КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ, МЕРЕЖІ ТА СИСТЕМИ

УДК 682.32+537.8

М.А. ПРИМИН, И.В. НЕДАЙВОДА

АЛГОРИТМ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ ДЛЯ ИСТОЧНИКА ПОЛЯ ДИПОЛЬНОЙ МОДЕЛИ

M. Primin, I. Nedayvoda

ALGORITHM OF ANALYTICAL SOLUTION OF MAGNETOSTATIC INVERSE PROBLEM FOR DIPOLAR FIELD SOURCE

Analytical method of determination of coordinates and magnetic moment vector of dipole source is proposed. Results of numerical simulation are described.
Key words: eigen vectors, magnetostatic.

Запропоновано аналітичний метод визначення координат та вектора магнітного моменту дипольного джерела. Наведено результати чисельного моделювання.
Ключові слова: власні вектори, магнітостатика.

Предложен аналитический метод определения координат и вектора магнитного момента дипольного источника. Приведены результаты численного моделирования.
Ключевые слова: собственные векторы, магнитостатика.

© М.А. Примин, И.В. Недайвода, 2015

Введение. Создание магнитометрических приборов на основе СКВИДов (СКВИД – сверхпроводниковый квантовый интерферометрический датчик), обладающих уникальной чувствительностью и точностью, послужило стимулом к исследованию задач пространственного анализа слабых магнитных полей [1, 2]. К таким задачам относятся поиск намагниченных тел под водой (например, затонувших кораблей), определение месторождений некоторых видов полезных ископаемых, обнаружение в земле металлических предметов и инженерных коммуникаций, исследование магнитных полей биологических объектов, контроль за передвижением транспортных средств, регистрация и анализ магнитных полей различных материалов и т. д. [3]. Понятно, что регистрация величин параметров магнитного поля исследуемых объектов – это лишь техническая часть задачи; другая весьма важная задача – это интерпретация данных измерений, требующая разработки информационной технологии (методов и алгоритмов) преобразования полученной информации к виду удобному для анализа.

Итак, в данных случаях носителем информации об объекте и его характеристиках является магнитное поле, а задача информационной технологии в практических приложениях, как правило, – определение и анализ по результатам измерений местоположения (координат) источника поля (объекта) и его электромагнитных характеристик (например, вектор магнитного момента, или пространственное распределение токов, характеризующих состояние объекта). Такую задачу и называют задачей локализации источника магнитного сигнала. В данной работе, которую мы рассматриваем, как первую из ряда планируемых, рассмотрен аналитический метод решения обратной задачи магнитостатики для дипольной модели источника сигнала, а приведенные численные примеры показывают его практическую реализуемость и корректность.

Постановка задачи. Система токов в объеме *V*, ограниченная замкнутой поверхностью *S*, создает в окружающем пространстве статическое магнитное поле, если:

1) отличен от нуля полный ток системы (проводники с током, электрические цепи и т. д.);

2) при полном токе, равном нулю, отличен от нуля макроскопический магнитный дипольный момент (ферромагнитные тела, тела содержащие ферромагнитные включения, или тела, у которых появляется полный магнитный момент при наличии внешнего поля);

3) при полном токе и полном магнитном моменте равном нулю, отличен от нуля дипольный магнитный момент элементарной «магнитной» ячейки.

Источниками магнитного поля могут быть и токи магнитогидродинамического происхождения (завихрения, воронки и т. п.), которые появляются, например, при перемещении объекта в морской воде. Ионизированный под воздействием реактивного двигателя воздух также является источником статического магнитного поля.

Тела (объекты), движущиеся в воздушной (водной) среде, становятся электрически заряженными за счет ударов о поверхность паров воды, пыли, частиц льда и, таким образом, создают магнитные поля, которые можно зарегистрировать СКВИД-магнитометрической аппаратурой. Учитывая, что согласно результатам экспериментов максимальные частоты изменения возникающего электромагнитного поля не превышают 1000 Гц, для обработки сигналов измерителя с целью определения местоположения источника поля, названные задачи требуют решения обратной задачи магнитостатики. Под обратной задачей в магнитостатике понимают нахождение пространственного распределения источников поля по известным (например, измеренным) значениям величин параметров поля. Функциональные связи между параметрами распределения, а также типом источников поля и измеренными значениями величин поля считаются неизвестными и их также необходимо установить.

