

НЕЗАВИСИМОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯМИ В НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМАХ С СОБСТВЕННЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Рассмотрен алгоритм, позволяющий исследовать независимое управление напряжениями (т. е. создание в теле заданного поля напряжений посредством собственных деформаций таким образом, чтобы полные деформации системы не изменялись) в деформируемых неоднородных системах с собственными деформациями. В рамках сформулированного алгоритма проведена математическая формализация ограничений, связанных с распределением собственных деформаций. Доказана теорема существования решения задачи независимого управления напряжениями при наличии ограничений, а также предложена процедура нахождения оптимальных параметров собственных деформаций для случая, когда такое решение существует.

Введение. Вопросы проектирования современных технических систем, включающих элементы интеллектуального управления [22], требуют разработки новых методов вычисления и контролирования напряжённо-деформированного состояния этих систем.

Особый интерес представляют задачи независимого управления напряжённо-деформированным состоянием, когда в исследуемой системе необходимо создать заданное поле напряжений без влияния на её деформированное состояние, или, наоборот, управление деформированным состоянием системы без изменения напряжений. В частности, такие задачи возникают в космической индустрии (например, обеспечение размеростабильности зеркал передающих антенн [11]) и в биомеханике (лечение некоторых патологий развития у детей [9]). При этом управление в таких задачах производится посредством неупругих деформаций (температурных [15, 23], пьезоэлектрических [12, 24], ростовых [9], деформаций фазовых переходов [10, 18, 21] и т. д.). В рамках краевой задачи теории упругости эти деформации объединяются под термином собственные деформации [20].

Наиболее детально вопросы независимого управления исследованы пермскими учёными в работах [3, 5, 6, 8, 14]. Развитие известных результатов по ортогональному разложению гильбертовых пространств в задачах механики [4, 7, 19, 25] приводит эти исследования к новому фундаментальному результату – доказательству теоремы о декомпозиции собственной деформации [16]. Теорема утверждает, что любую собственную деформацию, существующую в теле, можно разложить на две составляющие: свободную от напряжений [13] и свободную от полных деформаций [16].

Для решения прикладных задач на основе теоремы о декомпозиции необходима разработка эффективных алгоритмов независимого управления напряжениями и полными деформациями в системах с собственными деформациями. В представленной работе исследуются условия существования, а также процедура поиска решения задачи независимого управления напряжениями.

Общие свойства собственных деформаций. Пусть исследуемое тело занимает ограниченную область V трехмерного евклидова пространства E^3 . Границу тела обозначим через Γ ($\bar{V} = V \cup \Gamma$). Деформации считаем малыми и аддитивными. Тогда тензор малой деформации $\tilde{\varepsilon}$ является суммой упругой $\tilde{\varepsilon}^e$ и собственной $\tilde{\varepsilon}^* \in (C^1(V))^6$ деформаций:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^*, \quad \mathbf{x} \in \bar{V}. \quad (1)$$

Остальные уравнения краевой задачи имеют следующий вид:

$$\text{Div } \tilde{\sigma} + \mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (2)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \cdot \tilde{\varepsilon}^e, \quad \mathbf{x} \in \bar{V}, \quad (3)$$

$$\tilde{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) / 2, \quad \mathbf{x} \in \bar{V}, \quad (4)$$

где $\tilde{\sigma}$ – симметричный тензор напряжений; \mathbf{Q} – вектор объёмных сил, $\mathbf{Q} \in (C(\bar{V}))^3$; \tilde{C} – тензор упругих модулей, $C_{ijkl} \in C^1(V)$; \mathbf{u} – вектор перемещения, $\mathbf{u} \in (C^2(V))^3$. Величины $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\varepsilon}$ и \mathbf{u} рассматриваются как функции пространственных декартовых ортогональных координат, обозначаемых радиусом-вектором $\mathbf{x} \in \bar{V}$. Тензор упругих модулей также считается зависимым от координат, что позволяет применять данную постановку к неоднородным телам.

