УДК 517.524

Х. Й. Кучмінська

ДВОВИМІРНІ ПРАВИЛЬНІ *C*-ДРОБИ

Розглядається один із типів функціональних двовимірних неперервних дробів, відповідних до формального подвійного степеневого ряду. З використанням оцінки залишків двовимірного неперервного дробу, формули різниці між двома наближеннями двовимірного неперервного дробу в термінах цих залишків і принципу відповідності досліджуються властивості таких дробів.

1. Попередні дослідження. Відповідні двовимірні неперервні дроби запроваджено в роботах [4, 9] як один з конструктивних методів наближення функцій двох змінних. Властивості таких дробів вивчалися у роботах Д. І. Боднара [2], Х. Й. Кучмінської [5], О. М. Сусь [6], Т. М. Антонової [1], A. Cuyt, V. Brevik Petersen, H. Waadeland, W. B. Jones [7], A. Cuyt, B. Verdonk [8].

Основним поняттям, що використовуватимемо в цій роботі, є принцип відповідності двовимірного неперервного дробу формальному подвійному степеневому ряду, а також методи дослідження збіжності неперервних дробів і їх багатовимірних узагальнень [2, 5].

Означення 1. Двовимірні неперервні дроби вигляду

$$\Phi_0(z_1,z_2) + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,i}z_1 z_2}{\Phi_{i+1}(z_1,z_2)} \tag{1}$$

або

$$\frac{1}{\Phi_0(z_1,z_2) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{a_{i,i}z_1 z_2}{\Phi_{i+1}(z_1,z_2)}}, \tag{2}$$

де

$$\Phi_0(z_1,z_2) = a_{0,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k,0}z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{0,k}z_2}{1},$$

$$\Phi_i(z_1,z_2) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{i+k,i}z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{i,i+k}z_2}{1}, \quad i = 1,2,\ldots,$$

$a_{i,j} \ne 0$, $i = 0,1,\ldots$, $j = 0,1,\ldots$, – комплексні числа, $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$, називають *двовимірними правильними* C*-дробами.*

Якщо всі $a_{i,j} > 0$, $i = 0,1,\ldots$, $j = 0,1,\ldots$, і $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$, тоді двовимірний неперервний дріб (1) чи (2) називатимемо *двовимірним* S*-дробом.*

Означення 2. Скінченні двовимірні неперервні дроби

$$f_n(z) := \frac{A_n}{B_n} = \Phi_0^{(n)}(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n}\frac{a_{i,i}(z)}{\Phi_i^{(n-i)}(z)}, \tag{3}$$

$$f_n(z) := \frac{A_n}{B_n} = \frac{1}{\Phi_0^{(n-1)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{a_{i,i}(z)}{\Phi_i^{(n-1-i)}(z)}}, \tag{4}$$

$$\Phi_i^{(0)} = 1, \qquad \Phi_i^{(m)} := 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{m}\frac{a_{i+j,i}z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{m}\frac{a_{i,i+j}z_2}{1},$$

де $a_{i,i}$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, називають n*-м наближенням* або n*-м підхідним дробом* двовимірного правильного C-дробу (1) (або (2)), а A_n, B_n – *чисельником і знаменником* n*-го наближення* f_n або n*-м підхідним чисельником і* n*-м підхідним знаменником* відповідно.

Розглянемо залишки двовимірного правильного C-дробу (1)

$$Q_r^{(s-r)}(z_1,z_2)=\Phi_r^{(s-r)}(z_1,z_2)+\underset{j=1}{\overset{s-r}{\mathrm{D}}}\frac{a_{r+j,r+j}z_1z_2}{\Phi_{r+j}^{(s-r-j)}},$$

$$Q_s^{(0)}=\Phi_s^{(0)}=1,\qquad 0\le r\le s-1,$$

$$Q_{r+k,r}^{(s-r)}(z_1)=1+\underset{j=k}{\overset{s-r-1}{\mathrm{D}}}\frac{a_{r+j+1,r}z_1}{1},\qquad Q_{r,r+k}^{(s-r)}(z_2)=1+\underset{j=k}{\overset{s-r-1}{\mathrm{D}}}\frac{a_{r,r+j+1}z_2}{1},$$