Рассмотрим аналитическое решение обратной задачи для случая, когда источник можно аппроксимировать магнитным диполем. Другими словами, точки пространства, где известно или определяется магнитное поле **B**, расположены по отношению к источнику поля на расстояниях *r*, значительно превышающих размеры источника.

Тогда вектор магнитной индукции в точке наблюдения с радиус-вектором **r** определяется по формуле [4]:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{3(\mathbf{Mr})\mathbf{r} - \mathrm{M}r^2}{r^5} = \frac{\mu}{4\pi\, r^5}\begin{pmatrix} 3r_x^2 - r^2 & 3r_x r_y & 3r_x r_z \\ 3r_x r_y & 3r_y^2 - r^2 & 3r_y r_z \\ 3r_x r_z & 3r_y r_z & 3r_z^2 - r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где μ – магнитная проницаемость среды в точке наблюдения; **M** – полный магнитный момент системы токов.

Это выражение справедливо для всех классов источников магнитного поля. Поэтому, не снижая общности, можно считать, что вне зависимости от принадлежности источника к тому или иному классу статическое магнитное поле в точке пространства с радиус-вектором **r** создано дипольным источником (диполем) с магнитным моментом **M,** расположенным в начале декартовой системы координат *XZY*, и имеет вид (1).

В немагнитной, непроводящей среде

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где **i, j, k** – базисные векторы системы координат *XZY* [4].

Прямым дифференцированием (1) по пространственным координатам получим все соотношения для первых и вторых производных вектора магнитной индукции магнитного поля в воздухе.

$$\begin{Bmatrix} \partial B_x/\partial y \\ \partial B_x/\partial z \\ \partial B_y/\partial y \\ \partial B_y/\partial z \\ \partial B_z/\partial z \end{Bmatrix} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^7}\begin{pmatrix} \left(r^2 - 5r_x^2\right)r_y & \left(r^2 - 5r_y^2\right)r_x & -5r_x r_y r_z \\ \left(r^2 - 5r_x^2\right)r_z & -5r_x r_y r_z & \left(r^2 - 5r_z^2\right)r_z \\ \left(r^2 - 5r_y^2\right)r_x & \left(3r^2 - 5r_y^2\right)r_y & \left(r^2 - 5r_y^2\right)r_z \\ -5r_x r_y r_z & \left(r^2 - 5r_y^2\right)r_z & \left(r^2 - 5r_z^2\right)r_y \\ \left(r^2 - 5r_z^2\right)r_x & \left(r^2 - 5r_z^2\right)r_y & \left(3r^2 - 5r_z^2\right)r_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}. \tag{3}$$

$$
\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \end{matrix}\right\} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^9} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 3r^4 - 30r^2 r_x^2 + \\ +35 r_x^4 \end{matrix} & 5r_x r_y (7r_x^2 - 3r^2) & 5r_x r_z (7r_x - 3r^2) \\ 5r_x r_y (7r_x^2 - 3r^2) & \begin{matrix} r^4 - 5r^2 r_y^2 - \\ -5r^2 r_x^2 + 35 r_x^2 r_y^2 \end{matrix} & 5r_y r_z (7r_x^2 - r^2) \\ 5r_x r_z (7r_x^2 - 3r^2) & 5r_y r_z (7r_x^2 - r^2) & \begin{matrix} r^4 - 5r^2 r_x^2 - \\ -5r^2 r_z^2 + 35 r_x^2 r_z^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r^4 - 5r^2 r_x^2 - \\ -5r^2 r_y^2 + 35 r_x^2 r_y^2 \end{matrix} & 5r_x r_y (7r_y^2 - 3r^2) & 5r_x r_z (7r_y^2 - r^2) \\ 5r_y r_z (7r_x^2 - r^2) & 5r_x r_y (7r_z^2 - r^2) & 5r_x r_y (7r_z^2 - r^2) \\ 5r_x r_y (7r_y^2 - 3r^2) & \begin{matrix} 3r^4 - 30r^2 r_y^2 + \\ +35 r_y^4 \end{matrix} & 5r_y r_z (7r_y^2 - 3r^2) \\ 5r_x r_z (7r_y^2 - r^2) & 5r_y r_z (7r_y - 3r^2) & \begin{matrix} r^4 - 5r^2 r_y^2 - \\ -5r^2 r_z^2 + 35 r_y^2 r_z^2 \end{matrix} \\ 5r_x r_y (7r_z^2 - r^2) & \begin{matrix} r^4 - 5r^2 r_y^2 - \\ -5r^2 r_z^2 + 35 r_y^2 r_z^2 \end{matrix} & 5r_x r_y (7r_z^2 - 3r^2) \\ 5r_x r_z (7r_z^2 - 3r^2) & 5r_y r_z (7r_z^2 - 3r^2) & \begin{matrix} 3r^4 - 30r^2 r_z^2 + \\ +35 r_z^4 \end{matrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}. \qquad (4)
$$

