

ОСОБЛИВІСТЬ ПОВЕДІНКИ НАПРУЖЕНЬ У НЕСТИСЛИВОМУ ПІВПРОСТОРИ ІЗ ВНУТРІШНЬОЮ V-ПОДІБНОЮ ТРІЩИНОЮ, ЩО ЛЕЖИТЬ У ПЛОЩИНІ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІЙ ПОВЕРХНІ ПІВПРОСТОРУ, А ЇЇ ВЕРШИНА ВИХОДИТЬ НА ПОВЕРХНЮ

Розглядається задача про рівновагу нестисливого півпростору, який послаблений внутрішньою V-подібною тріщиною, що лежить у площині, перпендикулярній поверхні півпростору, а її вершина виходить на поверхню. З використанням інтегрального перетворення типу Мелера – Фока та методу Вінера – Гопфа побудовано однорідні розв'язки задачі, на базі яких проведено аналіз особливості поведінки розривних напружень в околі вершини тріщини та проаналізовано процес її розповсюдження.

1. Вступ. Вивчення і розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла в областях із нерегулярними точками є важливим як із суто наукової точки зору, так і з практичної точки зору. Це пов'язане із тим, що при аналізі реальних тіл і конструкцій активно використовують наближені методи (методи скінченних і граничних елементів тощо), що є досить природним, оскільки знайти точний аналітичний розв'язок задачі в області складної форми практично неможливо. Але застосування наближених методів має свої нюанси. Якщо поверхня тіла має так звані нерегулярні точки: ребра, кутові точки (точки перетину кількох ребер), або ж тіло має внутрішні чи приповерхневі дефекти, наприклад, тріщини, фронт яких має кутові точки, то для отримання адекватних результатів за допомогою наближених методів слід обов'язково знати поведінку механічного поля при підході до нерегулярних точок і «закласти» цю поведінку в наближений метод, інакше отримані результати можуть не відповідати дійсності.

Запропонована робота присвячена вивченню особливості розподілу напружень у нестисливому півпросторі, який послаблений внутрішньою V-подібною тріщиною Σ , вершина якої лежить на поверхні півпростору, а сама тріщина розташована у площині, перпендикулярній до поверхні півпростору (рис. 1) (на рисунку зображено чверть простору, в якій потім будуватиметься розв'язок). Роботу можна розглядати як завершальну в серії робіт [7–11], присвячених нестисливому півпростору із внутрішніми та приповерхневими V-подібними (клиноподібними) тріщинами чи розрізами.

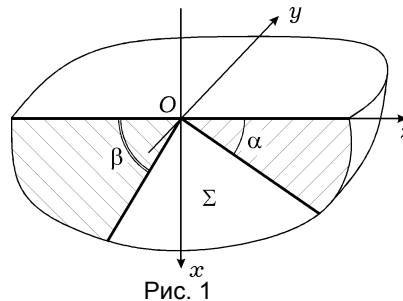


Рис. 1

Слід зауважити, що задачам, в яких вивчається напружено-деформований стан у складних тілах, присвячена велика кількість робіт. Серед таких робіт не можна оминати роботи [18, 19, 23], з яких, мабуть, і почалось активне дослідження задач для тіл із приповерхневими тріщинами. Необхідно також зупинитись на роботах [1, 3, 5, 15, 16, 20–22], які присвячені задачам для пружного півпростору та просторового клину із внутрішніми та приповерхневими тріщинами, а також на роботах [2, 17], в яких розглядаються схожі за своєю постановкою контактні задачі для просторового клина із V-подібною зоною контакту. Більш детальний аналіз робіт, присвячених цій тематиці, можна знайти в роботах [12, 24]. Незважаючи на значну кількість робіт, у яких розглядаються різноманітні задачі для просторових тіл із внутрішніми та приповерхневими тріщинами, говорити про завершеність цих досліджень зарано. Зазначимо також, що інколи резуль-

тати, отримані в деяких роботах, не завжди повністю узгоджуються із результатами аналогічних досліджень, отриманих в інших роботах. Тому говорити про цілісність картини проведених досліджень не можна.

2. Постановка задачі. Отже, в роботі розглядаємо задачу про рівновагу пружного півпростору $x > 0$, який послаблений внутрішньою V -подібною тріщиною, що розміщена у площині $y = 0$, займає там двовимірну область Σ , а її вершина співпадає із початком координат, точкою O (див. рис. 1). Будемо вважати, що поверхня $x = 0$ півпростору та стінки Σ тріщини вільні від зовнішніх навантажень, а сам півпростір перебуває під дією зовнішніх розтягувальних сил, симетричних відносно площини $y = 0$. У такому випадку побудову розв'язку достатньо проводити у чверті простору $\Omega = \{x > 0, y > 0\}$ при таких змішаних крайових умовах

– умови на вільній поверхні півпростору:

$$\sigma_x|_{x=0} = \tau_{xy}|_{x=0} = \tau_{xz}|_{x=0} = 0; \quad (1)$$

– умови на вільних стінках тріщини:

$$\sigma_y|_{y=0} = \tau_{yx}|_{y=0} = \tau_{yz}|_{y=0} = 0, \quad (x, z) \in \Sigma; \quad (2)$$

– умови симетричності поля напружень за координатою y :

$$u_y|_{y=0} = 0, \quad \tau_{yx}|_{y=0} = \tau_{yz}|_{y=0} = 0, \quad (x, z) \notin \Sigma. \quad (3)$$

Основною метою роботи є визначення особливості поведінки напружень при підході до вершини тріщини – точки O . Для досягнення поставленої мети достатньо шукати лише однорідні розв'язки задачі, які визначаються як нетривіальні розв'язки однорідної системи рівнянь Ляме, що задовольняють крайові умови (1)–(3). При цьому умови регулярності на нескінченності не ставимо.

