

**МЕХАНИЗМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ
СОСТАВНОГО ПЛОСКОГО КРУГОВОГО ДИСКА**

Предложен способ исследования методом малого параметра механизма потери устойчивости вращающегося составного плоского кругового диска. Получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно найдены значения критической угловой скорости вращения при различных параметрах диска.

Введение. Приближенный аналитический метод малого параметра [7], имеющий определенную аналогию с одним из вариантов эффективного в целом ряде задач механики сплошных сред [2] метода возмущения формы границы [3], нашел применение в работе [10] о неустойчивости [13] простейших упругих [8] радиально неоднородных быстро вращающихся сплошных дисков [1, 17, 18]. Полученные здесь в первом приближении решения позволяют рассчитать характерные критические величины (радиус пластической зоны [4–6, 9–12, 14, 16] и угловую скорость вращения), сопровождающие переход двухсекционного плоского кругового диска, неоднородного по материалу, в одно из неустойчивых состояний: приобретение новой плоской эксцентричной формы с пластическим состоянием в центре исследуемого диска или приобретение самоуравновешенной плоской формы с центральной пластической круговой зоной либо кольцевой пластической зоной, примыкающей к границе раздела секций диска, или совокупностью двух указанных пластических зон. Открытой проблемой остается выяснение конкретного механизма развития неустойчивости диска, геометрические и физические параметры которого известны. В связи с этим не менее актуальной является и задача установления контрольных (бифуркационных) значений изменяемого управляющего параметра – точек качественного изменения сверхскоростной динамики вращающихся дисков с учетом их упругопластических свойств.

Целью данной работы является обоснованное построение общей схемы исследования сценариев неустойчивости вращающегося составного диска и определение соответствующих исходной конфигурации параметров данной механической системы критических величин. Предложенный алгоритм апробирован на конкретных числовых примерах в п. 4.

1. Постановка задачи. Объектом исследования является быстро вращающийся составной плоский круговой диск \mathcal{D} . Возрастающие с увеличением скорости вращения диска центробежные нагрузки влекут значительное его радиальное растяжение. Это приводит к появлению и значительному росту пластических зон вплоть до критических размеров, при которых диск принимает новую плоскую равновесную форму.

Диск \mathcal{D} выполнен в виде единого целого диска путем жесткого соединения однородного и изотропного сплошного кругового диска \mathcal{D}_1 радиуса a и однородного изотропного кругового кольцевого диска [15] \mathcal{D}_2 с внутренним радиусом a и внешним радиусом b . Предел текучести материала диска \mathcal{D}_1 обозначим через σ_{s1} , модуль упругости – E_1 , плотность – γ_1 , коэффициент Пуассона – ν_1 . Одноименные параметры материала диска \mathcal{D}_2 обозначим соответственно через σ_{s2} , E_2 , γ_2 и ν_2 . Обозначения σ_s , E и ν , употребляемые безотносительно к номеру дисковой секции, будем использовать без указания каких-либо индексов.

Остановимся на эксцентричной (и мало отличающейся от круговой) форме потери устойчивости диска \mathcal{D} , когда уравнение внешней его границы с точностью до бесконечно малых первого порядка представимо в виде

$$r = b + d \cos \theta, \quad d = \text{const},$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos \theta,$$

и самоуравновешенной (также мало отличающейся от круговой) форме потери устойчивости

$$r = b + d \cos n\theta, \quad n \geq 2,$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta,$$

где $\rho = r/b$ – безразмерный текущий радиус; δ – малый параметр; $n \in \mathbb{N}$; θ – полярный угол. Предмет исследований составляет механизм развития неустойчивости. Из результатов работы [10] очевидно, что он может реализоваться по таким сценариям:

- 1°) $\mathcal{D}_{1(e)}\mathcal{D}_{2(e)}$ – эксцентричная форма неустойчивости, развивающаяся при появлении пластического состояния в центре исследуемого диска (рис. 1);
- 2°) $\mathcal{D}_{1(pe)}\mathcal{D}_{2(e)}$ – центральная круговая область радиуса $r_{01*} < a$ диска \mathcal{D}_1 пластическая, а внешняя кольцевая область диска \mathcal{D}_1 и весь диск \mathcal{D}_2 в момент потери устойчивости пребывают в упругом состоянии (рис. 2);
- 3°) $\mathcal{D}_{1(e)}\mathcal{D}_{2(pe)}$ – кольцевая пластическая зона радиуса $r_{02*} > a$ примыкает в \mathcal{D}_2 к окружности $r = a$, а диск \mathcal{D}_1 полностью упругий (рис. 3);
- 4°) $\mathcal{D}_{1(pe)}\mathcal{D}_{2(pe)}$ – две пластические зоны соответствующих радиусов (рис. 4).

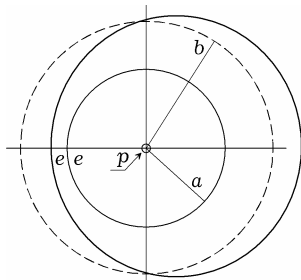


Рис. 1

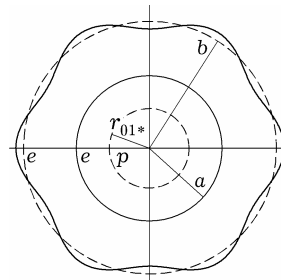


Рис. 2

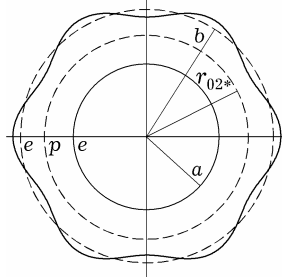


Рис. 3

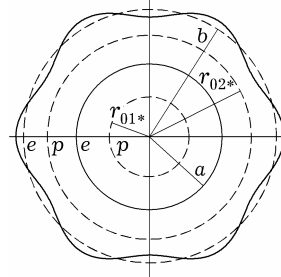


Рис. 4

Постоянную угловую скорость вращения диска \mathcal{D} обозначим через ω , а текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска – r_{01} или/и r_{02} . Считая параметры исследуемого диска заданными, требуется, указав однозначно конкретный механизм перехода \mathcal{D} в неустойчивое состояние (из 1°–4°), определить критический радиус $r_0 = r_{0*}$ пластической зоны и соответствующую величину критической угловой скорости вращения $\omega = \omega_*$.

2. Невозмущенное упругое состояние. При небольших значениях угловой скорости ω объемные силы вызывают умеренное радиальное растяжение вращающегося диска. При этом как \mathcal{D}_1 , так и \mathcal{D}_2 пребывают в упругом состоянии. Определим напряженное состояние, чтобы далее иметь возможность зафиксировать момент появления пластического состояния и установить его локализацию.

В диске \mathcal{D}_1 отнесенные к пределу текучести σ_{s2} касательное и радиальное напряжения имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta} = C_1 - \frac{\sigma_1(3v_1 + 1)}{8\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr} = C_1 - \frac{\sigma_1(v_1 + 3)}{8\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (2)$$

где $\sigma_1 = \gamma_1 b^2 \omega^2$, а постоянная C_1 подлежит определению. Для диска \mathcal{D}_2 аналоги соотношений (1), (2) таковы:

$$\sigma_{\theta\theta} = C_2 \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{\sigma_2(v_2 + 3)}{8\sigma_{s2}} - \frac{\sigma_2(3v_2 + 1)}{8\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = C_2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{\sigma_2(v_2 + 3)}{8\sigma_{s2}} (1 - \rho^2), \quad (4)$$

где $\sigma_2 = \gamma_2 b^2 \omega^2$, а C_2 – неизвестная постоянная. Найти константы C_1 и C_2 можно из условий сопряжения на окружности $\rho = \beta = a/b$: непрерывности радиального усилия (в исследуемом случае плоского диска – радиального напряжения σ_{rr}) и радиального смещения $u = \sigma_s \rho (\sigma_{\theta\theta} - v\sigma_{rr})/E$ (отнесенного к b), т. е. из условий

$$\sigma_{rr}(\beta + 0) = \sigma_{rr}(\beta - 0), \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(\beta + 0) = \varepsilon \sigma_{\theta\theta}(\beta - 0) + k \sigma_{rr}(\beta - 0), \quad (6)$$