Обратная задача может быть сформулирована так: по известному (измеренному) в одной или нескольких точках пространства вектору магнитной индукции и его пространственным производным найти радиус-вектор указанных точек в системе координат связанной с источником магнитного поля, и дипольный магнитный момент источника.

Решение обратной задачи для дипольной модели источника магнитного сигнала. Аналитическое решение обратной задачи для дипольного источника получим, используя математический аппарат собственных векторов [5]. Вначале покажем, что матрицы первых $\hat{D}_1$ и вторых $\hat{D}_2$ пространственных производных вектора **B** обладают свойствами, позволяющими получить полное аналитическое решение поставленной задачи.

Итак, матрица $\hat{D}_1$ имеет вид:

$$
\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial B_x}{\partial x} & \dfrac{\partial B_x}{\partial y} & \dfrac{\partial B_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} & \dfrac{\partial B_y}{\partial y} & \dfrac{\partial B_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial x} & \dfrac{\partial B_z}{\partial y} & \dfrac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad (5)
$$

где B_x, B_y, B_z – соответствующие компоненты вектора **B**.

Известно, что в непроводящей, немагнитной среде [4] для вектора магнитной индукции выполняются условия (2). А это значит, что матрица первых пространственных производных вектора магнитной индукции $\hat{D}_1$, (5) симметрична и не имеет следа. Иными словами, из девяти элементов $\hat{D}_1$ независимыми являются лишь 5 – 3 недиагональных $\partial B_x/\partial y$, $\partial B_x/\partial z$, $\partial By/\partial z$ и 2 диагональных – $\partial By/\partial y$ и $\partial B_x/\partial x$. Из симметрии матрицы $\hat{D}_1$ и условия $\mathrm{Tr}\,(\hat{D}_1) = 0$ следует, что ее собственные значения λ_i (i =1,2,3), определяемые характеристическим уравнением

$$\begin{gathered}\lambda^3+\lambda(B_{xx}B_{yy}+B_{xx}B_{zz}+B_{yy}B_{zz}-B_{xy}^2-B_{xz}^2-B_{yz}^2)-B_{xx}B_{yz}^2+\\ +B_{yy}B_{xz}^2+B_{zz}B_{xy}^2-2B_{xy}B_{xz}B_{yz}-B_{xx}B_{yy}B_{zz}=0,\end{gathered} \tag{6}$$

где $B_{ij} = \partial B_i/\partial r_j$, действительны и различны, а сумма их равна нулю ($\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$).

Это, в свою очередь, означает, что собственные векторы матрицы $\hat{D}_1$

$$\boldsymbol{u}_i=\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\\ \gamma_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{yz}B_{xy}+(\lambda_i-B_{yy})B_{xz}\\ B_{xz}B_{xy}+(\lambda_i-B_{xx})B_{yz}\\ (B_{xx}-\lambda_i)(B_{yy}-\lambda_i)-B_{xy}^{\ 2}\end{bmatrix} \qquad i=1,2,3, \tag{7}$$

взаимно ортогональны $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_3 = 0$.