Граница области Γ делится на две взаимно непересекающиеся части: $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$. На части границы Γ_u заданы нулевые кинематические граничные условия, на части Γ_σ задан вектор напряжений $\mathbf{P} \in (C(\Gamma_\sigma))^3$:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\sigma} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma. \quad (6)$$

Здесь кинематические граничные условия предполагаются такими, что движение тела как жесткого целого невозможно.

В постановке (1)–(6) собственная деформация в выражении (1) считается известной (гипотеза состоит в том, что собственная деформация может быть найдена из отдельного решения соответствующей краевой задачи), и задача состоит в определении напряжённо-деформированного состояния тела с заданной собственной деформацией.

Дифференциальная постановка существенно сужает круг решаемых задач, так как требует существования соответствующих производных и не позволяет применять численные методы решения. Поэтому вводится обобщённая постановка задачи [14], где напряжения и деформации являются элементами функционального пространства L_2 .

Обобщённым решением задачи называется симметричный тензор $\tilde{\sigma}$, который определяется обобщённым законом Гука

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \cdot (\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \tilde{\varepsilon}^*),$$

где $\mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3$, $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma_u$, и для которого имеет место соотношение

$$\int_V \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon}(\mathbf{w}) dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} dS - \int_V \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} dV = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(V))^3,$$

$$\mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u.$$

Здесь W_2^1 – пространство Соболева функций, имеющих первую обобщённую производную, причем сама функция и её производная суммируемы с квадратом. Деформации $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u})$ и $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{w})$ определяются геометрическими соотношениями Коши, где производные понимаются в обобщённом смысле. Значения перемещений \mathbf{u} и \mathbf{w} на границе вычисляются посредством оператора следа. В обобщённой постановке задачи считается, что $\mathbf{P} \in (L_2(\Gamma_\sigma))^3$, $\mathbf{Q} \in (L_2(V))^3$, $\tilde{\varepsilon}^* \in (L_2(V))^6$, компоненты C_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2, 3$, являются кусочно-непрерывными функциями координат.

Дифференциальное решение является обобщённым, а также в случае достаточной гладкости напряжений – обобщённое решение является классическим. Обобщённое решение существует и единственно [2: с. 56].

Вводятся понятия собственной деформации $\tilde{\varepsilon}_u^*$, свободной от напряжений, и собственной деформации $\tilde{\varepsilon}_\sigma^*$, свободной от полных деформаций. При этом для дифференциального решения при отсутствии объёмных и поверхностных сил справедливы следующие уравнения:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_1 = 0, & \mathbf{x} \in \bar{V}, \\ \tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{\varepsilon}_u^*, & \mathbf{x} \in \bar{V}, \\ \tilde{\varepsilon}_1 = (\nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \nabla)/2, & \mathbf{x} \in \bar{V}, \\ \mathbf{u}_1 = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_u, \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \tilde{\sigma}_2 = 0, & \mathbf{x} \in V, \\ \tilde{\sigma}_2 = -\tilde{C} \cdot \tilde{\varepsilon}_\sigma^*, & \mathbf{x} \in \bar{V}, \\ \mathbf{n} \cdot \tilde{\sigma}_2 = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \\ \mathbf{u}_2 = 0, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = 0, & \mathbf{x} \in \bar{V}. \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что задачи (7) имеют неединственные решения и позволяют определить множества $\tilde{\varepsilon}_u^*$ и $\tilde{\varepsilon}_\sigma^*$. Сложение указанных задач дает исходную задачу теории упругости с произвольной собственной деформацией.

В рамках дальнейшего исследования свойств собственных деформаций рассматривается гильбертово пространство H тензоров деформации, компоненты которых принадлежат функциональному пространству L_2 . Скалярное произведение в H введено следующим образом:

$$(\tilde{A}, \tilde{B})_H = \int_V A_{ij} C_{ijkl} B_{kl} dV, \quad (8)$$

а норма, порожденная скалярным произведением (8), имеет вид

$$\|\tilde{A}\|_H = \sqrt{(\tilde{A}, \tilde{A})_H}.$$

Можно показать, что выражение (8) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения.