$$1\le k\le s-r-1.$$

Для них виконуються рекурентні співвідношення

$$Q_r^{(s-r)}(z_1,z_2)=\Phi_r^{(s-r)}(z_1,z_2)+\frac{a_{r+1,r+1}z_1z_2}{Q_{r+1}^{(s-r-1)}(z_1,z_2)},$$

$$Q_{r+k,r}^{(s-r)}(z_1)=1+\frac{a_{r+k+1,r}z_1}{Q_{r+k+1,r}^{(s-r)}(z_1)},\qquad Q_{r,r+k}^{(s-r)}(z_2)=1+\frac{a_{r,r+k+1}z_2}{Q_{r,r+k+1}^{(s-r)}(z_2)},$$

$$s\ge 1,\qquad 1\le k\le s-r-1,\qquad 0\le r\le s-1. \tag{5}$$

Для різниці між n-м і m-м наближеннями $(m>n)$ двовимірного правильного C-дробу (1) справджується формула [5]

$$f_m-f_n=\Phi_0^{(m)}-\Phi_0^{(n)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}(\Phi_i^{(n-i)}-\Phi_i^{(m-i)})\prod_{j=1}^{i}a_{j,j}(z_1z_2)^j}{\prod_{j=0}^{i}Q_j^{(n-j)}Q_j^{(m-j)}}+$$

$$+\frac{(-1)^n\prod_{j=1}^{n+1}a_{j,j}(z_1z_2)^j}{\prod_{j=1}^{n+1}Q_j^{(m-j)}\prod_{j=1}^{n}Q_j^{(n-j)}}, \tag{6}$$

причому різниця $\Phi_i^{(m-i)}-\Phi_i^{(n-i)}$ матиме вигляд

$$\Phi_i^{(m-i)}-\Phi_i^{(n-i)}=\frac{(-1)^{n+1-i}\prod_{k=1}^{n+1-i}a_{i+k,i}(z_1)^k}{\prod_{k=1}^{n+1-i}Q_{i+k,i}^{(m-i)}\prod_{k=1}^{n-i}Q_{i+k,i}^{(n-i)}}+\frac{(-1)^{n+1-i}\prod_{k=1}^{n+1-i}a_{i,i+k}(z_2)^k}{\prod_{k=1}^{n+1-i}Q_{i,i+k}^{(m-i)}\prod_{k=1}^{n-i}Q_{i,i+k}^{(n-i)}},$$

$$i=0,1,\ldots,n.$$

Сформулюємо *принцип відповідності* [5].

Позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх формальних кратних степеневих рядів (ФКСР) вигляду

$$P(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty}c_kz^k=\sum_{\nu=0}^{\infty}Q_\nu(z),$$

де c_k – комплексні числа, $z=(z_1,\ldots,z_m)\in\mathbb{C}^m$, $k=(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}_+^m$, $|k|=k_1+\ldots+k_m$, $z^k=z_1^{k_1}\ldots z_m^{k_m}$, $Q_\nu(z)$ – однорідні многочлени степеня ν. Множина $\mathcal{P}$ утворює кільце з одиницею відносно операцій додавання і множення рядів. Означимо відображення $\lambda:\mathcal{P}\to\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$:

$$\lambda(P)=\begin{cases}\infty, & \mathcal{P}\equiv 0,\\ s, & \mathcal{P}\ne 0,\end{cases}$$

де s – найменший степінь однорідного многочлена, для якого $c_k\ne 0$, тобто $s=|k|$.

Неважко переконатися, що відображення λ має такі властивості: для довільних $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ виконуються співвідношення

1°) $\lambda(P_1 P_2) = \lambda(P_1) + \lambda(P_2)$;

2°) $\lambda(P_1 \pm P_2) \ge \min\{\lambda(P_1), \lambda(P_2)\}$;

3°) $\lambda(P_1 \pm P_2) = \min\{\lambda(P_1), \lambda(P_2)\}, \qquad \lambda(P_1) \ne \lambda(P_2)$.

Нехай $\{H_n(z)\}$ – послідовність функцій, голоморфних у початку координат. Послідовність голоморфних в початку координат функцій $\{H_n(z)\}$ є *відповідною* до деякого ФКСР $P(z)$ в точці $z = (0, \ldots, 0)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(P - T(H_n)) = \infty,$$

де $T(H_n)$ – розвинення функції $H_n(z)$ у ряд Тейлора в точці $z = (0, \ldots, 0)$.