где $\varepsilon = E_2/E_1$; $k = v_2 - \varepsilon v_1$. Применив соотношения (5), (6) к зависимостям (1)–(4), из получившейся системы уравнений находим

$$C_1 = \frac{b_1(1 + \beta^2) + b_2(1 - \beta^2)}{1 + \beta^2 + (\varepsilon + k)(1 - \beta^2)}, \quad C_2 = \frac{(b_1(\varepsilon + k) - b_2)\beta^2}{1 + \beta^2 + (\varepsilon + k)(1 - \beta^2)}, \quad (7)$$

где

$$b_1 = \{\sigma_1(v_1 + 3)\beta^2 + \sigma_2(v_2 + 3)(1 - \beta^2)\} / (8\sigma_{s2}),$$

$$b_2 = \{\sigma_1(\varepsilon(3v_1 + 1) + k(v_1 + 3))\beta^2 + \sigma_2(v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta^2)\} / (8\sigma_{s2}).$$

Теперь с учетом (7) на основании (1) и (3) нетрудно получить необходимые в дальнейшем для сравнения с единицей и фиксации момента рождения пластических зон величины

$$T_1 = s^{-1} \sigma_{\theta\theta}(0) = s^{-1} C_1' x', \quad (8)$$

$$T_2 = \sigma_{\theta\theta}(\beta + 0) = (C_2'(1 + \beta^{-2}) + v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta^2) x', \quad (9)$$

где

$$C_1' = \frac{b_1'(1 + \beta^2) + b_2'(1 - \beta^2)}{1 + \beta^2 + (\varepsilon + k)(1 - \beta^2)}, \quad C_2' = \frac{(b_1'(\varepsilon + k) - b_2')\beta^2}{1 + \beta^2 + (\varepsilon + k)(1 - \beta^2)},$$

$$x' = \frac{\omega^2}{8q_2^2}, \quad q_2 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_{s2}}{\gamma_2}}, \quad s = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}},$$

$$b'_1 = \Gamma(v_1 + 3)\beta^2 + (v_2 + 3)(1 - \beta^2), \quad \Gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

$$b'_2 = \Gamma[\varepsilon(3v_1 + 1) + k(v_1 + 3)]\beta^2 + [v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta^2].$$

3. Основной результат. Предположим, что имеем возможность медленно увеличивать скорость вращения диска \mathcal{D} . Вместе с ней будет возрастать переменная x' – квадрат обезразмеренной угловой скорости, $x' = \frac{\omega^2}{8q_2^2}$.

Соответственно будут возрастать и T_1, T_2 . Зафиксировав значение $\omega = \omega_0$, при котором одно из неравенств

$$T_1 < 1, \quad T_2 < 1 \quad (10)$$

превратится в равенство, следующим осуществим шаг, предписанный ветвлением рассматриваемой схемы.

Пусть, к примеру,

$$T_1 = 1. \quad (11)$$

Это означает появление пластического состояния в центре диска \mathcal{D} (рис. 1). Известно [4, 7, 9], прежде всего, что в таком случае ($\beta_{0*} = 0$) может реализоваться механизм 1° потери устойчивости исследуемого диска по эксцентричной форме с

$$\omega_0^2 = \omega_*^2 = -24sq_2^2 \{1 + \beta^2 + (\varepsilon + k)(1 - \beta^2)\} \{m(1 + \beta^2) + \ell(1 - \beta^2)\}^{-1},$$