Далее выделено подпространство совместных деформаций H_u .

Некоторый симметричный тензор $\tilde{f} \in H$ принадлежит подпространству H_u , если существует такая вектор-функция (перемещение) $\mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3$, что $\mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma_u$ и

$$\tilde{f} = (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)/2. \quad (9)$$

Производные в соотношении (9) понимаются в обобщённом смысле, а значение функции \mathbf{u} на границе Γ_u определяется посредством оператора следа.

Физический смысл подпространства H_u заключается в том, что это пространство есть множеством совместных деформаций, где соответствующие им перемещения \mathbf{u} обращаются в нуль на неподвижных опорах.

Из соотношений (7) видно, что собственная деформация, свободная от напряжений, принадлежит подпространству H_u . И наоборот, если собственная деформация принадлежит подпространству H_u , то она является свободной от напряжений.

Подпространство H_σ собственных деформаций, свободных от полных деформаций, введено посредством условия, что полные деформации (1) равны нулю. Тогда

$$\tilde{\varepsilon}_\sigma^* = -\tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{\sigma}, \quad \mathbf{x} \in \bar{V}, \quad (10)$$

где напряжения $\tilde{\sigma}$ являются статически допустимыми при отсутствии внешних сил (уравновешенные напряжения):

$$\int_V \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon}(\mathbf{w}) dV = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(V))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u.$$

Эти напряжения не ограничиваются классом самоуравновешенных напряжений ввиду наличия реакций опор на границе Γ_u .

Множество собственных деформаций $\tilde{\varepsilon}_\sigma^*$ в выражении (10) образует линейное подпространство H_σ .

Введение функциональных подпространств позволяет сформулировать теорему о декомпозиции собственной деформации.

Теорема. *Любая существующая в неоднородном теле собственная деформация $\tilde{\varepsilon}^* \in H$ может быть единственным образом разложена на составляющую, свободную от напряжений, и составляющую, свободную от полных деформаций:*

$$\tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon}_u^* + \tilde{\varepsilon}_\sigma^*,$$

где $\tilde{\varepsilon}_u^* \in H_u$ и $\tilde{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma$, причём $\tilde{\varepsilon}_u^* \perp \tilde{\varepsilon}_\sigma^*$, т. е. $(\tilde{\varepsilon}_u^*, \tilde{\varepsilon}_\sigma^*) = 0$.

Доказаны существование и единственность такого разложения [16].

Независимое управление напряжениями. Пусть в системе требуется создать некоторое поле статически допустимых напряжений $\tilde{\sigma}_0$. Согласно теореме о декомпозиции собственной деформации, требуемые собственные деформации, свободные от полных деформаций $\tilde{\varepsilon}_\sigma^0$, должны соответствовать этим напряжениям следующим образом:

$$\tilde{\varepsilon}_\sigma^0 = -\tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{\sigma}_0,$$

где \tilde{C} – тензор упругих модулей.

В качестве целевой функции примем величину

$$\Psi = \|\tilde{\varepsilon}^* - \tilde{\varepsilon}_\sigma^0\|_H^2, \quad (11)$$

где $\tilde{\varepsilon}^*$ – собственные деформации, которые можно создать в теле.

В реально существующих телах распределения собственных деформаций подчиняются определённым закономерностям, которые обусловлены либо природой создаваемых собственных деформаций, либо конструктивными особенностями рассматриваемых систем. В связи с этим желаемые поля собственных деформаций не могут быть созданы произвольно. Запишем это ограничение в форме

$$\tilde{\varepsilon}^*(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^K a_k \tilde{\xi}_k, \quad \tilde{\varepsilon}^*(\mathbf{a}) \in H_\xi, \quad (12)$$

где $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_K\}^\top$ – параметры управления, не зависящие от координат; K – размерность полученного линейного подпространства H_ξ ($H_\xi \subset H$); $\tilde{\xi}_k$ – заданные линейно независимые тензоры деформаций.