Враховуючи, що область Ω є просторовим клином з кутом розвороту граней $\pi/2$, а також геометрію тріщини Σ , стає очевидним, що задачу зручніше розв'язувати у сферичних координатах (ρ, θ, φ) [6], в яких

$$\Omega = \{\rho > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < \pi/2\},$$

$$\Sigma = \{\rho > 0, \alpha < \theta < \pi - \beta, \varphi = 0\},$$

де $\alpha, \beta > 0$ – кути нахилу ребер тріщини до поверхні півпростору (див. рис. 1), $\alpha + \beta < \pi$. Подавши вектор пружних зміщень у формі Папковича – Нейбера [7–11]

$$2G\mathbf{u} = 4(1 - \nu)(\mathbf{i}\Phi_1 + \mathbf{j}\Phi_2) - \text{grad}(x\Phi_1 + y\Phi_2 + (1 - 2\nu)(\Phi_1^* + \Phi_1^*)),$$

де ν, G – коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву матеріалу, \mathbf{i}, \mathbf{j} – одиничні орти декартових осей Ox та Oy , $\Phi_{1,2}^*$, $\Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x}$, $\Phi_2 = \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial y}$ – невідомі гармонічні функції, у випадку нестисливого матеріалу ($\nu = 1/2$) задачу зводимо до відшукування двох гармонічних функцій $\Phi_{1,2}$, для яких повинні виконуватись такі крайові умови:

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_x|_{\varphi=\pi/2} = -\frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_y \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \alpha < \theta < \pi - \beta, \quad (6)$$

$$2Gu_y \Big|_{\varphi=0} = \Phi_2 \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad \text{або} \quad \pi - \beta \leq \theta \leq \pi. \quad (7)$$

При цьому умови (4) є наслідком того, що поверхня Ω вільна від дотичних напружень (див. (1)–(3)).

3. Побудова гармонічних функцій. Шукані гармонічні функції $\Phi_{1,2}$ запишемо у вигляді інтегралів типу Мелера – Фока, які є лінійними комбінаціями парних і непарних за θ відносно $\theta = \pi/2$ розвинень за функціями Лежандра $P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta)$ [14]:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu A_s^{(1)}(\mu) \cos(\mu\varphi) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta) d\mu, \\ \Phi_2 &= \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu A_s^{(2)}(\mu) \cos\left(\mu\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta) d\mu, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$A_s^{(1,2)}(\mu) = a_s^{(1,2)}(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) + b_s^{(1,2)}(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right),$$

$a_s^{(1,2)}(\mu)$, $b_s^{(1,2)}(\mu)$ – невідомі, парні за аргументом μ , функції; s – невідомий параметр, який поки що вважаємо чисто уявним числом; $\Gamma(\xi)$ – гамма-функція Ейлера [4, 6]. Зазначимо, що при такому виборі невідомих функцій умови (4) вже виконані, а з умови (5) випливає, що

$$a_s^{(2)}(\mu) = -\frac{a_s^{(1)}(\mu)}{\mu} \sin \frac{\pi\mu}{2}, \quad b_s^{(2)}(\mu) = -\frac{b_s^{(1)}(\mu)}{\mu} \sin \frac{\pi\mu}{2}. \quad (9)$$

Підставимо розвинення (8) у змішані крайові умови (6), (7) і доозначимо отримані рівності на повний проміжок $0 < \theta < \pi$. В результаті з урахуванням (9) запишемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu A_s^{(1)}(\mu) \left(\mu^2 - \sin^2 \frac{\pi\mu}{2} \right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta) d\mu = \\ = \begin{cases} \tilde{\sigma}_s^{(1)}(\theta) \sin \theta, & 0 < \theta < \alpha, \\ 0, & \alpha < \theta < \pi - \beta, \\ \tilde{\sigma}_s^{(2)}(\theta) \sin \theta, & \pi - \beta < \theta < \pi, \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} A_s^{(1)}(\mu) \sin(\pi\mu) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta) d\mu = \\ = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta \leq \alpha, \\ \tilde{u}_s(\theta), & \alpha < \theta < \pi - \beta, \\ 0, & \pi - \beta \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

де невідомі функції $\tilde{\sigma}_s^{(1,2)}$ відповідають за розподіл нормальних напружень при $\varphi = 0$, але за межами тріщини, а невідома функція \tilde{u}_s визначає нормальні відхилення стінок тріщини, при цьому

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_s^{(1)}(\theta) &\sim C_1 \sin^{-1/2}(\alpha - \theta), & \theta &\rightarrow \alpha - 0, \\ \tilde{\sigma}_s^{(2)}(\theta) &\sim C_2 \sin^{-1/2}(\theta - \pi + \beta), & \theta &\rightarrow (\pi - \beta) + 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_s(\theta) &\sim U_1 \sin^{1/2}(\theta - \alpha), & \theta &\rightarrow \alpha + 0, \\ \tilde{u}_s(\theta) &\sim U_2 \sin^{1/2}(\pi - \beta - \theta), & \theta &\rightarrow (\pi - \beta) - 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Якщо до рівностей (10) застосувати формули інтегрального перетворення типу Мелера – Фока [14], то, використовуючи формули для функцій Лежандра від’ємного аргументу та тригонометричні розвинення для цих функцій [4], після досить громіздких перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}&\frac{\mu^2 - \sin^2 \frac{\pi\mu}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s + \mu\right)} \left[a_s^{(1)}(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) + b_s^{(1)}(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sin(\pi\mu)} \left(-\cos(\pi s) a_0^\mu \frac{\Psi_s^{(1)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} + \frac{\pi a_0^{-\mu}}{G_s(\mu)} \frac{\Psi_s^{(1)}(-\mu)}{\Gamma(1 - \mu)} \right) + \\ &+ b_0^\mu \frac{\Psi_s^{(2)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)}, \\ &\frac{\mu^2 - \sin^2 \frac{\pi\mu}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s + \mu\right)} \left[a_s^{(1)}(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) - b_s^{(1)}(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) \right] = \\ &= a_0^\mu \frac{\Psi_s^{(1)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} + \frac{1}{\sin(\pi\mu)} \left(-\cos(\pi s) b_0^\mu \frac{\Psi_s^{(2)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} + \right. \\ &\left. + \frac{\pi b_0^{-\mu}}{G_s(\mu)} \frac{\Psi_s^{(2)}(-\mu)}{\Gamma(1 - \mu)} \right), \\ &\frac{\sin(\pi\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s + \mu\right)} \left[a_s^{(1)}(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) + b_s^{(1)}(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) \right] = \\ &= \mu a_0^{-\mu} \frac{X_s^{(1)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)}, \\ &\frac{\sin(\pi\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s + \mu\right)} \left[a_s^{(1)}(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) - b_s^{(1)}(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) \right] = \\ &= \mu b_0^{-\mu} \frac{X_s^{(2)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)},\end{aligned}\quad (12)$$