где

$$\ell = -\{v_2 + 3 + \beta^2[\Gamma[\varepsilon(3v_1 + 1) + k(v_1 + 3)] - (3v_2 + 1)]\},$$

$$m = -3\{v_2 + 3 + \beta^2[\Gamma(v_1 + 3) - (v_2 + 3)]\}.$$

Если действительно произойдет потеря устойчивости таким образом, то критической следует считать скорость ω_0 . Вместе с этим ввиду того, что достижение контрольного значения ω_0 скорости вращения опасно только для дисков с появившимся при изготовлении или насадке на вал эксцентриситетом [4, 5] либо другими, не учтенными в модели факторами, в общем случае сохраняется возможность увеличивать ω до больших цифр. В предлагаемой схеме это целесообразно делать, увеличивая от нулевого значения текущий радиус β_0 пластической зоны $\mathcal{D}_{1(p)}$ и ожидая реализации механизмов 2° (рис. 2) или 4° (рис. 4) самоуравновешенной формы потери устойчивости (см., например, [4, 5]). Для этого, медленно меняя β_0 , следует зафиксировать значение

$$\omega^2 = \omega_1^2 = -24sq_2^2 \{1 + \beta^2 + (\varepsilon + k)(1 - \beta^2)\} \times$$

$$\times \{(1 + \beta^2)[m + \Gamma(3v_1 + 1)(2 - \beta^{-2}\beta_0^2)\beta_0^2] +$$

$$+ (1 - \beta^2)[\ell + \Gamma(3v_1 + 1)\{2(\varepsilon + k) + \beta^{-2}(\varepsilon - k)\beta_0^2\}\beta_0^2]\}^{-1},$$

при достижении которого превратится в тождество характеристическое уравнение

$$\tilde{\Delta}(\beta_0) = 0, \quad (12)$$

в котором $\tilde{\Delta}(\beta_0)$ – определитель матрицы $(a_{ij})_{i,j=1}^4$ с

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 + A_1 d_I^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} / E_2, & a_{12} &= A_1 d_{II}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} / E_2, \\
a_{13} &= A_1 d_{III}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} / E_2, & a_{14} &= A_1 d_{IV}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} / E_2, \\
a_{21} &= n A_2 d_I^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} / E_2, & a_{22} &= n A_2 d_{II}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} / E_2, \\
a_{23} &= 1 + n A_2 d_{III}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} / E_2, & a_{24} &= n A_2 d_{IV}^{**}(\beta, 1) \sigma_{s2} / E_2, \\
a_{31} &= q'_1, & a_{32} &= q'_2, & a_{33} &= q'_3, & a_{34} &= q'_4, \\
a_{41} &= q'_5, & a_{42} &= q'_6, & a_{43} &= q'_7, & a_{44} &= q'_8
\end{aligned}$$

и известными из работы [10] величинами $A_1, A_2, d_I^{**}, \dots, d_{IV}^{**}, q'_1, \dots, q'_8$, либо превратится в равенство

$$T'_2 = 1 \quad (13)$$

неравенство $T'_2 < 1$ с

$$\begin{aligned}
T'_2 &= C'_3(1 + \beta^{-2}) + (v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta^2)x', \\
C'_3 &= \{s + [m + \Gamma(3v_1 + 1)(2 - \beta^{-2}\beta_0^2)\beta_0^2]x' / 3\} \{1 - \beta^{-2}\}^{-1}, \quad x' = \omega_1^2 / (8q_2^2).
\end{aligned}$$

Первый случай, т. е. выполнение тождества $\tilde{\Delta}(\beta_0) \equiv 0$, определяет потерю диском \mathcal{D} устойчивости по сценарию 2° с $\beta_{0*} := \beta_0$ и $\omega_* := \omega_1$. Во втором случае, т. е. при выполнении равенства (13), диск \mathcal{D} теряет устойчивость по сценарию 4° . Остается, медленно увеличивая радиус кольцевой пластической зоны $\mathcal{D}_{2(p)}$, обозначаемый опять через β_0 , $\beta \leq \beta_0 < 1$, зафиксировать то его значение $\beta_{0*} := \beta_0$, которое удовлетворяет уравнению (12) с

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 + A_1 d_I^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} / E_2, & a_{12} &= A_1 d_{II}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} / E_2, \\
a_{13} &= A_1 d_{III}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} / E_2, & a_{14} &= A_1 d_{IV}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} / E_2, \\
a_{21} &= n A_2 d_I^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} / E_2, & a_{22} &= n A_2 d_{II}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} / E_2, \\
a_{23} &= 1 + n A_2 d_{III}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} / E_2, & a_{24} &= n A_2 d_{IV}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} / E_2, \\
a_{31} &= 0, & a_{32} &= 1, & a_{33} &= 0, & a_{34} &= 0, \\
a_{41} &= 0, & a_{42} &= 0, & a_{43} &= 0, & a_{44} &= 1
\end{aligned}$$