Условием отсутствия полных деформаций при управлении напряжениями является соотношение

$$\tilde{\varepsilon}^*(\mathbf{a}) \in H_\sigma, \quad (13)$$

при этом $\tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon}_\sigma^*$.

Таким образом, постановка задачи независимого управления напряжениями содержит целевую функцию (11), минимизируемую по параметрам

$a_k, k = 1, \dots, K$, и принимающую вид

$$\Psi = \|\tilde{\varepsilon}^*(\mathbf{a}) - \tilde{\varepsilon}_\sigma^0\|_H^2 \rightarrow \inf(\mathbf{a}), \quad (14)$$

а также ограничения (12) и (13):

$$\tilde{\varepsilon}^*(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^K a_k \tilde{\xi}_k, \quad \tilde{\varepsilon}^*(\mathbf{a}) \in H_\sigma.$$

Схематически задачу независимого управления (12)–(14) можно изобразить в виде рисунка (рис. 1), где функционал Ψ является расстоянием между $\tilde{\varepsilon}^*(\mathbf{a})$ и $\tilde{\varepsilon}_\sigma^0$, которое согласно (14) должно минимизироваться. Для выполнения условия (13) необходимо, чтобы подпространства H_ξ и H_σ имели общие элементы, кроме нулевого, который существует всегда. Так, на рис. 1а $H_\sigma \subset H_\xi$. Очевидно, что в этом случае решение задачи независимого управления может быть достигнуто в точности. Условие (13) выполняется и в том случае, когда H_ξ пересекается с H_σ (например, так, как показано на рис. 1б). При этом задача (12)–(14) будет иметь приближённое решение в том смысле, что требуемое поле напряжений не будет достигнуто в точности, однако поиск решения производится в подпространстве H_σ , что обеспечивает отсутствие полных деформаций в системе.

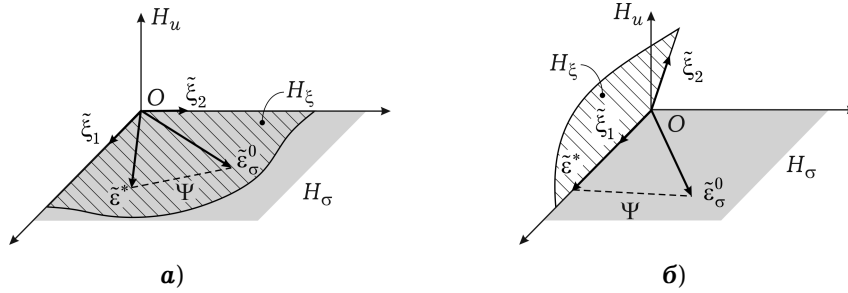


Рис. 1. Схематическое представление задачи независимого управления напряжениями.

Теорема существования решения задачи независимого управления напряжениями. Введём следующие матрицы:

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} [\pi\xi]^\top & [\Gamma\pi]^{-1} & [\pi\xi] \\ K \times K & K \times n & n \times n & n \times K \end{bmatrix} \quad (15)$$

для случая, когда известны базисные элементы $\tilde{\pi}_i, i = 1, \dots, n, n = \dim H_u$, подпространства H_u ($[\Gamma\pi]_{ij} = (\tilde{\pi}_i, \tilde{\pi}_j)_H$, $[\pi\xi]_{ik} = (\tilde{\pi}_i, \tilde{\xi}_k)_H, i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, K$), и матрицы

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} [\Gamma\xi] & -[\psi\xi]^\top & [\Gamma\psi]^{-1} & [\psi\xi] \\ K \times K & K \times K & K \times s & s \times s & s \times K \end{bmatrix} \quad (16)$$