Якщо послідовність $\{H_n(z)\}$ є відповідною до деякого ФКСР $P(z)$, то порядок відповідності ν_n означуємо так: $\nu_n = \lambda(P - T(H_n))$. Це означає, що розвинення $H_n(z)$ у формальний кратний степеневий ряд збігається з $P(z)$ для всіх однорідних многочленів включно до степеня $\nu_n - 1$.

Розглянемо послідовність раціональних функцій

$$\mathcal{R}_n(z) = \frac{P_m(z)}{Q_\ell(z)}, \qquad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

де $P_m(z)$, $Q_\ell(z)$ – многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня $m = m(n)$ і $\ell = \ell(n)$ відповідно. Побудуємо розвинення функції $\mathcal{R}_n(z)$ у формальний подвійний степеневий ряд (ФПСР) в околі точки $O = (0,0)$. Для цього необхідно та достатньо, щоб знаменник $Q_\ell(O)$ був відмінний від нуля. Позначимо, як і раніше, через $T(\mathcal{R}_n)$ розвинення функції $\mathcal{R}_n(z)$ в ряд Тейлора в точці $z = (0,0)$. Послідовність $\{\mathcal{R}_n(z)\}$ є відповідною до ФПСР

$$P(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k, \quad k = (k_1, k_2), \quad |k| = k_1 + k_2, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

в точці $z = (0,0)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P - T(\mathcal{R}_n(z))) = \infty$.

Двовимірний неперервний дріб (1) (або (2)) називають *відповідним* до ФПСР $P(z)$, якщо послідовність його наближень (3) (або (4)) є відповідною до ФПСР $P(z)$ в точці $z = (0,0)$. Порядок відповідності ν_n для наближення $f_n(z)$ визначається формулою $\nu_n = \lambda(P - T(f_n(z)))$.

2. Основні результати. Дослідимо властивості двовимірного правильного C-дробу (1).

Теорема 1. *Для двовимірного правильного C-дробу* (1) *існує єдиний формальний подвійний степеневий ряд*

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{i,j} z_1^i z_2^j, \qquad c_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad i \ge 0, \quad j \ge 0, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \tag{7}$$

до якого цей двовимірний правильний C-дріб буде відповідним з порядком відповідності $\nu_n = n + 1$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи (5), підхідний дріб n-го порядку для двовимірного правильного C-дробу (1) можна записати як $Q_0^{(n)}(z_1, z_2)$.

Оскільки $Q_r^{(n-r)}(0,0)=1$ для довільного індексу r, $0 \le r \le n$, $n \ge 1$, і $Q_{r+k,r}^{(n-r)}(0) = 1$, $Q_{r,r+k}^{(n-r)}(0) = 1$ для довільного індексу k, $1 \le k \le n-r-1$, то дріб $Q_0^{(n)}(z_1,z_2)$ формально розвивається у подвійний степеневий ряд вигляду

$$\sum_{i+j=0}^{\infty} c_{i,j}^{(n)} z_1^i z_2^j, \qquad c_{i,j}^{(n)} \in \mathbb{R}, \quad i \ge 0, \quad j \ge 0, \quad (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2,$$

а дроби $1/Q_{r+k,r}^{(n-r)}$, $1/Q_{r,r+k}^{(n-r)}$ − відповідно у степеневі ряди вигляду

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,0}^{(n,r)} z_1^i, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} c_{0,i}^{(r,n)} z_2^i, \qquad c_{0,0}^{(n,r)} = c_{0,0}^{(r,n)} = 1.$$

Нехай для кожного n, $n \ge 1$, ряд $\sum\limits_{i+j=0}^{\infty} c_{i,j}^{(n)} z_1^i z_2^j$ є формальним розвиненням підхідного дробу $f_n = P_n/Q_n = Q_n^{(0)}(z_1,z_2)$ двовимірного правильного C-дробу. Скористаємось формулою різниці (6) для двох наближень (підхідних дробів) двовимірного правильного C-дробу (1).