де

$$\begin{aligned}a_0 &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, & b_0 &= \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, & G_s(\mu) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} - s + \mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right), \\ \Psi_s^{(1)}(\mu) &= \int_0^\alpha \tilde{\sigma}_s^{(1)}(t) \left(\frac{1}{a_0} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)^\mu F\left(\frac{1}{2} - s, \frac{1}{2} + s, 1 + \mu, \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt, \\ \Psi_s^{(2)}(\mu) &= \int_0^\beta \tilde{\sigma}_s^{(2)}(\pi - t) \left(\frac{1}{b_0} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)^\mu F\left(\frac{1}{2} - s, \frac{1}{2} + s, 1 + \mu, \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt,\end{aligned}$$

$$X_s^{(1)}(\mu) = \int_{\beta}^{\pi-\alpha} \frac{\tilde{u}_s(\pi-t)}{\sin t} \left(a_0 \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)^\mu F\left(\frac{1}{2}-s, \frac{1}{2}+s, 1+\mu, \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt,$$

$$X_s^{(2)}(\mu) = \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \frac{\tilde{u}_s(t)}{\sin t} \left(b_0 \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)^\mu F\left(\frac{1}{2}-s, \frac{1}{2}+s, 1+\mu, \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt,$$

$X_s^{(1,2)}(\mu)$ – невідомі функції комплексної змінної μ ; $F(a, b, c, \xi)$ – гіпергеометрична функція [4, 6]. Зауважимо, що функції $X_s^{(1)}(\mu)$ та $X_s^{(2)}(\mu)$ не є незалежними, оскільки вони визначаються через одну і ту ж невідому функцію $\tilde{u}_s(\theta)$. Використовуючи асимптотичні рівності (11) і властивості гіпергеометричної функції [4, 6], неважко показати, що функції $\Psi_s^{(1,2)}(\mu)$ і $X_s^{(1,2)}(\mu)$ є аналітичними при $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$, а при $\mu \rightarrow \infty$ поводять себе, як $C \cdot \mu^{-1/2}$ і $C \cdot \mu^{-3/2}$ відповідно ($C = \text{const}$).

Вилучаючи з отриманих рівностей (12) невідомі функції $a_s^{(1)}(\mu)$, $b_s^{(1)}(\mu)$, отримуємо систему функціональних рівнянь типу Вінера – Гопфа [13]

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi\mu}{2} - \mu^2} \frac{\pi}{\Gamma(1-\mu)} \left[\Psi_s^{(1)}(-\mu) \right] = \frac{G_s(\mu)}{\Gamma(1+\mu)} \left(-\mu \left[\tilde{X}_s^{(1)}(-\mu) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(\pi s)}{\sin^2 \frac{\pi\mu}{2} - \mu^2} \left[a_0^{2\mu} \Psi_s^{(1)}(\mu) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(\pi\mu)}{\sin^2 \frac{\pi\mu}{2} - \mu^2} (a_0 b_0)^\mu \left[\Psi_s^{(2)}(\mu) \right] \right), \quad |\operatorname{Re} \mu| < \frac{1}{2}, \quad (13)$$

відносно невідомих функцій $\Psi_s^{(1,2)}(\mu)$ та $X_s^{(1,2)}(\mu)$.

Систему (13) розв'язуємо методом Вінера – Гопфа [13], основним кроком якого є факторизація функції $g(\mu) = \sin^2 \frac{\pi\mu}{2} - \mu^2$, яку можна провести шляхом розвинення цієї функції у нескінченний добуток за її нулями [13]. Функція $g(\mu)$ є парною, має нуль другого порядку в точці $\mu = 0$, а також зліченну кількість простих нулів, симетрично розміщених у точках $\mu = \pm 1$, $\mu = \pm \beta_k$, $\mu = \pm \bar{\beta}_k$, $k = 1, 2, \dots$, де $\operatorname{Re} \beta_k > 1$, $\operatorname{Im} \beta_k > 0$, $\beta_k = 2k + 1 + i \frac{2}{\pi} \ln(4k + 2) + o(1)$, $k \rightarrow \infty$, i – уявна одиниця. Нулі $\mu = \beta_k$, $k = 1, 2, \dots$, визначаємо із використанням чисельних методів. Розвиваючи $g(\mu)$ у нескінченний добуток, отримаємо

$$\sin^2 \frac{\pi\mu}{2} - \mu^2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \frac{\mu^2 L(\mu) L(-\mu)}{\Gamma(1+\mu) \Gamma(1-\mu)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{2}\right)}, \quad (14)$$

де

$$L(\mu) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\mu}{\beta_k}\right) \left(1 + \frac{\mu}{\bar{\beta}_k}\right)}{\left(1 + \frac{\mu}{2k+1}\right)^2}$$

– аналітична при $\operatorname{Re} \mu > -1$ функція, яка в цій півплощині не має нулів, а при $\mu \rightarrow \infty$, враховуючи асимптотичні властивості нескінченних добутків [13], поводить себе, як стала.

Використовуючи факторизацію (14), систему (13) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{K_s(-\mu)}{\mu} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_s^{(1)}(-\mu) \\ \tilde{\Psi}_s^{(2)}(-\mu) \end{bmatrix} &= -\mu \begin{bmatrix} \tilde{X}_s^{(1)}(\mu) \\ \tilde{X}_s^{(2)}(\mu) \end{bmatrix} + \frac{\mu \cos(\pi s)}{\sin^2 \frac{\pi\mu}{2} - \mu^2} \begin{bmatrix} a_0^{2\mu} \tilde{\Psi}_s^{(1)}(\mu) \\ b_0^{2\mu} \tilde{\Psi}_s^{(2)}(\mu) \end{bmatrix} - \\ &- \frac{\mu \sin(\pi\mu)}{\sin^2 \frac{\pi\mu}{2} - \mu^2} (a_0 b_0)^\mu \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_s^{(2)}(\mu) \\ \tilde{\Psi}_s^{(1)}(\mu) \end{bmatrix}, \quad |\operatorname{Re} \mu| < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