для случая, когда известны базисные элементы $\tilde{\psi}_j, j = 1, \dots, s, s = \dim H_\sigma$, подпространства H_σ ($[\Gamma\psi]_{ij} = (\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j)_H$, $[\psi\xi]_{ik} = (\tilde{\psi}_i, \tilde{\xi}_k)_H$, $[\Gamma\xi]_{lk} = (\tilde{\xi}_l, \tilde{\xi}_k)_H, i, j = 1, \dots, s, \ell, k = 1, \dots, K$). Индексом «Т» обозначена операция транспонирования.

Покажем, что $[\mathbf{A}_1] = [\mathbf{A}_2]$. Для этого собственные деформации $\tilde{\varepsilon}_u^*$ и $\tilde{\varepsilon}_\sigma^*$ необходимо представить в виде разложений по соответствующим базисам

Теорема существования. *Независимое управление напряжениями при ограничении в виде (12) возможно только тогда, когда определитель матрицы $[\mathbf{A}]$ равен нулю.*

Доказательство проведём с помощью базиса подпространства H_σ .

Представим условие (13) в следующей форме:

$$\sum_{k=1}^K a_k \tilde{\xi}_k = \sum_{j=1}^s b_j \tilde{\psi}_j, \quad (23)$$

т.е. тензор собственной деформации $\tilde{\varepsilon}^*$ разложен по базису $\tilde{\psi}_j$ в подпространстве H_σ .

Скалярное умножение уравнения (23) на элементы $\tilde{\xi}_\ell$, $\ell = 1, \dots, K$, с последующей подстановкой коэффициентов b_j , $j = 1, \dots, s$ (см. формулу (19)) приводит к системе уравнений относительно параметров a_k , $k = 1, \dots, K$:

$$\left(\begin{array}{ccc} [\Gamma \xi] & - [\psi \xi]^\top & [\Gamma \psi]^{-1} [\psi \xi] \\ K \times K & K \times s & s \times s \quad s \times K \end{array} \right) \{a\} = 0,$$

или

$$[\mathbf{A}] \{a\} = 0. \quad (24)$$

Если определитель матрицы $[\mathbf{A}]$ отличается от нуля, то система уравнений (24) имеет только тривиальное решение. Таким образом, физически условие $\det[\mathbf{A}] \neq 0$ означает, что в системе при выполнении ограничения (12) нет возможности проводить независимое управление напряжениями. Теорема доказана. \blacklozenge

Следствие. *Если матрица $[\mathbf{A}]$ оказывается нулевой, то это значит, что условие (13) выполняется для любых a_k , $k = 1, \dots, K$, т.е. $H_\xi \subset H_\sigma$.*

Решение задачи независимого управления напряжениями. Итак, независимое управление возможно только тогда, когда $\det[\mathbf{A}] = 0$. При этом множество линейно независимых вектор-столбцов $\{\alpha\}$, удовлетворяющих (24), образует нуль-пространство матрицы $[\mathbf{A}]$:

$$[\alpha] = \left[\begin{array}{ccc} \{\alpha\}_1 & \{\alpha\}_2 & \dots & \{\alpha\}_q \\ K \times q & K \times 1 & K \times 1 & K \times 1 \end{array} \right],$$

где q – количество линейно независимых элементов нуль-пространства матрицы $[\mathbf{A}]$. Тогда параметры управления a_k , $k = 1, \dots, K$, собственной деформации определяются формулой

$$\{a\} = X_1 \{\alpha\}_1 + X_2 \{\alpha\}_2 + \dots + X_q \{\alpha\}_q = [\alpha] \{X\}. \quad (25)$$

Соотношение (12) с учётом (25) переписывается следующим образом:

$$\tilde{\varepsilon}^* = \sum_{m=1}^q X_m \sum_{k=1}^K \alpha_{km} \tilde{\xi}_k, \quad (26)$$

а задача (14) представляется в виде

$$\Psi \rightarrow \inf(\mathbf{X}), \quad (27)$$

где $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_q\}^\top$ – теперь искомые параметры управления.