После нормирования собственные векторы могут быть выбраны в качестве базиса, причем в этом новом базисе матрица D имеет диагональный вид

$$\hat{D}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \tag{8}$$

а координаты радиуса-вектора произвольной точки пространства в новой системе координат (ξ_i, i = 1, 2, 3) связаны с координатами радиуса-вектора этой же точки в декартовой системе координат XYZ (ξ_j; j = x, y, z) следующими соотношениями:

$$\begin{bmatrix}\xi_x\\ \xi_y\\ \xi_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1/\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2} & \alpha_2/\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2} & \alpha_3/\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2}\\ \beta_1/\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2} & \beta_2/\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2} & \beta_3/\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2}\\ \gamma_1/\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2} & \gamma_2/\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2} & \gamma_3/\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}, \tag{9}$$

где α_i, β_i, γ_i определяются из (7).

Соотношения (7) – (9) позволяют получить решение задачи, если в произвольной точке пространства известны независимые элементы матрицы D , и одна из компонент вектора магнитной индукции, например, B_x.

Тогда из (3) для $\partial\mathbf{B}/\partial x$ в новой системе координат, базисом которой являются нормированные собственные векторы матрицы $\hat{D}_1$ находим вектор, пропорциональный вектору **M**:

$$\overline{M}=\frac{3\mu}{4\pi r^4}\mathbf{M},\qquad \overline{M}=\frac{\lambda_1}{r^3}\begin{pmatrix}\left(r^2-5r_2^2-5r_3^2\right)r_1\\ \left(r^2-5r_1^2\right)r_2\\ \left(r^2-5r_2^2\right)r_3\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Здесь $r_1\neq 0$ (детерминант (3) не равен нулю).

Сделав подстановку (10) в (3), оставляя линейно независимые и приводя подобные слагаемые, получаем

$$\begin{cases} n_1n_2n_3=0,\\ n_1^2\left(1-5n_2^2-5n_3^2\right)\left[\lambda_1\left(1-5n_2^2\right)-\lambda_2\left(3-5n_1^2\right)\right]+\\ +n_2^2\left(1-5n_1^2\right)\left[\lambda_2\left(1-5n_1^2\right)-\lambda_1\left(3-5n_2^2\right)\right]+\\ +n_3^2\left(1-5n_1^2\right)\left[\lambda_2\left(1-5n_1^2\right)-\lambda_1\left(1-5n_2^2\right)\right]=0, \end{cases} \tag{11}$$

где $n_1=r_1/r$, $n_2=r_2/r$, $n_3=r_3/r$ – направляющие косинусы радиуса-вектора **r** в новой системе координат. Анализ системы (10) – (11) приводит к следующим решениям:

$$n_1=\frac{r_1}{r_1}=\cos(\theta);\quad n_1=\frac{r_1}{r}=\cos(\theta);\quad n_2=\sin(\theta);\quad n_3=0;$$

$$\sin^2\theta=\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1};\quad \overline{M}_1=\lambda_1\frac{5n_2^2-1}{1+n_1^2}n_1; \tag{12}$$

$$\overline{M}_2=\lambda_1\frac{1-5n_1^2}{1+n_1^2}n_2;\quad M_3=0.$$

Соотношения (12) позволяют найти n_x, n_y, n_z, M_x, M_y, M_z в заданной системе координат XYZ, а затем определить расстояние r по измеренной компоненте B_x:

$$r = 3B_x\left[(3\overline{M}_x n_x + 3\overline{M}_y n_y + 3\overline{M}_z n_z)\, n_x - M_x\right]^{-1}, \qquad (13)$$

что является полным аналитическим решением обратной задачи.

Полученное решение, как показывает анализ, неоднозначно и ведет к четырем физически возможным значениям вектора **n** в новой системе координат, а именно

$$\mathbf{n} = \left(\pm\left(\frac{2\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)^{1/2}, \pm\left(\frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{1/2}, 0 \right). \qquad (14)$$

Этот результат, в свою очередь, дает 4 возможных значения векторов **r** и **M**, лежащих, однако, попарно в различных октантах системы координат *XYZ*.

Чтобы устранить “ложные” решения, необходимо иметь дополнительную информацию, например, аналогичные результаты решения обратной задачи для того же источника, но в точке наблюдения с другим (отличным от **r**) радиусом-вектором. Алгоритм выделения “истинного” решения в этом случае очевиден, хотя реализация его имеет ряд технических особенностей, связанных с выбором минимального числа точек измерения [6].