де для зручності введено нові невідомі функції

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_s^{(1,2)}(\mu) \\ \tilde{\Psi}_s^{(1,2)}(\mu) \end{bmatrix} = \frac{G_s(\mu)}{\Gamma^2(1+\mu)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right)} L(\mu) \begin{bmatrix} \mu X_s^{(1,2)}(\mu) \\ \Psi_s^{(1,2)}(\mu) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

аналітичні при $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$, які з урахуванням асимптотик гамма-функції [4], функції $L(\mu)$ і невідомих функцій $\Psi_s^{(1,2)}(\mu)$ і $X_s^{(1,2)}(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$ поведуть себе, як $C \cdot \mu^{-2}$, а функція

$$K_s(\mu) = \frac{16}{\pi^2 - 4} \frac{1}{L^2(\mu)} \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)} \frac{\Gamma^2(1+\mu)}{G_s(\mu)}$$

є аналітичною при $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$ і (на підставі аналогічних міркувань) при $\mu \rightarrow \infty$ поводить себе, як $C \cdot \mu^2$.

Аналізуючи векторну рівність (15), бачимо, що її ліва частина аналітична у півплощині $\operatorname{Re} \mu < \frac{1}{2}$, за винятком простого полюса у точці $\mu = 0$, а при $\mu \rightarrow \infty$ поводить себе, як $C \cdot \mu^{-1}$. У правій частині перший доданок аналітичний у півплощині $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$, а при $\mu \rightarrow \infty$ має асимптотику $C \cdot \mu^{-1}$, другий доданок має у цій півплощині прості полюси у точках $\mu = 0$, $\mu = 1$, $\mu = \beta_k$, $\mu = \bar{\beta}_k$, $k = 1, 2, \dots$, а третій – прості полюси у точках $\mu = \beta_k$, $\mu = \bar{\beta}_k$, $k = 1, 2, \dots$. Вилучаючи в правій частині (15) полюси у точках $\mu = 1$, $\mu = \beta_k$, $\mu = \bar{\beta}_k$, $k = 1, 2, \dots$, отримуємо векторну рівність, ліва частина якої аналітична у півплощині $\operatorname{Re} \mu < \frac{1}{2}$, за винятком простого полюса у точці $\mu = 0$, а при $\mu \rightarrow \infty$ поводить себе, як $C \cdot \mu^{-1}$, права ж частина є аналітичною у півплощині $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$, за винятком простого полюса у точці $\mu = 0$, і має аналогічну поведінку при $\mu \rightarrow \infty$. Тоді, застосовуючи принцип аналітичного продовження за неперервністю і теорему про вигляд мероморфної функції, отримаємо рівності, що визначають невідомі функції $\tilde{\Psi}_s^{(1,2)}(\mu)$ та $\tilde{X}_s^{(1,2)}(\mu)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{K_s(\mu)}{\mu} \left[\tilde{\Psi}_s^{(1)}(\mu) \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{1}{\mu + \lambda_k} \left[\begin{matrix} a_0^{2\lambda_k} y_k^{(1)} \\ b_0^{2\lambda_k} y_k^{(2)} \end{matrix} \right] + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{(a_0 b_0)^{\lambda_k}}{\mu + \lambda_k} \left[\begin{matrix} y_k^{(2)} \\ y_k^{(1)} \end{matrix} \right] = \\
& = \frac{1}{\mu} \left[\begin{matrix} y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}, \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu \left[\begin{matrix} \tilde{X}_s^{(1)}(\mu) \\ \tilde{X}_s^{(2)}(\mu) \end{matrix} \right] + \frac{\mu \cos(\pi s)}{\sin^2 \frac{\pi \mu}{2} - \mu^2} \left[\begin{matrix} a_0^{2\mu} \tilde{\Psi}_s^{(1)}(\mu) \\ b_0^{2\mu} \tilde{\Psi}_s^{(2)}(\mu) \end{matrix} \right] - \frac{\mu \sin(\pi \mu)}{\sin^2 \frac{\pi \mu}{2} - \mu^2} (a_0 b_0)^\mu \left[\begin{matrix} \tilde{\Psi}_s^{(2)}(\mu) \\ \tilde{\Psi}_s^{(1)}(\mu) \end{matrix} \right] + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{(a_0 b_0)^{\lambda_k}}{\mu - \lambda_k} \left[\begin{matrix} y_k^{(2)} \\ y_k^{(1)} \end{matrix} \right] - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{1}{\mu - \lambda_k} \left[\begin{matrix} a_0^{2\lambda_k} y_k^{(1)} \\ b_0^{2\lambda_k} y_k^{(2)} \end{matrix} \right] = \frac{1}{\mu} \left[\begin{matrix} y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \end{matrix} \right], \\
& \operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}, \tag{18}
\end{aligned}$$

де використано позначення

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2n} = \beta_n, \quad \lambda_{2n+1} = \bar{\beta}_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\
& y_0^{(1,2)} = y_0^{(1,2)}(s) = K_s(0) \tilde{\Psi}_s^{(1,2)}(0), \quad y_k^{(1,2)} = y_k^{(1,2)}(s) = \lambda_k \tilde{\Psi}_s^{(1,2)}(\lambda_k), \\
& k = 1, 2, \dots \tag{19}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що для нових невідомих $y_k^{(1,2)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, можна встановити асимптотичну поведінку при $k \rightarrow \infty$. Використовуючи їх означення (19), а також властивості функцій $\tilde{\Psi}_s^{(1,2)}(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$, запишемо

$$y_k^{(1,2)} = y_k^{(1,2)}(s) \sim C_{1,2}(s) \lambda_k^{-1}, \quad k \rightarrow \infty. \tag{20}$$

Якщо врахувати поведінку (20) величин $y_k^{(1,2)}$ при $k \rightarrow \infty$, а також асимптотику λ_k при $k \rightarrow \infty$, то можемо встановити, що ряди, які входять до рівностей (17), (18), будуть збіжними, якщо $0 \leq a_0, b_0 \leq 1$, тобто при $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi/2$. Таким чином, використаний підхід буде обґрунтованим лише при вказаних обмеженнях на кути α та β .