(см. [10]) и позволяет найти соответствующие значения критического радиуса пластической зоны $\mathcal{D}_{1(p)}$:

$$\beta_{01*}^2 = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4c_1c_3}}{2c_1},$$

и критической скорости

$$\begin{aligned}
\omega_*^2 &= \omega_2^2 = \{24q_2^2 \Gamma^{-1} [1 - s(\varepsilon + k)]\} \times \\
&\quad \times \{(3v_1 + 1)[2(\varepsilon + k) + (\varepsilon - k)\beta^{-2}\beta_{01*}^2] \beta_{01*}^2 - \\
&\quad - 3\beta^2 [\varepsilon(3v_1 + 1) + k(v_1 + 3)]\}^{-1},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\beta^2 \Gamma (3\nu_1 + 1) \{ [1 - 2\varepsilon s + \varepsilon - k](1 + \beta_0^2) - 2(\varepsilon - k)\beta^{-1}\beta_0 \}, \\
c_2 &= 2\Gamma (3\nu_1 + 1) \{ [1 - (\varepsilon + k)](1 + \beta_0^2) + 2(\varepsilon + k)\beta^{-1}\beta_0 \}, \\
c_3 &= 3\beta^2 \Gamma [\varepsilon(3\nu_1 + 1) + k(\nu_1 + 3)] \{ (1 - s)(1 + \beta_0^2) - 2\beta^{-1}\beta_0 \} + \\
&\quad + [1 - s(\varepsilon + k)] \{ \beta^2 (8 - 3\Gamma(\nu_1 + 3))(1 + \beta_0^2) - \\
&\quad - 2\beta^{-1}\beta_0 [3(\nu_2 + 3) - (3\nu_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2] \}.
\end{aligned}$$

Третий (особый) случай развития неустойчивости предоставляется тогда, когда ни одно из условий (12), (13) не выполнено, и диск \mathcal{D}_1 переходит полностью в пластическое состояние. Ввиду различной пластичности материалов секций \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 и имеющегося разрыва касательного напряжения величины β_0 и ω в некотором диапазоне угловой скорости остаются независимыми. Дальнейшее увеличение скорости вращения не обязательно влечет за собой появление пластического состояния вдоль окружности $\rho = \beta$ в \mathcal{D}_2 , но изменяет при этом значения

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2C_3'' - 2(\nu_2 + 3)x', \\
A_2 &= A_1 + 8x', \\
C_3'' &= \{ s - [8\beta^2 \Gamma + 3(\nu_2 + 3)(1 - \beta^2)]x'/3 \} \{ 1 - \beta^{-2} \}^{-1}
\end{aligned}$$

коэффициентов характеристического уравнения [10].

Если характеристическое уравнение превратится в тождество $\tilde{\Delta}(\beta_0) \equiv 0$ еще до выполнения условия

$$T_2'' = C_3''(1 + \beta^{-2}) + (\nu_2 + 3 - (3\nu_2 + 1)\beta^2)x' = 1, \quad (14)$$

будем говорить об особом случае **01°**: $\mathcal{D}_{1(p)}\mathcal{D}_{2(e)}$ – потери устойчивости с соответствующим критическим значением $\omega_* := \omega_3$ угловой скорости и критическим значением $\beta_{0*} := \beta$ радиуса пластической зоны (рис. 5).