Метод решения по известной матрице вторых пространственных производных вектора магнитной индукции. Рассмотрим свойства матрицы вторых пространственных производных вектора магнитной индукции

$$\hat{D}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

В непроводящей, немагнитной среде вектор магнитной индукции является аналитической функцией координат. Поскольку для вторых производных аналитических функций справедливо условие $\partial^2 f / \partial r_i \partial r_j = \partial^2 f / \partial r_j \partial r_i$ (i,j = x,y,z), то матрица $\hat{D}_2$ симметрична. Кроме того, из симметричности и равенства нулю следа матрицы $\hat{D}_2$ следует равенство нулю следа матрицы $\hat{D}_2$. Действительно,

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial z} == \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) = 0. \qquad (16)$$

Поэтому собственные значения и собственные векторы матрицы $\hat{D}_2$ обладают теми же свойствами, что и аналогичные величины для матрицы $\hat{D}_1$. Следовательно, для определения собственных значений, собственных векторов, а также матрицы перехода из новой системы координат в исходную (XYZ) могут быть использованы соотношения (6) – (9), если положить в них

$$\mathrm{B}_{ij} = \partial^2 \mathrm{B}_x / \partial r_i \, \partial r_j \, .$$

Покажем, что перечисленные свойства матрицы $\hat{D}_2$ позволяют найти полное решение обратной задачи магнитостатики, если в произвольной точке пространства с радиусом-вектором **r** известны независимые элементы матрицы $\hat{D}_2$ вторых производных x-й компоненты вектора магнитной индукции, а также одно из значений первых пространственных производных того же вектора, например, $\partial \mathrm{B}_x / \partial x$.

Вводя обозначение

$$\overline{M} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^5}\mathbf{M}$$

для вектора, пропорционального вектору магнитного момента, из (6) получаем в новой системе координат

$$\overline{M} = -\frac{\lambda_1}{12+20n_1^4}\begin{pmatrix} -1-5n_1^2+5(7n_1^2-1) \\ -5n_1 n_2(7n_1^2-3) \\ -5n_1 n_3(7n_1^2-3) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (4), оставляя линейно независимые уравнения и приводя подобные, получаем

$$\begin{cases} 5n_2 n_3(4+12n_1^2)=0, \\ \left[1-5n_1^2+5(7n_1^2-1)(1-n_1^2)\right]\left\{\lambda_1\left[1-5n_1^2+5n_2^2(7n_1^2-1)\right]-\right. \\ \left.-\lambda_2\left[3(1-5n_1^2)+5n_1^2(7n_1^2-3)\right]\right\}- \\ -5n_1 n_2(7n_1^2-3)\left\{\lambda_1 5n_1 n_2(7n_2^2-3)-\right. \\ \left.-\lambda_2 5n_1 n_2(7n_1^2-3)\right\}-5n_1 n_3(7n_1^2-3)\left\{\lambda_1 5n_1 n_3(7n_2^2-1)-\right. \\ \left.-\lambda_2 5n_1 n_3(7n_1^2-3)\right\}=0. \end{cases} \tag{18}$$

Решения этой системы имеют вид

$$(-1-5n_1^2+10n_1^4)\lambda_1 = (-3-5n_1^4)\lambda_2; \qquad n_2 = 0; \qquad n_3^2 = 1-n_1^2; \tag{19}$$

$$(4+5n_1^2-5n_1^4)\lambda_1 = (-3-5n_1^4)\lambda_2; \qquad n_2^2 = 1-n_1^2; \quad n_3 = 0. \tag{20}$$

По найденным в новой системе координат величинам $n_x, n_y, n_z, \overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ с помощью соотношений перехода (9) получаем величины n_x, n_y, n_z, M_x, M_y, M_z в заданной системе координат, а затем из (3) – расстояние до дипольного источника

$$r = \frac{\partial B_x}{\partial x}\left[(3-5n_x^2)n_x \overline{M}_x + (1-5n_x^2)n_y \overline{M}_y + (1-5n_x^2)n_z \overline{M}_z\right]^{-1}, \tag{21}$$

что и дает полное решение задачи.