Для того щоб з рівностей (17), (18) повністю визначити функції $\tilde{\Psi}_s^{(1,2)}(\mu)$ та $\tilde{X}_s^{(1,2)}(\mu)$, необхідно знайти невідомі величини $y_k^{(1,2)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Враховуючи означення (19) цих величин, покладемо в рівності (17) послідовно $\mu = \lambda_m$, $m = 1, 2, \dots$, отримаємо зліченну серію рівнянь

$$\begin{aligned}
& \frac{K_s(\lambda_m)}{\lambda_m^2} \left[\begin{matrix} y_m^{(1)} \\ y_m^{(2)} \end{matrix} \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{1}{\lambda_m + \lambda_k} \left[\begin{matrix} a_0^{2\lambda_k} y_k^{(1)} \\ b_0^{2\lambda_k} y_k^{(2)} \end{matrix} \right] + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{(a_0 b_0)^{\lambda_k}}{\lambda_m + \lambda_k} \left[\begin{matrix} y_k^{(2)} \\ y_k^{(1)} \end{matrix} \right] - \frac{1}{\lambda_m} \left[\begin{matrix} y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \end{matrix} \right] = 0, \\
& m = 1, 2, \dots \tag{21}
\end{aligned}$$

Однак отримані рівняння (21) не замикають нескінченної системи відносно невідомих величин $y_k^{(1,2)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, оскільки серед них немає рівнянь, що дозволяють визначити величини $y_0^{(1,2)}$. Щоб записати такі рівняння, з рівності (17) визначимо функції $\tilde{\Psi}_s^{(1,2)}(\mu)$, отримані вирази підставимо у (18) і спрямуємо $\mu \rightarrow 0$. В результаті отримаємо рівняння, які замикають нескінченну систему (21) відносно шуканих невідомих $y_k^{(1,2)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} y_0^{(1)} \ln a_0^2 \\ y_0^{(2)} \ln b_0^2 \end{bmatrix} + \left(D + \psi\left(\frac{1}{2} + s\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - s\right) - \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi(1) \right) \begin{bmatrix} y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \end{bmatrix} - \\ & - \frac{\pi}{\cos(\pi s)} \begin{bmatrix} y_0^{(2)} \\ y_0^{(1)} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi s)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{2}{\lambda_k} \begin{bmatrix} a_0^{2\lambda_k} y_k^{(1)} \\ b_0^{2\lambda_k} y_k^{(2)} \end{bmatrix} - \\ & - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(\pi \lambda_k)}{\frac{\pi}{2} \sin(\pi \lambda_k) - 2\lambda_k} \frac{2}{\lambda_k} (a_0 b_0)^{\lambda_k} \begin{bmatrix} y_k^{(2)} \\ y_k^{(1)} \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

де $D = 4 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{2j+1} \right)$ – константа, визначена збіжним рядом, $\psi(\xi)$ – логарифмічна похідна гамма-функції [4, 6].

Зазначимо, що отримана система (21), (22) є нескінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих величин $y_k^{(1,2)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, яка є квазіцілком регулярною при кожному фіксованому $s \in \mathbb{C}$, якщо $0 < a_0, b_0 < 1$. Якщо ж, наприклад, $a_0 = 1$, то систему можна звести до такої за допомогою заміни $z_k^{(1)} = y_k^{(1)} \sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$.

Для відшукування однорідних розв'язків поставленої задачі визначимо гармонічні функції $\Phi_{1,2}$ через розв'язки нескінченної системи (21), (22). Використовуючи третю з рівностей (12), співвідношення (9) та означення функції $\tilde{X}_s^{(1)}(\mu)$ з (16), для $\Phi_{1,2}$ з (8) запишемо

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \frac{\cos(\mu\varphi)}{\sin(\pi\mu)} \frac{\tilde{X}_s^{(1)}(\mu)}{L(\mu)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2}\right)} \frac{\Gamma(1+\mu)}{a_0^\mu} P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu, \\ \Phi_2 &= \\ &= -\frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos\left(\mu\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{2\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} \frac{\tilde{X}_s^{(1)}(\mu)}{L(\mu)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2}\right)} \frac{\Gamma(1+\mu)}{a_0^\mu} P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu. \end{aligned}$$

Якщо $0 \leq \theta < \alpha$, то інтеграли в отриманих рівностях можемо обчислити, замикаючи контури інтегрування у півплощині $\operatorname{Re} \mu > 0$ та визначаючи суму лишків за усіма особливими точками підінтегральних виразів, що лежать у цій півплощині. В результаті отримаємо

$$\Phi_1 = -\rho^{s-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} k \cos(k\varphi) \frac{\tilde{X}_s^{(1)}(k)}{L(k)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2}\right)} \frac{\Gamma(1+k)}{a_0^k} P_{s-1/2}^{-k}(\cos\theta),$$

$$\Phi_2 = -\rho^{s-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2n}{\pi} \sin((1+2n)\varphi) \frac{\tilde{X}_s^{(1)}(1+2n)}{L(1+2n)} \frac{\Gamma(2+n)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(2+2n)}{a_0^{1+2n}} P_{s-1/2}^{-(1+2n)}(\cos \theta),$$

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \theta < \alpha, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

Використовуючи інші рівності (12), можна отримати вирази для функцій $\Phi_{1,2}$, аналогічні (23), і на проміжках $\alpha \leq \theta \leq \pi - \beta$ та $\pi - \beta < \theta \leq \pi$.

Якщо розглянути рівності (17), (18), то після громіздких перетворень переконаємось, що величини $\tilde{X}_s^{(1)}(m)$, $m = 1, 2, \dots$, які входять у (23), лінійно виражаються через розв'язки нескінченної системи (21), (22). Таким чином, розв'язки цієї системи повністю визначають шукані гармонічні функції $\Phi_{1,2}$. До цього часу приймали, що параметр s є чисто уявним числом. Але, враховуючи регулярність системи (21), (22) при кожному $s \in \mathbb{C}$, зображення (23) для функцій $\Phi_{1,2}$ можемо аналітично продовжити за s з уявної осі на всю комплексну площину.