З формули різниці в деякому околі початку координат відразу отримаємо

$$f_m(z_1,z_2) - f_n(z_1,z_2) = \sum_{i+j=n+1}^{\infty} (c_{i,j}^{(m)} - c_{i,j}^{(n)}) z_1^i z_2^j, \qquad m > n.$$

Отже, для кожного m, $m > n$, і для довільних i, j, $0 \le i+j \le n$, $i \ge 0$, $j \ge 0$, виконується рівність $c_{i,j}^{(m)} = c_{i,j}^{(n)}$. Двовимірний правильний C-дріб (1) є відповідним до формального подвійного степеневого ряду ФПСР

$$P(z_1,z_2) = \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{i,j}^{(i+j+1)} z_1^i z_2^j,$$

оскільки

$$P(z_1,z_2) - f_n(z_1,z_2) = \sum_{i+j=n+1}^{\infty} (c_{i,j}^{(i+j+1)} - c_{i,j}^{(n)}) z_1^i z_2^j.$$

Єдиність випливає з однозначного визначення коефіцієнтів розвинення n-го наближення $f_n(z_1,z_2)$ двовимірного правильного C-дробу (1) у ФПСР.

Теорему доведено. ♦

Теорема 2. *Нехай двовимірний правильний C-дріб (1) рівномірно збігається в деякій обмеженій області $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ до голоморфної функції $f(z)$, $z \in \mathcal{D}$.*

Тоді відповідний до двовимірного правильного C-дробу формальний подвійний степеневий ряд

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k=(k_1,k_2), \quad |k| = k_1+k_2, \quad z=(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{8}$$

збігається в $\mathcal{D}$ також до функції $f(z)$.

Д о в е д е н н я. Позначимо $T(z) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k$, а через $T_N(z) = \sum\limits_{|k|=0}^{N} c_k z^k$ − частинну суму ФПСР (8) $T(z)$, а розвинення N-го наближення двовимірного правильного C-дробу у подвійний степеневий ряд − через

$$T(f_N(z)) = f_N(z) = \sum_{|k|=0}^{N} \gamma_k^{(N)} z^k,$$

де

$$\gamma_k^{(N)} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f_N(\xi)\, d\xi}{\xi^{k+1}},$$

$\Gamma = \{z : |z_i| = c,\ i = 1,2\}$ – край полікруга $K = \{z : |z_i| < c,\ i = 1,2\}$, $K \subset \mathcal{D}$.

Покажемо, що $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{z\in K} |f(z) - T_N(z)| = 0$, де $f(z) = \lim\limits_{N\to\infty} \{f_N(z)\}$, для довільного $z \in K \subset \mathcal{D}$.

Розглянемо

$$|f(z) - T_N(z)| = |f(z) - f_N(z) + f_N(z) - T_N(z)| \le$$
$$\le |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - T_N(z)|.$$

Оскільки послідовність $\{f_N(z)\}$ рівномірно збігається до голоморфної функції $f(z)$ на компактній підмножині K області $\mathcal{D}$, то для довільного додатного ε знайдеться такий номер $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $N > n_0$ і для довільного $z \in K$ виконується $|f(z) - f_N(z)| < \varepsilon/2$.

Покажемо, що послідовність $\{f_N(z) - T_N(z)\} \to 0$ при $N \to \infty$, $z \in K$. Скористаємось принципом відповідності. Дослідимо відповідність $T_N(z)$ і $T(f_N(z))$. Використаємо властивості відображення λ:

$$\tau_N = \lambda(T_N(z) - T(f_N(z))) = \lambda(T_N(z) - T(z) + T(z) - T(f_N(z))) \ge$$
$$\ge \min\{N+1, \lambda(T(z) - T(f_N(z)))\}.$$

Звідси маємо $\lim\limits_{N\to\infty} \tau_N = \infty$ і для кожного k, $|k| > 0$, існує натуральне число ℓ_k таке, що $c_k = \gamma_k^{(\ell)}$ для довільного $\ell \ge \ell_k$. Нехай існує таке додатне число $\eta^* > 0$, що полікруг $K_1 = \{z : |z_i| \le \eta^*,\ i = 1,2\}$ із краєм $\Gamma_1 = \{z : |z_i| = \eta^*,\ i = 1,2\}$ належить області $\mathcal{D}$. Оскільки послідовність $\{f_N(z)\}$ рівномірно збігається до голоморфної функції $f(z)$ на компактній підмножині K_1 області $\mathcal{D}$, то існують такі додатні сталі M, $B(K_1)$, що $\sup\limits_{z\in K_1} |f_N(z)| \le M$ для довільного $N \ge B(K_1)$. Тепер оцінимо коефіцієнти c_k:

$$|c_k| = |\gamma_k^{(\ell)}| = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left| \oint\limits_{\Gamma} \frac{f_\ell(\xi)\, d\xi}{\xi^{k+1}} \right| \le \frac{M}{(\eta^*)^k}$$

для довільного $\ell > \max\{\ell_k : 0 < |k| \le N\}$.