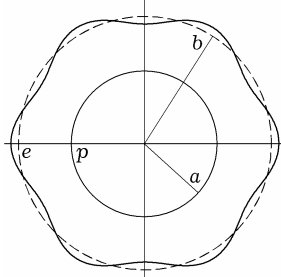


Рис. 5

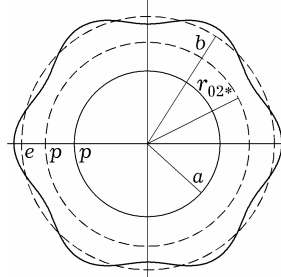


Рис. 6

И, наоборот, если при достижении скорости вращения ω_3 неравенство $T_2'' < 1$ превратится в равенство (14), потеря устойчивости исследуемого диска \mathcal{D} произойдет по сценарию **02°**: $\mathcal{D}_{1(p)}\mathcal{D}_{2(pe)}$ (рис. 6). В этом особом случае в характеристическом уравнении $\tilde{\Delta}(\beta_0) = 0$, $\beta_0 > \beta$, имеем

$$C_3'' = \{ 1 - [\nu_2 + 3 - (3\nu_2 + 1)\beta_0^2]x' \} \{ 1 + \beta_0^{-2} \}^{-1},$$

$$\omega_*^2 = \omega_4^2 = 24q_2^2 \{2 + \beta\beta_0^{-1}(s-1)(1 + \beta_0^2)\} \{3[v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta_0^2](1 - \beta_0^2) + [3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)\beta_0^2 + 8\beta^3\beta_0^{-1}(\Gamma - 1)](1 + \beta_0^2)\}^{-1}$$

при $\beta_{01*} := \beta$ и $\beta_{0*} := \beta_0$.

Пусть теперь

$$T_2 = 1 \quad (15)$$

(см. (9), (10)). Это означает появление пластического состояния вдоль окружности $\rho = \beta$ в кольцевой области \mathcal{D}_2 . В таком случае следует ожидать самоуравновешенной формы потери устойчивости 3° (рис. 3) или 4° (рис. 4). Сценарий 3° будет реализован в том случае, когда при возрастании радиуса β_0 пластической зоны $\mathcal{D}_{2(p)}$ первым превратится в тождество соответствующее характеристическое уравнение (12) $\tilde{\Delta}(\beta_0) = 0$ [10]. При этом $\beta_{0*} := \beta_0$ и

$$\omega_*^2 = \omega_5^2 = 24q_2^2 \{\varepsilon + k + \beta(1 - (\varepsilon + k))(1 + \beta_0^2)\beta_0^{-1}/2\} \{(\varepsilon + k)[3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2] - \beta^3[4(\varepsilon + k) - 3\Gamma\varepsilon(1 - v_1)](1 + \beta_0^2)\beta_0^{-1}\}^{-1}.$$

Если же при очередном возросшем значении β_0 выполнено условие, следующее за соотношением (13), устойчивость диска будет потеряна по сценарию 4° при соответствующих значениях β_{0*} , β_{01*} и ω_* .

4. Числовые примеры и обсуждение результатов. Далее реализуем приведенный выше алгоритм для изучения потери устойчивости конкретных составных круговых дисков \mathcal{D}_I , \mathcal{D}_{II} , \mathcal{D}_{III} . Параметры $n = 2$, $\beta = 1/2$, $v_1 = 0.3$, $v_2 = 0.2$, $\varepsilon = 1.2$, $s = 1.1$ и $\sigma_{s2}/E_2 = 0.01$ диска \mathcal{D}_I зафиксируем, а $\Gamma = \gamma_1/\gamma_2$ будем варьировать, иллюстрируя характерными числовыми данными возможные пути развития неустойчивости (см. табл. 1). Тот факт, что неустойчивость 4° наступает после рождения и развития круговой пластической зоны $\mathcal{D}_{1(p)}$ с последующим появлением и ростом кольцевой пластической зоны $\mathcal{D}_{2(p)}$ (первая ветка, определяемая условием (11)), дополнительно обозначен в таблице указанием критического значения относительной угловой скорости эксцентричной формы неустойчивости 1° . Если же вначале появилась зона $\mathcal{D}_{2(p)}$, а потом — $\mathcal{D}_{1(p)}$ (вторая ветка, определяемая условием (15)), приводятся, естественно, только искомые критические значения самоуравновешенной формы потери устойчивости 4° .

Таблица 1. Значения относительной критической скорости и критического радиуса в зависимости от $\Gamma = \gamma_1/\gamma_2$ для диска \mathcal{D}_I .