Нагадаємо, що однорідні розв'язки є нетривіальними функціями. Оскільки функції $\Phi_{1,2}$ лінійно виражаються через розв'язки $y_k^{(1,2)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, системи (21), (22), то $\Phi_{1,2}$ будуть нетривіальними, якщо система (21), (22) матиме нетривіальні розв'язки. Нескінченна система (21), (22) є лінійною, квазіцилком регулярно однорідною системою, коефіцієнти якої є мероморфними функціями від s , а тому матиме нетривіальні розв'язки лише при тих значеннях параметра s , в яких її основний визначник перетворюється в нуль. Нулі основного визначника нескінченної системи (21), (22) знаходимо чисельно шляхом редукції системи до скінченної. При цьому ці нулі розташовані симетрично, тобто, якщо $s = s^*$ є нулем основного визначника системи (21), (22), то $s = -s^*$ також буде нулем цього визначника (оскільки коефіцієнти системи є парними функціями від s). В роботі визначали лише дійсні значення s .

4. Аналіз розподілу напружень. Використовуючи рівності (23), визначимо розподіл розривних напружень у площині розташування тріщини. Використовуючи рівність, що визначає нормальні напруження σ_y через гармонічні функції $\Phi_{1,2}$:

$$\sigma_y \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=0}, \quad (24)$$

підставляючи в цю рівність вирази (23) і беручи до уваги асимптотичні властивості гамма-функції, функцій Лежандра [4] і функцій $\tilde{X}_s^{(1)}(\mu)$, запишемо

$$\sigma_y \Big|_{\varphi=0} = \rho^{s-3/2} \left(\frac{K_s(\theta)}{\sqrt{\sin(\alpha - \theta)}} + \sigma_s(\theta) \right), \quad \rho > 0, \quad 0 \leq \theta < \alpha, \quad (25)$$

де $K_s(\theta)$ та $\sigma_s(\theta)$ – неперервні, а отже, й обмежені при $0 \leq \theta \leq \alpha$ функції. Аналогічна рівність для напружень має місце і на проміжку $\pi - \beta < \theta \leq \pi$.

З аналізу отриманої рівності (25) випливає, що характер поведінки напружень в околі вершини тріщини – точки O , тобто при $\rho \ll 1$, визнача-

ється додатними нулями основного визначника системи (21), (22). Чисельний аналіз показав, що розташування цих нулів залежить від значень кутів α та β . При цьому слід виділити декілька якісно різних випадків.

1°. Якщо ребра тріщини утворюють такі кути α і β (див. рис. 1), що на рис. 2 точка з координатами $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ потрапляє в область D_3 , на криву ℓ_2 , або в область D_2 , то найменші додатні нулі основного визначника системи (21), (22) розташовані у точках $s = s_1$ (значення s_1 можна знайти тільки наближено) і $s = s_0 = 3/2$, при цьому $0 < s_1 < 3/2$. Тоді, залишаючи лише однорідні розв'язки, які відповідають цим нулям, з рівності (25) отримаємо, що для розривних напружень при підході до вершини тріщини виконується рівність

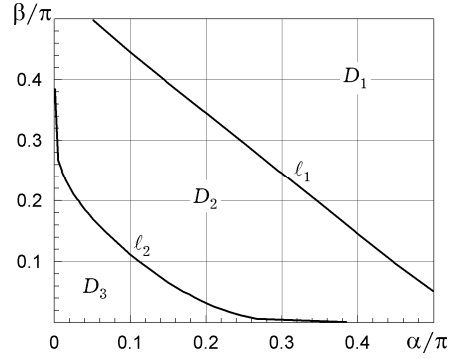


Рис. 2

$$\sigma_y|_{\varphi=0} = \rho^\gamma \left(\frac{K_{s_1}(\theta)}{\sqrt{\sin(\alpha - \theta)}} + \sigma_1(\theta) \right) + \frac{K_{s_0}(\theta)}{\sqrt{\sin(\alpha - \theta)}} + \sigma_0(\theta),$$

$$0 < \rho \ll 1, \quad 0 \leq \theta < \alpha, \quad (26)$$

де $\gamma = s_1 - 3/2$, $-1 < \gamma < 0$ (значення показника γ наведено у табл. 1).

Таблиця 1

$\alpha/\pi \backslash \beta/\pi$	0	0.025	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
0	-	-0.863	-0.832	-0.783	-0.738	-0.694	-0.647	-0.598	-0.543	-0.482	-0.413	-0.332
0.025	-0.863	-0.713	-0.677	-0.619	-0.566	-0.513	-0.457	-0.396	-0.330	-0.256	-0.172	-0.075
0.05	-0.832	-0.677	-0.639	-0.578	-0.523	-0.466	-0.407	-0.343	-0.273	-0.195	-0.106	-0.003
0.1	-0.783	-0.619	-0.578	-0.513	-0.452	-0.391	-0.326	-0.255	-0.178	-0.091	0.007	0.120
0.15	-0.738	-0.566	-0.523	-0.452	-0.386	-0.319	-0.249	-0.172	-0.087	0.008	0.116	0.238
0.2	-0.694	-0.513	-0.466	-0.391	-0.319	-0.247	-0.169	-0.085	0.008	0.112	0.229	0.360
0.25	-0.647	-0.457	-0.407	-0.326	-0.249	-0.169	-0.085	0.007	0.109	0.222	0.349	0.488
0.3	-0.598	-0.396	-0.343	-0.255	-0.172	-0.085	0.007	0.108	0.219	0.342	0.477	0.620
0.35	-0.543	-0.330	-0.273	-0.178	-0.087	0.008	0.109	0.219	0.340	0.471	0.611	0.752
0.4	-0.482	-0.256	-0.195	-0.091	0.008	0.112	0.222	0.342	0.471	0.608	0.746	0.873
0.45	-0.413	-0.172	-0.106	0.007	0.116	0.229	0.349	0.477	0.611	0.746	0.871	0.965
0.5	-0.332	-0.075	-0.003	0.120	0.239	0.360	0.488	0.620	0.752	0.873	0.965	1.000

З отриманої рівності (26) можна зробити висновок, що при $\theta \rightarrow \alpha - 0$ і фіксованому ρ , тобто на ребрі тріщини, напруження мають класичну кореневу особливість

$$\sigma_y|_{\varphi=0} \sim \frac{K(\rho)}{\sqrt{r}}, \quad r \rightarrow 0+, \quad (27)$$