Покажемо, що послідовність $\{T_N(z)\}$ рівномірно обмежена на деякому компакті $K_2 \subset K_1$, $K_2 = \{z : |z_i| \le \frac{\eta^*}{2},\ i = 1,2\}$:

$$|T_N(z)| \le M \sum_{|k|=0}^{N} |c_k z^k| = M \sum_{|k|=0}^{N} |\gamma_k^{(\ell)} z^k| \le M \sum_{|k|=0}^{N} \left| \frac{z}{\eta^*} \right|^k \le M \sum_{r=0}^{N} \frac{(r+1)^2}{2^r}.$$

Ряд $\sum\limits_{r=0}^{N} \frac{(r+1)^2}{2^r}$ збіжний за ознакою Даламбера, тому послідовність $\{T_N(z)\}$ рівномірно обмежена на K_2.

Розглянувши відповідність $\tau_N = \lambda(T_N(z) - T(f_N(z)))$ і врахувавши оцінки для коефіцієнтів c_k та $\gamma_k^{(N)}$, для довільних $z \in K_2$ матимемо оцінку

$$\left|T_N(z)-f_N(z)\right| \le \sum_{|k|=\tau_N}^{\infty}\left|(c_k-\gamma_k^{(N)})z^k\right| \le 2M\sum_{r=\tau_N}^{N}\frac{(r+1)^2}{2^r}.$$

Оскільки $\lim\limits_{N\to\infty}\tau_N=\infty$, то послідовність $\{T_N(z)\}$ рівномірно збігається до $f_N(z)$ для довільного $z\in K_2$, а тому для довільного додатного ε знайдеться такий номер $n_1(\varepsilon)$, що для всіх $N>n_1$ і для довільного $z\in K_2$ виконується $\left|T_N(z)-f_N(z)\right|<\varepsilon/2$.

Отже, для довільного додатного ε знайдеться такий номер $N_1(\varepsilon)= =\max\{n_0,n_1\}$, що для всіх $N_2>N_1$ і для довільного $z\in K_2$ виконується $\left|T_N(z)-f(z)\right|<\varepsilon$.

Теорему доведено. ♦

Сформулюємо і доведемо теорему про рівномірну збіжність для двовимірного правильного неперервного C-дробу, використовуючи схему доведення теореми з роботи [3].

Теорема 3. *Двовимірний правильний C-дріб (1) з дійсними числовими коефіцієнтами $a_{i,j}$ рівномірно збіжний в кожній обмеженій області з $\mathbb{R}^2$, якщо:*

(***i***) *існує така константа β, $0\le\beta<1/8$, що*

$$a_{i+j,i}x+\beta>0,\qquad a_{i,i+j}y+\beta>0,\qquad a_{i,i}xy+\beta>0,$$
$$i=0,1,\ldots,\quad j=1,2,\ldots; \tag{9}$$

(***ii***) *коефіцієнти $a_{i+1,i}$, $a_{i,i+1}$ мають не вище як поліноміальний ріст при $i\to\infty$, тобто знайдеться таке натуральне число p, що*

$$\lim_{i\to\infty} i^{-p}\max\{\left|a_{i+1,i}\right|,\left|a_{i,i+1}\right|\}=0;$$

(***iii***) *для довільного i, $i=0,1,\ldots$, ряди $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\pi_n(i)$, де*

$$\frac{1}{\pi_n(i)}=\max\{\left|a_{n+i,i}\right|,\left|a_{i,i+n}\right|,\left|a_{nn}\right|\},$$

є розбіжними, причому їх частинні суми $\sum\limits_{n=2}^{k}\pi_n(i)$ для кожного i прямують до нескінченності при $k\to\infty$ не повільніше ніж $(\ln k)^{1+\varepsilon}$, де $\varepsilon>0$ – довільне дійсне як завгодно мале число.