Γ		0.5	0.8	0.85	0.9	1	1.1	2	3
		1°	ω_*/q_2					1.6629	1.6457
3°	β_{0*}	0.7083	0.7106	0.7110					
	ω_*/q_2	1.7521	1.7310	1.7276					
4°	β_{01*}				0.0750	0.1889	0.2448	0.4064	0.4506
	β_{0*}				0.7114	0.7112	0.7099	0.6689	0.5395
	ω_*/q_2				1.7243	1.7262	1.7381	2.1358	3.6865

Диск \mathcal{D}_{II} выбирали с такими параметрами: $n = 2$, $\beta = 0.1$, $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.3$, $\Gamma = 1$, $s = \sigma_{s1}/\sigma_{s2} = 0.8$ и $\sigma_{s2}/E_2 = 0.01$. Изменяющимся параметром для исследования в этом случае является $\varepsilon = E_2/E_1$ (см. табл. 2).

Таблица 2. Значения относительной критической скорости и критического радиуса в зависимости от $\varepsilon = E_2/E_1$ для диска \mathcal{D}_{II} .

ε		0.5	1	1.5	1.75	2
		1°	ω_*/q_2	1.2474	1.3576	1.4594
3°	β_{0*}				0.7172	0.7179
	ω_*/q_2				1.6626	1.6561
02°	β_{01*}	0.1	0.1	0.1		
	β_{0*}	0.7167	0.7167	0.7167		
	ω_*/q_2	1.6674	1.6674	1.6674		

Табл. 3 содержит характерные критические величины для диска \mathcal{D}_{III} с параметрами $n = 2$, $\beta = 0.7$, $\nu_1 = 0.5$, $\nu_2 = 0.5$, $\Gamma = 1$, $\varepsilon = E_2/E_1 = 1$, $\sigma_{s2}/E_2 = 0.01$ при изменяющемся параметре $s = \sigma_{s1}/\sigma_{s2}$.

Таблица 3. Значения относительной критической скорости и критического радиуса в зависимости от $s = \sigma_{s1}/\sigma_{s2}$ для диска \mathcal{D}_{III} .

s		0.5	1	1.1	1.2	1.5
		1°	ω_*/q_2	1.0690	1.5118	1.5856
2°	β_{0*}				0.6989	0.6792
	ω_*/q_2				1.8242	2.0312
01°	β_{0*}			0.7		
	ω_*/q_2			1.8512		
02°	β_{01*}	0.7	0.7			
	β_{0*}	0.7540	0.7144			
	ω_*/q_2	1.3427	1.6706			

Об эффективности изложенного в статье подхода к исследованию неустойчивости простейших вращающихся составных дисков, пребывающих в упругопластическом состоянии, свидетельствуют качественно и количественно правдоподобные полученные результаты: для дисков, физические свойства составляющих \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 которых в определенной степени близки, превалирует присущий однородным дискам механизм развития неустойчивости. Он осуществляется по одному из рассмотренных сценариев в зависимости от радиуса a . Если значения a небольшие по сравнению с критическим радиусом пластической области сплошного однородного диска, то, скорее всего, еще до потери устойчивости диска \mathcal{D} пластическое состояние успеет распространиться на значительную кольцевую область

$\mathcal{D}_{2(p)}$ в \mathcal{D}_2 , «заметь» предварительно весь круг \mathcal{D}_1 (табл. 2, 3). В этой связи примечательно, что при $s = 1$ для диска \mathcal{D}_{III} получено решение, в точности совпадающее (в терминах и обозначениях настоящей схемы) с решением для однородного диска (ср. с [4, 5, 7, 11]). В противоположность сказанному, узкая кольцевая секция \mathcal{D}_2 в составе диска \mathcal{D} вряд ли существенно повлияет на ожидаемые критические значения, гарантируя с большой вероятностью развитие сценария 2°.