де r – відстань до точки, що лежить на ребрі тріщини. Якщо при цьому поступово вздовж ребра рухатись до вершини тріщини (див. рис. 1), то для коефіцієнта інтенсивності напружень має місце асимптотика

$$K(\rho) \sim \tilde{K} \cdot \rho^{\gamma+1/2}, \quad \rho \rightarrow 0+.$$

Якщо ж зафіксувати θ та спрямувати $\rho \rightarrow 0+$, то отримаємо, що у вершині тріщини, точці O (див. рис. 1), напруження мають локальну степеневу особливість із показником γ :

$$\sigma_y|_{\varphi=0} \sim C(\theta)\rho^\gamma, \quad \rho \rightarrow 0+.$$

Якщо на рис. 2 точка з координатами $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ потрапляє в область D_3 , тоді показник особливості $\gamma < -1/2$, тобто у вершині тріщини особливість сильніша, ніж на ребрах. Якщо точка $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ на рис. 2 лежить на кривій ℓ_2 (кути α та β , які на рис. 2 визначають криву ℓ_2 , наведено у табл. 2), тоді показник особливості $\gamma = -1/2$, тобто у вершині тріщини, точці O , так само, як і на ребрах, має місце класична коренева особливість. Якщо ж точка $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ на рис. 2 потрапляє в область D_2 , то показник особливості $-1/2 < \gamma < 0$, і у вершині тріщини особливість слабша від класичної кореневої, яка є на ребрах тріщини.

Таблиця 2

α/π	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.386
β/π	0.386	0.248	0.222	0.202	0.185	0.170	0.110	0.065	0.031	0.009	0.001	0

2°). Якщо ребра тріщини утворюють такі кути α і β (див. рис. 1), що на рис. 2 точка з координатами $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ лежить на кривій ℓ_1 (значення цих кутів наведено у табл. 3), то найменшим додатним нулем основного визначника нескінченної системи (21), (22) буде $s = s_0 = s_1 = 3/2$, але це буде нуль другого порядку («нерухомий» нуль $s = s_0$ і «рухомий» $s = s_1$ співпадають). Такому нулеві відповідатимуть два однорідних розв'язки: перший визначатиметься рівностями (23), а другий відрізнятиметься від першого множником – замість множника $\rho = \rho^{s_0-1/2}$ у (23) буде множник $\rho \ln \rho$. Тоді, використовуючи лише вказані однорідні розв'язки, з виразу (25) запишемо

$$\sigma_y|_{\varphi=0} = \ln \rho \cdot \left(\frac{K_{s_0}^{(1)}(\theta)}{\sqrt{\sin(\alpha - \theta)}} + \sigma_1(\theta) \right) + \frac{K_{s_0}(\theta)}{\sqrt{\sin(\alpha - \theta)}} + \sigma_0(\theta),$$

$$0 < \rho \ll 1, \quad 0 \leq \theta < \alpha. \quad (28)$$

З отриманої рівності випливає, що на ребрах тріщини зберігається класична коренева особливість (27), але для коефіцієнта інтенсивності напружень у цьому випадку, якщо рухатись вздовж ребра тріщини до її вершини, має місце асимптотика

$$K(\rho) \sim \tilde{K} \cdot \rho^{1/2} \ln \rho, \quad \rho \rightarrow 0+.$$

Таблиця 3

α/π	0.051	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
β/π	0.5	0.445	0.396	0.346	0.296	0.246	0.196	0.146	0.097	0.051

Якщо ж зафіксувати θ та спрямувати $\rho \rightarrow 0+$, то з рівності (28) випливає, що у вершині тріщини має місце логарифмічна особливість

$$\sigma_y|_{\varphi=0} \sim C(\theta) \cdot \ln \rho, \quad \rho \rightarrow 0+,$$

яка значно слабша від класичної кореневої особливості на ребрах тріщини.

3°). Нарешті, якщо кути α і β , утворені ребрами тріщини (див. рис. 1), такі, що точка $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ на рис. 2 потрапляє в область D_1 , то найменшими додатними нулями основного визначника системи (21), (22) будуть $s = s_0 = 3/2$ та $s = s_1 > 3/2$, при цьому обидва нулі прості. Залишаючи однорідні розв'язки, які відповідають лише цим нулям, та використовуючи (25), отримуємо, що для розривних напружень виконується рівність (26), але в цій рівності $\gamma = s_1 - 3/2 > 0$ (числові значення показника γ наведено у табл. 1). Аналізуючи цю рівність, бачимо, що на ребрах тріщини знову маємо класичну кореневу особливість (27), але для коефіцієнта інтенсивності, якщо вздовж ребра тріщини рухатись до її вершини (див. рис. 1), має місце поведінка

$$K(\rho) \sim \tilde{K} \cdot \rho^{1/2}, \quad \rho \rightarrow 0+.$$

Якщо тепер проаналізувати поведінку розривних напружень при фіксованому θ та $\rho \rightarrow 0+$, то з рівності (26) при $\gamma > 0$ випливає, що напруження у вершині тріщини (див. рис. 1) залишаються обмеженими, тобто в точці O концентрація напружень відсутня.

Об'єднуючи усі розглянуті випадки, можна зробити висновок щодо розповсюдження рівноважної внутрішньої V -подібної тріщини, вершина якої лежить на поверхні нестисливого півпростору (див. рис. 1). Якщо конфігурація тріщини така, що її ребра нахилені до поверхні півпростору під такими кутами α та β , що на рис. 2 точка з координатами $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ лежить вище від кривої ℓ_2 (тобто в областях D_1 , D_2 або на ℓ_1), то концентрація напружень буде сильнішою на ребрах тріщини, ніж у її вершині. Тому руйнування матеріалу буде відбуватись уздовж ребер і буде спрямоване так, щоб у вершині тріщини поступово посилювалась концентрація напружень, поки не встановиться класична коренева особливість, яка має місце на ребрах тріщини. Тобто в процесі розповсюдження тріщини кути α та β будуть зменшуватись так, щоб точка $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ якомога швидше потрапила на криву ℓ_2 .

Якщо кути α та β , утворені ребрами тріщини (див. рис. 1) такі, що на рис. 2 точка з координатами $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ лежить нижче від кривої ℓ_2 (в області D_3), то концентрація напружень буде сильнішою у вершині тріщини, ніж на її ребрах. Тому руйнування матеріалу в першу чергу спостерігатиметься у вершині. При цьому в процесі руйнування ребра тріщини розійдуться, тобто кожне з ребер матиме свою точку виходу на поверхню півпростору, а між цими точками буде невеликий відрізок зруйнованого матеріалу (на поверхню вийде сама тріщина). Локальна геометрія в околах обох цих точок буде аналогічна до випадку, коли кут α або кут β дорівнює нулеві (або ж випадку, розглянутому у роботах [7, 10]). Подальше руйнування буде спрямоване на зменшення концентрації напружень у точках виходу ребер на поверхню півпростору, тобто до збільшення кутів виходу ребер тріщини на поверхню півпростору до кутів, що дорівнюють $0.386\pi \approx 69.48^\circ$, при яких у цих точках матиме місце коренева особливість.