Раскрывая норму в (11), получаем следующее:

$$\Psi = \int_V (\tilde{\varepsilon}^* - \tilde{\varepsilon}_\sigma^0) \cdot \tilde{C} \cdot (\tilde{\varepsilon}^* - \tilde{\varepsilon}_\sigma^0) dV = (\tilde{\varepsilon}^*, \tilde{\varepsilon}^*)_H - 2(\tilde{\varepsilon}^*, \tilde{\varepsilon}_\sigma^0)_H + (\tilde{\varepsilon}_\sigma^0, \tilde{\varepsilon}_\sigma^0)_H. \quad (28)$$

Учитывая уравнение (26), перепишем (28) в матричном виде, предварительно отбросив слагаемое, не зависящее от параметров X_m , $m = 1, \dots, q$:

$$\Psi = \{X\}^\top \begin{matrix} [\alpha]^\top & [\Gamma \xi] & [\alpha] \\ 1 \times q & q \times K & K \times K \end{matrix} \{X\} - 2 \{X\}^\top \begin{matrix} [\alpha]^\top \\ 1 \times q \end{matrix} \{\chi\} = \{X\}^\top \begin{matrix} [\Omega] \\ 1 \times q \end{matrix} \{X\} - 2 \{X\}^\top \begin{matrix} \{\omega\} \\ q \times 1 \end{matrix},$$

где $\{\chi\}_i = (\tilde{\xi}_i, \tilde{\varepsilon}_\sigma^0)_H$, $i = 1, \dots, K$, $[\Omega] = [\alpha]^\top [\Gamma \xi] [\alpha]$, $\{\omega\} = [\alpha]^\top \{\chi\}$.

Таким образом, задачу минимизации (27) можно записать в следующем виде:

$$\Psi = \{X\}^\top \begin{matrix} [\Omega] \\ 1 \times q \end{matrix} \{X\} - 2 \{X\}^\top \begin{matrix} \{\omega\} \\ q \times 1 \end{matrix} \rightarrow \inf(\mathbf{X}). \quad (29)$$

Матрица Грама $[\Gamma \xi]$ для системы линейно независимых элементов $\tilde{\xi}_k$, $k = 1, \dots, K$, является положительно определённой. Поэтому квадратичная форма $[\Omega] = [\alpha]^\top [\Gamma \xi] [\alpha]$, связанная с этой матрицей, также представляет собой положительно определённую матрицу [1: с. 89, 94]. Таким образом, условия

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_\ell} = 0, \quad \ell = 1, \dots, q, \quad (30)$$

являются условиями минимума функционала Ψ .

Для простоты дифференцирования запишем соотношение (29) в виде

$$\Psi = \sum_{k=1}^q \sum_{n=1}^q \Omega_{kn} X_k X_n - 2 \sum_{k=1}^q \omega_k X_k.$$

Тогда условия (30) с учетом симметрии матрицы $[\Omega]$ принимают вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_\ell} = \sum_{k=1}^q \sum_{n=1}^q \Omega_{kn} \frac{\partial X_k}{\partial X_\ell} X_n + \sum_{k=1}^q \sum_{n=1}^q \Omega_{kn} X_k \frac{\partial X_n}{\partial X_\ell} - 2 \sum_{k=1}^q \omega_k \frac{\partial X_k}{\partial X_\ell} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^q \Omega_{\ell k} X_k - \omega_\ell = 0, \quad \ell = 1, \dots, q$$

или в матричной форме записи:

$$\begin{matrix} [\Omega] \\ q \times q \end{matrix} \begin{matrix} \{X\} \\ q \times 1 \end{matrix} - \begin{matrix} \{\omega\} \\ q \times 1 \end{matrix} = 0. \quad (31)$$