Д о в е д е н н я. Запишемо формулу різниці (6) для двовимірного правильного C-дробу (1):

$$f_n-f_m=\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i(\Phi_i^{(m-i)}-\Phi_i^{(n-i)})(xy)^i\prod\limits_{j=1}^{i}a_{j,j}}{\prod\limits_{j=1}^{i}Q_j^{(n-j)}Q_j^{(m-j)}}+\frac{(-1)^m(xy)^{m+1}\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{j,j}}{\prod\limits_{j=1}^{m}Q_j^{(m-j)}\prod\limits_{j=1}^{m+1}Q_j^{(n-j)}}, \tag{10}$$

та оцінимо залишки двовимірного правильного C-дробу (1). Переконаємося, що всі вони відмінні від нуля. Використовуючи умови (9) теореми та властивості періодичного неперервного дробу, отримаємо

$$\Phi_i^{(k)}(x,y)\ge 1-\cfrac{2\beta}{1-\cfrac{\beta}{1-\cfrac{\beta}{1-\ddots}}}=\sqrt{1-4\beta}\ne 0,\quad i=0,1,\ldots,\quad k=1,2,\ldots. \tag{11}$$

Виконавши еквівалентні перетворення і враховуючи (11), залишок $Q_i^{(s-i)}(x,y)$ зведемо до вигляду

$$Q_i^{(s-i)}(x,y) = \Phi_i^{(s-i)}(x,y) + \mathop{D}_{j=i+1}^{s} \frac{a_{j,j}xy}{\Phi_j^{(s-j)}(x,y)} =$$

$$= \Phi_i^{(s-i)}(x,y)\left(1 + \mathop{D}_{j=i+1}^{s} \frac{a_j(x,y)}{1}\right), \tag{12}$$

де

$$a_j(x,y) = \Phi_j^{(s-j)}(x,y)\frac{a_{j,j}xy}{\Phi_{j-1}^{(s-j+1)}(x,y)}, \quad j = i+1,\, i+2, \ldots, s\,.$$

Тоді з умов (9) і оцінки (11) маємо нерівність $a_j(x,y) \ge -\beta(1-4\beta)^{-1}$. Оскільки $\alpha = \beta(1-4\beta)^{-1} < 1/4$, то

$$\left|Q_i^{(s-i)}(x,y)\right| \ge \sqrt{1-4\beta}\left(1 - \cfrac{\alpha}{1 - \cfrac{\alpha}{1 - \cfrac{\alpha}{1 - \ddots}}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4\beta} + \sqrt{1-8\beta}\right) \ne 0\,. \tag{13}$$

Отже, $Q_i^{(s-i)}(x,y) \ne 0$.

Оцінимо зверху вирази $\left|\Phi_i^{(m-i)} - \Phi_i^{(n-i)}\right|$:

$$\Phi_i^{(m-i)} - \Phi_i^{(n-i)} =$$

$$= \frac{(-1)^{m-i+1}x^{m-i+1}\prod\limits_{k=1}^{m-i+1} a_{i+k,i}}{\prod\limits_{k=1}^{m-i} Q_{i+k,i}^{(m-i)} \prod\limits_{k=1}^{m-i+1} Q_{i+k,i}^{(n-i)}} + \frac{(-1)^{m-i+1}y^{m-i+1}\prod\limits_{k=1}^{m-i+1} a_{i,i+k}}{\prod\limits_{k=1}^{m-1} Q_{i,i+k}^{(m-i)} \prod\limits_{k=1}^{m-i+1} Q_{i,i+k}^{(n-i)}} \tag{14}$$

з одновимірними залишками

$$Q_{i+k,i}^{(s-i)} = 1 + \frac{a_{i+k+1,i}x}{Q_{i+k+1,i}^{(s-i)}}, \qquad Q_{i,i+k}^{(s-i)} = 1 + \frac{a_{i,i+k+1}y}{Q_{i,i+k+1}^{(s-i)}},$$

що задовольняють початкові умови $Q_{s,i}^{(s-i)} = 1$; $Q_{i,s}^{(s-i)} = 1$, $s = m, n$.

Введемо позначення

$$\nu_{i+j,i} = \frac{1}{\left|xa_{i+j,i}\right|}, \qquad \nu_{i,i+j} = \frac{1}{\left|ya_{i,i+j}\right|}, \qquad \nu_{j,j} = \frac{1}{\left|xya_{j,j}\right|}, \tag{15}$$

якщо $xa_{i+j,i} \ne 0$, $ya_{i,i+j} \ne 0$, $xya_{j,j} \ne 0$, $x = 0,1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,m$.