В случае использования в \mathcal{D}_2 более пластичного материала, чем в \mathcal{D}_1 , неустойчивость наступит за счет значительной потери «запаса упругости» во внешней секции даже при упругом состоянии внутренней секции (см. табл. 1, 2). Варьирование упругих характеристик и размеров составляющих дисков \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 дает возможность почти всегда осуществить промежуточный вариант развития неустойчивости по сценарию 4° с образованием пластического состояния, локализованного в центре и вдоль окружности $r = a$. Этим, с одной стороны, можно добиться устойчивого сверхскоростного «разгона» реального (не обязательно плоского) диска, а, с другой, – подвергнуть перегрузкам те опасные его участки (ступица – тело диска, тело диска – ободок, зоны локализации отверстий и пустот, контур с насаженными лопатками и пр.), которые и являются носителями отличающихся приведенных значений упомянутых параметров.

1. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: В 2 т. – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1952. – Т. 2. – 640 с.
2. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
3. Гузь А. Н., Немчиш Ю. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Вища шк., 1989. – 352 с.
4. Еришов Л. В., Ивлев Д. Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125.
5. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: В 2 т. – Т. 2: Общие вопросы. Жестко-пластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – Москва: Физматлит, 2002. – 448 с.
6. Ивлев Д. Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
7. Ивлев Д. Д., Еришов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
8. Кравчишин О. З., Чекурин В. Ф. Итерационный метод розв'язування початково-крайової задачі поширення пружного збурення у неоднорідно деформованому тілі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 3. – С. 133–139.
Те саме: Kravchyshyn O. Z., Chekurin V. F. An iterative method for the solution of the initial boundary-value problem of propagation of elastic disturbances in an inhomogeneously strained body // J. Math. Sci. – 2010. – 171, No. 5. – P. 587–595.
9. Лица Д. М. Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска // Доп. НАН України. – 2011. – № 2. – С. 49–53.
10. Лица Д. М., Мартынюк А. А. О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 1. – С. 145–158.
11. Лица Д. М., Мартынюк А. А. О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска // Доп. НАН України. – 2011. – № 1. – С. 44–51.
12. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел: В 2 т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – Т. 1. – 648 с.
13. Прокопович І. Б. Загальний підхід до розробки математичних моделей неруйнівного контролю напружень. II. Фізична модель і рівняння локальної зв'язку між напруженнями та їх початковим розподілом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 4. – С. 87–95.
Те саме: Prokopovych I. B. General approach to the development of mathematical models of nondestructive stress testing. II. Physical model and equations of local relation between stresses and their initial distribution // J. Math. Sci. – 2012. – 181, No. 3. – P. 401–410.

14. Соколовский В. В. Теория пластичности. – Москва: Высш. шк., 1969. – 608 с.
15. Токовий Ю. В., Ханг К.-М., Ма Ч.-Ч. Визначення напружень і переміщень у тонкому кільцевому диску під дією діаметрального стиску // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 3. – С. 152–162.
 The same: *Tokovyy Yu. V., Hung K.-M., Ma C.-C.* Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression // *J. Math. Sci.* – 2010. – **165**, No. 3. – P. 342–354.
16. Lila D. M., Martynyuk A. A. Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // *Appl. Math.* – 2011. – **2**, No. 5. – P. 579–585.
17. Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks – Part I: Analytical and numerical stability analyses // *Eur. J. Mech. A/Solid.* – 2009. – **28**, No. 1. – P. 36–44.
18. Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part II – Burst of a superalloy turbine disk // *Eur. J. Mech. A/Solid.* – 2009. – **28**, No. 3. – P. 428–432.

МЕХАНІЗМ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ СКЛАДЕНОГО ПЛОСКОГО КРУГОВОГО ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Запропоновано спосіб дослідження методом малого параметра механізму втрати стійкості складеного плоского кругового диска, що обертається. Одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання при різних параметрах диска.

STABILITY LOSS MECHANISM OF ROTATING COMPOSITE PLANE CIRCULAR DISC

A way of investigation of a possible stability loss of rotating elastoplastic composite plane circular disc is suggested with the help of small parameter method. A characteristic equation for a critical radius of a plastic zone is obtained as the first approximation. The values of critical angular rotational velocity of at different parameters of the disc are found numerically.

Черкаський нац. ун-т
 ім. Б. Хмельницького, Черкаси

Получено
 02.12.11