2}(x)$	5	$0{,}4470 \cdot 10^{-5}$	$0{,}1032 \cdot 10^{-3}$	23,1
$P_5(x)$	6	$0{,}1127 \cdot 10^{-5}$	$0{,}8832 \cdot 10^{-3}$	783,7
$R_{2,3}(x)$	6	$0{,}1112 \cdot 10^{-6}$	$0{,}1378 \cdot 10^{-2}$	12392,1
$P_6(x)$	7	$0{,}4024 \cdot 10^{-7}$	$0{,}6255 \cdot 10^{-3}$	15544,2
$R_{3,3}(x)$	7	$0{,}1997 \cdot 10^{-8}$	$0{,}5436 \cdot 10^{-3}$	272208,3

Водночас для апроксимантів з більшим числом коефіцієнтів генетичний алгоритм не дав прийнятних результатів. При зростанні кількості коефіцієнтів у ГА «борються» дві тенденції: позитивна – зменшення похибки апроксимації з ростом степеня апроксиманта і негативна – падіння точності наближення із збільшенням числа коефіцієнтів (про це більш детально йшлося вище). І, як свідчать отримані результати, для $k > 4$ остання тенденція в ГА значно переважає.

Проведений аналіз також показав, що при однаковій кількості коефіцієнтів апроксимантів ($k > 4$) похибка наближення ГА тим гірше похибки апроксимації чебишовського алгоритму, чим вище точність апроксимації. Це твердження яскраво демонструють наведені в табл. 4 результати наближення функції $\sqrt{x}$ на різних відрізках поліномом 4-го степеня, коли всі апроксиманти мають однакове число коефіцієнтів 5.

ТАБЛИЦЯ 3. Порівняння результатів чебишовської апроксимації функцій двох змінних узагальненими многочленами

Функція, що апроксимується	Апроксимант: число коефіцієнтів	Апроксимант: базисні функції $\varphi_i(x, y)$	Похибка $\rho_{ЧА}$ наближення за ЧА	Похибка $\rho_{ГА}$ наближення за ГА	Величина $\rho_{ГА}/\rho_{ЧА}$
$e^{\frac{x+y}{2}}$	3	$1, x, y$	0,104425	0,104425	1,0
$\sqrt{x^2+y^2}$	4	$1, x+y, x^2+y^2$	0,035091	0,035840	1,0
$\sqrt{x^2+y^2}$	6	$1, x, y, xy, x^2, y^2$	0,009388	0,010481	1,1
$\cos x \cdot \sin y$	10	$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3$	0,001758	0,012559	7,1
$y^2 \cdot \cos x$	11	$x, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3$	0,000188	0,002593	13,8

ТАБЛИЦЯ 4. Порівняння похибок апроксимації функцій $\sqrt{x}$ поліномом $P_4(x)$

Відрізок наближення	Похибка $\rho_{ЧА}$ наближення за ЧА	Похибка $\rho_{ГА}$ наближення за ГА	Величина $\rho_{ГА}/\rho_{ЧА}$
[0, 1]	0,034634	0,044949	1,3
[0,1; 1]	0,001435	0,002760	1,9
[0,25; 1]	0,000172	0,000981	5,7
[0,5; 1]	$0{,}69606 \cdot 10^{-5}$	$0{,}18713 \cdot 10^{-3}$	26,9

Висновки. ГА – це потужний обчислювальний засіб у різноманітних оптимізаційних задачах. Головна перевага використання ГА для чебишовської апроксимації порівняно із спеціалізованими алгоритмами найкращого чебишовського наближення є його універсальність. Він дозволяє знайти наближення функцій як однієї, так і декількох змінних різними типами лінійних і нелінійних апроксимантів. Водночас ГА має ряд недоліків, зокрема, повільну збіжність, емпіричний підбір численних параметрів алгоритму, велике число пусків для отримання прийнятного розв'язку.

Як показав чисельний експеримент результати ГА практично збігаються з результатами спеціалізованих алгоритмів чебишовської апроксимації тільки при наближенні апроксимантами з невеликим числом коефіцієнтів (як правило, не більше чотирьох). Тому використання ГА є доцільним у випадках, коли для наближення бажаним типом апроксиманта (з невеликою кількістю коефіцієнтів) немає спеціального алгоритму чебишовської апроксимації або існуючий алгоритм дуже складний, наприклад, для наближення нелінійними виразами, особливо функцій декількох змінних.

1. *Holland J.H.* Adaptation in natural and artificial systems. – Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1975. – 219 p.
2. *Wright A.* Genetic algorithms for real parameter optimization // Foundations of Genetic Algorithms. – 1991. – Vol. 1. – P. 205 – 218.
3. *Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L.* Tackling real-coded genetic algorithms: operators and tools for the behaviour analysis // Artificial Intelligence Review. – 1998. – Vol. 12, N 4. – P. 265 – 319.
4. *Триус Ю.В., Триус В.Ю.* Оптимізація багатоекстремальних функцій за допомогою гібридних методів у середовищі MATLAB R2007A // Вісник Черкаського університету. Прикладна математика. Інформатика. – 2010. – Вип. 172. – С. 104 – 122.
5. *Генетичний* алгоритм. http://uk.wikipedia.org/wiki/Генетичний_алгоритм.
6. *Умеров А.Н., Шуршев В.Ф.* Методы и программные средства аппроксимации экспериментальных данных // Вестник АГТУ. – 2005. – № 1 (24). – С. 97 – 104.
7. *Самотий В., Дзелендзяк У.* Використання генетичних алгоритмів для апроксимації функцій дійсними поліномами // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 694. – С. 313 – 318.
8. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. – К.: Наук. думка, 1969. – 623 с.
9. *Попов Б.А., Теслер Г.С.* Приближение функций для технических приложений. – К.: Наук. думка, 1980. – 352 с.
10. *Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П.* Пакет программ аппроксимации функций // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2008. – № 7. – С. 32 – 38.
11. *Werner H., Stoer J., Bommas W.* Rational Chebyshev Approximation // Numer. Math. – 1967. – Vol. 10. – P. 289 – 306.
12. *Cheney E.W.* Algorithms for approximation // SIAM Pr. – 1986. – Vol. 36. – P. 67 – 80.
13. *Малоземов В.Н.* Наилучшее равномерное приближение функций нескольких аргументов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10, № 3. – С. 575 – 586.
14. *Kaufman E.H., Taylor G.D.* Uniform rational approximation on functions of several variables // Int. J. Numer. Math. Eng. – 1976. – Vol. 9, N 2. – P. 297 – 323.
15. *Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П.* Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2007. – № 6. – С. 141 – 148.
16. *Панченко Т.В.* Генетические алгоритмы. – Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. – 87 с.
17. *Паклин Н.Б., Сенилов М.А., Тененев В.А.* Интеллектуальные модели на основе гибридного генетического алгоритма с градиентным обучением лидера // Искусственный интеллект. – 2004. – № 4. – С. 159 – 168.

Одержано 01.10.2013