Якщо ж кути α та β , утворені ребрами тріщини (див. рис. 1), такі, що на рис. 2 точка з координатами $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ лежить на кривій ℓ_2 , тобто у вершині тріщини, тоді маємо класичну кореневу особливість, таку саму, як і на ребрах. У цьому випадку слід очікувати, що руйнування спостерігатиметься як на ребрах, так і у вершині тріщини. Якщо матеріал хоч трохи зруйнується у вершині тріщини, то знову виникне ситуація, яка спостерігається у попередньому випадку, коли $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ лежить в області D_3 .

1. Александров В. М., Пожарский Д. А. К задачам о разрезе в трехмерном упругом клине // Прикл. математика и механика. – 2006. – **70**, вып. 3. – С. 531–540.
2. Александров В. М., Пожарский Д. А. К задаче о клиновидном штампе на грани упругого клина // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 1. – С. 152–156.
3. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – Москва: Наука, 1993. – 222 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
5. Глушкова Е. В., Глушкова Н. В., Лапина О. Н. Показатели сингулярности упругих напряжений в точке выхода трещины на поверхность // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 146–153.
6. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 379 с.
7. Ловейкин А. В., Улитко А. Ф. Анализ напряженно-деформированного состояния в несжимаемом полупространстве с приповерхностной клиновидной трещиной // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 1. – С. 136–148.
8. Ловейкин А. В., Улитко А. Ф. Об особенностях поля напряжений в несжимаемом полупространстве, ослабленном двумя приповерхностными клиновидными трещинами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 108–120.
9. Ловейкин А. В. Про особливості поля напружень у нестисливному півпросторі з клиноподібним приповерхневим розрізом при великих кутах занурення ребра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 126–133.
10. Ловейкин А. В. Рівновага нестисливого півпростору з двома приповерхневими симетричними клиноподібними розрізами // Машинознавство. – 2004. – № 1. – С. 8–12.
11. Ловейкин А. В. Рівновага нестисливого півпростору, послабленого внутрішньою V-подібною симетричною тріщиною, вершина якої виходить на поверхню // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 2. – С. 92–102.
The same: Loveikin A. V. Equilibrium of an incompressible half-space weakened by an internal V-shaped symmetric crack with a tip reaching the surface // J. Math. Sci. – 2010. – **170**, No. 6. – P. 675–686.
12. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: Физматлит, 2001. – 672 с.
13. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1968. – 279 с.
14. Парфененко Д. Н., Улитко А. Ф. Об одном новом интегральном преобразовании и использовании его в контактных задачах теории упругости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 11. – С. 53–58.
15. Пожарский Д. А. О клиновидном разрезе в трехмерном упругом клине // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 3. – С. 27–32.
The same: Pozharskii D. A. Wedge-shaped cut in three-dimensional elastic wedge // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, No. 3. – P. 238–244.
16. Пожарский Д. А. Об эллиптической трещине в упругом пространственном клине // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1993. – № 6. – С. 105–112.
17. Alexandrov V. M., Pozharskii D. A. Three-dimensional contact problems. – Dordrecht ect.: Kluwer, 2001. – 406 p.
18. Benthem J. P. State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space // Int. J. Solids Struct. – 1977. – **13**. – P. 479–492.
19. Folias E. S. On the 3-dimensional theory of cracked plates // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1975. – **42**, No. 3. – P. 663–674.
20. Glushkov E., Glushkova N., Lapina O. 3D elastic stress singularity at polyhedral corner points // Int. J. Solids Struct. – 1999. – **36**, No. 8. – P. 1105–1128.
21. Leung A. Y. T., Su R. K. L. Analytical solution for mode I crack orthogonal to free surface // Int. J. Fract. – 1996. – **76**. – P. 79–85.
22. Leung A. Y. T., Su R. K. L. Order of the singular stress field of through-thickness cracks // Int. J. Fract. – 1996. – **75**. – P. 85–93.
23. Shmulely M., Alterman Z. A three-dimensional numerical analysis of stress distribution in the vicinity of a crack tip // Isr. J. Technol. – 1971. – **9**, No. 5. – P. 523–530.
24. Sinclair G. B. Stress singularities in classical elasticity-II: Asymptotic identification // Appl. Mech. Rev. – 2004. – **57**, No. 5. – P. 385–439.

ОСОБЕННОСТЬ ПОВЕДЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕСЖИМАЕМОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ВНУТРЕННЕЙ V-ОБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ, КОТОРАЯ ЛЕЖИТ В ПЛОСКОСТИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, А ЕЕ ВЕРШИНА ВЫХОДИТ НА ПОВЕРХНОСТЬ

Рассматривается задача о равновесии несжимаемого полупространства, которое ослаблено внутренней V-образной трещиной, лежащей в плоскости, перпендикулярной к поверхности полупространства, а ее вершина выходит на поверхность. С использованием интегрального преобразования типа Мелера – Фока и метода Винера – Хопфа построены однородные решения задачи, на базе которых проведен анализ особенности разрывающих напряжений в окрестности вершины трещины и проанализирован процесс ее распространения.

FEATURE OF STRESS BEHAVIOR IN INCOMPRESSIBLE HALF-SPACE WITH INTERNAL V-SHAPED CRACK LYING IN THE PLANE PERPENDICULAR TO THE HALF-SPACE SURFACE AND ITS TIP REACHES THE SURFACE

The problem on equilibrium of an incompressible half-space, weakened by V-shaped crack lying in the plane perpendicular to the half-space surface and whose tip reaches the half-space surface is considered. Using the integral transform of the Meler – Fok type and the Wiener – Hopf technique the homogeneous solutions of the problem are determined, based on which the analysis of discontinuous stress features in the vicinity of the crack tip is carried out and the crack propagation is analyzed.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
04.07.11