Численный пример. Определение направляющих косинусов. Пусть в точке пространства с радиусом-вектором **r** = **i**4 + **j**2 + **k**0 [м] известны значения вторых пространственных производных x-й компоненты вектора магнитной индукции, созданного источником с магнитным моментом **M** = **j** · 1000 (А м^2) и равным B_{xx}= 87.26·10^{-8}; B_{yy} = –53.7·10^{-8}; B_{xy} = 26.85•10^{-8}; B_{xz} = B_{yz} = 0.

Собственные значения матрицы $\hat{D}_2$, элементами которой являются эти величины, равны λ_1 = 92.2 ·10^{-8}, λ_2 = –58.64 ·10^{-8}, λ_3 = –33.56 ·10^{-8}, а матрица перехода имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0.98 & 0.18 & 0 \\ 0.18 & -0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя величины собственных значений в соотношения (19), (20), получаем 4 физически возможных решения для вектора направляющих косинусов в новой системе координат **n** = (0,95; 0,32; 0). С помощью матрицы перехода для вектора **n** = (0,95; –0,32; 0) находим вектор направляющих косинусов в заданной системе координат **n** = (0,87; 0,48; 0), что практически совпадает (с точностью до погрешности вычислений) с заданными значениями.

Можно показать, что полное решение обратной задачи магнитостатики для дипольного источника, аналогичное (17) – (21), существует, если в произвольной точке пространства с радиусом-вектором **r** измеряют независимые элементы матрицы вторых пространственных производных y-й или z-й компонент вектора магнитной индукции и отличную от нуля компоненту матрицы первых производных, например, $\partial B_y / \partial y$ или $\partial B_z / \partial z$.

В случае измерения $\partial^2 B_y / \partial r_i \partial r_j$ решения имеют вид

$$n_1^2 = 1 - n_2^2; \quad (4+5n_2^2-5n_2^4)\lambda_2 = (-3-5n_2^4)\lambda_1; \quad n_3 = 0; \tag{22}$$

$$n_1 = 0; \quad (-1-5n_2^2+10n_2^4)\lambda_2 = (-3-5n_2^4)\lambda_1; \quad n_3^2 = 1 - n_2^2. \tag{23}$$

$$\overline{M} = -\frac{\lambda_2}{12+20n_2^4}\begin{pmatrix} -5n_1 n_2(7n_2^2-3) \\ 1-5n_2^2+5(7n_2^2-1)(1-n_2^2) \\ -5n_2 n_3(7n_2^2-3) \end{pmatrix}; \tag{24}$$

$$r = \frac{\partial B_y}{\partial y}\left[(1-5n_y^2)n_x\overline{M}_x + (3-5n_y^2)n_y\overline{M}_y + (1-5n_y^2)n_z\overline{M}_z\right]^{-1}. \qquad (25)$$

При измерении $\partial^2 B_z / \partial r_i \partial r_j$ решения запишем так:

$$n_1^2 = 1 - n_3^2; \quad (4+5n_3^2-5n_3^4)\lambda_3 = (-3-5n_3^4)\lambda_1; \quad n_2 = 0; \qquad (26)$$

$$n_1 = 0; \quad (-1-5n_3^2+10n_3^4)\lambda_3 = (-3-5n_3^4)\lambda_1; \quad n_2^2 = 1 - n_3^2; \qquad (27)$$

$$\overline{M} = -\frac{\lambda_3}{12+20n_3^4}\begin{pmatrix} -5n_1n_3(7n_3^2-3) \\ -5n_2n_3(7n_3^2-3) \\ 1-5n_3^2+5(7n_3^2-1)(1-n_3^2) \end{pmatrix}; \qquad (28)$$

$$r = \frac{\partial B_z}{\partial z}\left[(1-5n_z^2)n_x\overline{M}_x + (1-5n_z^2)n_y\overline{M}_y + (3-5n_z^2)n_z\overline{M}_z\right]^{-1}. \qquad (29)$$

Таким образом, мы получили 4 варианта аналитического решения задачи, исходя из метода собственных векторов, который был впервые применен в [7].

Алгоритм обработки информации в общем виде можно представить в виде трех последовательных этапов:

- определение λ_i, α_i, β_i, γ_i элементов матрицы перехода; нахождение параметров источника магнитного поля $n_1, n_2, n_3, \overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3, n_x, n_y, n_z, \overline{M}_x, \overline{M}_y \overline{M}_z$; вычисление расстояния до источника поля.