Тоді справджуються оцінки

$$\left|\frac{a_{i+j,i}x}{Q_{i+j,i}^{(s-i)}Q_{i+j-1,i}^{(s-i)}}\right| \le \frac{L}{L+\nu_{i+j,i}}, \qquad \left|\frac{a_{i,i+j}y}{Q_{i,i+j}^{(s-i)}Q_{i,i+j-1}^{(s-i)}}\right| \le \frac{L}{L+\nu_{i,i+j}}, \tag{16}$$

де $L = \dfrac{2}{1-4\beta+\sqrt{1-4\beta}}$.

Дійсно, оскільки

$$\frac{1}{\left|Q_{i+j,i}^{(s-i)}\right|} \le \frac{1}{1+\sqrt{1-4\beta}}, \qquad \left|1 + \frac{a_{i+j,i}x}{Q_{i+j,i}^{(s-i)}}\right| - \left|\frac{a_{i+j,i}x}{Q_{i+j,i}^{(s-i)}}\right| \ge \sqrt{1-4\beta}\,,$$

то перша з нерівностей (16) еквівалентна нерівності

$$\nu_{i+j,i}\left|\frac{a_{i+j,i}x}{Q_{i+j,i}^{(s-i)}}\right| \le L\left(\left|1 + \frac{a_{i+j,i}x}{Q_{i+j,i}^{(s-i)}}\right| - \left|\frac{a_{i+j,i}x}{Q_{i+j,i}^{(s-i)}}\right|\right). \tag{17}$$

Другу з нерівностей (16) доводимо аналогічно.

Використовуючи (14) та умови теореми, отримуємо

$$\left|\Phi_i^{(m-i)}-\Phi_i^{(n-i)}\right| \le \frac{1}{1+\sqrt{1-4\beta}}\left(\left|a_{i+1,i}x\right|\prod_{j=2}^{m-i+1}\frac{L}{L+\nu_{i+j,i}}+\right.$$

$$\left.+\left|a_{i,i+1}y\right|\prod_{j=2}^{m-i+1}\frac{L}{L+\nu_{i,i+j}}\right). \qquad (18)$$

Аналогічно переконуємося в правильності нерівності

$$\left|\frac{a_{j,j}xy}{Q_j^{(s-j)}Q_{j-1}^{(s-j+1)}}\right| \le \frac{L^*}{L^*+\nu_{j,j}}, \qquad j=2,3,\ldots,m\,, \qquad (19)$$

де $L^* = \dfrac{2}{1-8\beta+\sqrt{(1-8\beta)(1-4\beta)}}$.

Для доведення нерівності (19) використовуємо (11)–(13) і таку нерівність:

$$\left|\Phi_{j-1}^{(s-j+1)}+\frac{a_{j,j}xy}{Q_j^{(s-j)}}\right|-\left|\frac{a_{j,j}xy}{Q_j^{(s-j)}}\right| \ge \left|\Phi_{j-1}^{(s-j+1)}\right|\left(1-2\mathop{\mathrm{D}}_{k=j}^{s}\frac{\left|\dfrac{a_{k,k}xy}{\Phi_{k-1}^{(s-k+1)}\Phi_k^{(s-k)}}\right|}{1}\right) \ge$$

$$\ge \sqrt{1-4\beta}\left(1-\cfrac{2\alpha}{1-\cfrac{\alpha}{1-\cfrac{\alpha}{1-\ddots}}}\right)=\sqrt{1-4\beta}\sqrt{1-4\alpha}=\sqrt{1-8\beta}\,,$$

де $\alpha = \dfrac{\beta}{1-4\beta}$.