Обсуждение. Отметим теперь некоторые особенности алгоритма. При описании метода обозначения для измеряемых характеристик были выбраны таким образом, что соотношения (6)–(8) для определения собственных значений, собственных векторов и матрицы перехода являются общими для всех четырех решений. Это значит, что реализация первого этапа не зависит от режима измерений параметров магнитного поля (измеряют элементы матрицы $\hat{D}_1$ или одной из матриц $\hat{D}_2$), является универсальной и может быть зафиксирована программными или аппаратными средствами.

Поскольку векторы **n** и **M** в новой системе координат являются функциями только собственных значений, то для определения параметров объекта (этап 2) измеренные характеристики магнитного поля непосредственно не используются.

При вычислении расстояния до источника используются характеристики магнитного поля, степень однородности которых на единицу меньше, чем у характеристик, используемых для определения направляющих косинусов и вектора **M**. Следовательно, автоматически снимается неоднозначность, связанная с "масштабированием" характеристик магнитного поля. Этим же обусловлен и тот факт, что при определении расстояния до объекта из четырех решений для векторов **n** и **M** в большинстве случаев физически возможными остаются лишь два симметричных относительно начала координат (два других приводят к отрицательным значениям расстояния).

Заметим, что при практической реализации методов решения обратной задачи, величины характеристик магнитного поля объекта известны с некоторой погрешностью. Величина этой погрешности определяется условиями проведения измерений – наличием индустриальных помех, удаленностью измерительных катушек от энергоемкой аппаратуры, наличием или отсутствием геомагнитных аномалий и т. д. Таким образом, наличие случайных погрешностей измерений при решении задачи локализации источника сигналов приводит к двум основным следствиям:

- задача регистрации величин характеристик магнитного поля объекта приобретает вероятностный характер;
- в процессе преобразования измерительной информации, согласно предлагаемым методам, погрешность измерений переходит в погрешность конечных результатов.

Поэтому, при практическом использовании алгоритмов локализации объекта, в условиях магнитных шумов необходимо, вначале обеспечить условия для обнаружения источника сигналов, а затем – найти и оценить доверительную вероятность решения обратной задачи с заданной погрешностью. Решение этих задач зависит от учета многих факторов: соотношения сигнал-шум; уровня собственных шумов измерительных каналов; разрешения по магнитному полю магнитометрической системы и т. д. Эти вопросы исследованы, а часть их, применительно к задачам магнитокардиографии опубликована [8].

1. *Stroink G., Lamothe M.J., Gardner M.J.*. Magnetocardiographic and electrocardiographic mappig studies // SQUID Sensors: Fundamentals, Fabrication and Applications / H. Weinstok (eds.). –Kluwer Academic Publishers. – 1996. – P. 413–444.
2. *Erne S.N., Lehmann J.* Magnetocardiography, an introduction // SQUID Sensors: Fundamentals, Fabrication and Applications / H. Weinstok (eds.). – Kluwer Academic Publishers. – 1996. – P. 395–412.
3. *Слабая* сверхпроводимость. Квантовые интерферометры и их применение. – Под ред. Б.Б. Шварца, С. Фонера. – М.: Мир, 1980. – 256 с.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 614 с.
5. *Bendat J.S. and Piersol A.G.*. Random Data : Analysis and Measurement Procedures – N.Y., Wiley-Interscience. – 1986.
6. *Гуменюк-Сычевский В.И., Примин М.А., Недайвода И.В.* Математическая модель и алгоритмы измерений в задаче локализации дипольного источника // Электронное моделирование. – 1992. – Т. 14, № 5. – С. 78 – 84.
7. *Wynn W.M.*. Advanced superconducting gradiometer / magnetometer arrays and a novel signal processing technique. – IEEE Trans. Magn. – 1975. – V. 11. – P. 701 – 707.
8. *Примин М.А., Недайвода И.В.* Алгоритм решения обратной задачи магнитостатики в магнитокардиографии: новые подходы и результаты // Электронное моделирование. – 2006. – Т. 28, № 3. – С. 99 – 116.

Получено 29.09.2015