Двовимірний правильний C-дріб розглядаємо в обмеженій області. Тому існує додатне дійсне число M таке, що $|x|\le M$, $|y|\le M$. Нехай $M_i = \max\left\{\left|a_{i+1,i}\right|, \left|a_{i,i+1}\right|\right\}$, тоді з урахуванням (10), (18) і (19) оцінимо $|f_n - f_m|$:

$$|f_n-f_m| \le \frac{8M^3\left|a_{1,1}\right|}{(1+\sqrt{1-4\beta})(\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta})^2}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{m}M_i\prod_{j=2}^{i}\frac{L^*}{L^*+\nu_{j,j}}\left(\prod_{j=2}^{m-i+1}\frac{L}{L+\nu_{i+j,i}}+\prod_{j=2}^{m-i+1}\frac{L}{L+\nu_{i,i+j}}\right)+$$

$$+\frac{2M^2\left|a_{1,1}\right|}{\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta}}\prod_{j=2}^{m+1}\frac{L^*}{L^*+\nu_{j,j}}. \qquad (20)$$

Оскільки

$$\prod_{j=2}^{m+1}\frac{L^*}{L^*+\nu_{j,j}} \le \exp\left(-\sum_{j=2}^{m+1}\frac{\nu_{j,j}}{L^*}\right) \le \exp\left(-\frac{1}{L^*\cdot M^2}\sum_{j=2}^{m+1}\frac{1}{\left|a_{j,j}\right|}\right)$$

і ряд $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\left|a_{j,j}\right|}$ розбіжний за умовою теореми, то останній доданок в (20) прямує до нуля при $m\to\infty$.

З умови (***ii***) теореми випливає, що $M_i \le A_1 m^p$, $i=0,1,\ldots,m$, де A_1 – стала, що не залежить від i.

Нехай, далі, $A=\min\left\{\dfrac{1}{L^*\cdot M^2},\dfrac{1}{L\cdot M}\right\}$ і γ_m – останній доданок в (20). Тоді оцінка (20) набуде вигляду

$$|f_n - f_m| \le A_2 \sum_{i=0}^{m} m^p \exp\left(-A \sum_{j=2}^{\left[\frac{m+1}{3}\right]} \pi_j(i) \right) + \gamma_m \le$$

$$\le A_3 \left(\left[\frac{m+1}{3} \right] \right)^{p+1} \exp\left(-A \left(\ln \left[\frac{m+1}{3} \right] \right)^{1+\varepsilon} \right) + \gamma_m ,$$

A_2, A_3 − постійні.

Отже, $|f_n - f_m| \to 0$ при $m \to \infty$.

Теорему доведено. ♦

3. Висновки. Методику доведення цих теорем можна перенести на дослідження збіжності двовимірних неперервних дробів різних типів.

1. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про одну ознаку фігурної збіжності двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2009. − **52,** № 2. − С. 28−35.
   Те саме: *Antonova T. M., Sus' O. M.* On one criterion for the figured convergence of two-dimensional continued fractions with complex elements // J. Math. Sci. − 2010. − **170**, No. 5. − P. 594−603.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. − Киев: Наук. думка, 1986. − 176 с.
3. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функции двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь // Мат. методы и физ.-мех. поля. − 1980. − Вып. 11. − С. 3−6.
4. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. − 1978. − № 7. − С. 614−618.
5. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. − Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. − 218 с.
6. *Сусь О. М.* Деякі питання аналітичної теорії двовимірних ланцюгових дробів: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. − Львів, 1996. − 123 с.
7. *Cuyt A., Brevik Petersen V., Waadeland H., Jones W. B.* Handbook of continued fractions for special functions. − New York: Springer, 2008. − 431 p.
8. *Cuyt A., Verdonk B.* Multivariate reciprocal differences for branched Thiele continued fraction expansion // J. Comput. Appl. Math. − 1988. − **21.** − P. 145−160.
9. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comput. Appl. Math. − 1978. − **4**, No. 3. − P. 181−190.

ДВУМЕРНЫЕ ПРАВИЛЬНЫЕ *С*-ДРОБИ

Рассматривается один из типов функциональных двумерных непрерывных дробей, соответствующих формальному двойному степенному ряду. С использованием оценки остатков двумерной непрерывной дроби, формулы разности между двумя приближениями двумерной непрерывной дроби в терминах этих остатков и принципа соответствия исследуются свойства таких дробей.

TWO-DIMENSIONAL REGULAR *C*-FRACTIONS

One of the types of functional two-dimensional continued fractions corresponding to the formal double power series is considered. Using bounds for a two-dimensional continued fraction tails, a difference formula between two approximants of the two-dimensional continued fraction in terms of its tails, and the principle of correspondence properties of such fractions are investigating.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.03.12