Решение системы уравнений (31) даёт решение задачи минимизации (27):

$$\begin{matrix} \{X\} \\ q \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [\Omega]^{-1} \\ q \times q \end{matrix} \begin{matrix} \{\omega\} \\ q \times 1 \end{matrix}.$$

Используя соотношение (25), получаем решение задачи независимого управления (12)–(14):

$$\begin{matrix} \{a\} \\ K \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [\alpha] \\ K \times q \end{matrix} \begin{matrix} \{X\} \\ q \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [\alpha] [\Omega]^{-1} \\ K \times q \end{matrix} \begin{matrix} \{\omega\} \\ q \times 1 \end{matrix}. \quad (32)$$

Пример задачи независимого управления напряжениями. В качестве примера предлагается рассмотреть систему, состоящую из трёх стержней, которые связаны между собой твердым телом (рис. 2). Каждый из этих стержней имеет длину L и площадь поперечного сечения A . Неоднородное распределение упругих свойств этой системы выбрано следующим образом:

$$\tilde{C} = \{E \quad 2E \quad E\}^T, \quad (33)$$

т. е. модуль упругости во втором стержне в два раза больше, чем в первом и третьем стержнях.

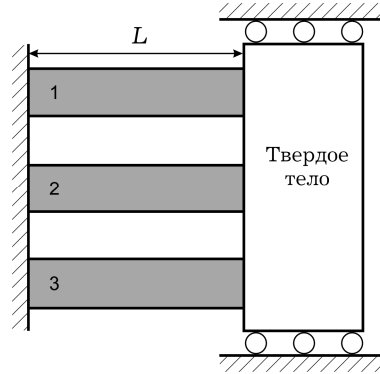


Рис. 2

Пусть в системе необходимо создать следующие статически допустимые напряжения:

$$\tilde{\sigma}^0 = \sigma_0 \{-1 \quad 3 \quad -2\}^T,$$

не меняя при этом деформаций, т. е.

$$\tilde{\varepsilon} = \{0 \quad 0 \quad 0\}^T.$$

Тогда необходимая собственная деформация $\tilde{\varepsilon}_\sigma^0$ равна

$$\tilde{\varepsilon}_\sigma^0 = \frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 \quad -\frac{3}{2} \quad 2 \right\}^T.$$

Тензор собственной деформации в каждом стержне имеет единственную компоненту вдоль оси стержня.

Размерность пространства H равна количеству стержней ($\dim H = 3$). Размерность подпространства H_σ равна степени статической неопределенности системы ($s \equiv \dim H_\sigma = 2$). Размерность подпространства H_u определяется количеством вариантов независимого приложения сил ($\dim H_u = 1$). При этом выполняется равенство: $\dim H = \dim H_u + \dim H_\sigma$ [8, 17].

Представим собственную деформацию системы в форме (12):

$$\tilde{\varepsilon}^* = a_1 \tilde{\xi}_1 + a_2 \tilde{\xi}_2, \quad (34)$$

где элементы $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$ (ограничения, накладываемые на распределение собственных деформаций в рассматриваемой системе) приняты следующими:

$$\tilde{\xi}_1 = \{1 \quad 2 \quad 0\}^T, \quad \tilde{\xi}_2 = \{1 \quad 0 \quad 1\}^T. \quad (35)$$

Элементы ортонормированных базисов в подпространствах H_u и H_σ выбраны следующим образом [8, 17]:

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{1}{2\sqrt{EAL}} \{1 \quad 1 \quad 1\}^T,$$

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3EAL}} \{1 \quad 1 \quad -3\}^T,$$

$$\tilde{\psi}_2 = \frac{1}{\sqrt{6EAL}} \{2 \quad -1 \quad 0\}^T,$$

где $\tilde{\pi}_1$ – базисный элемент подпространства H_u ; $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ – базисные элементы подпространства H_σ .

Вычислим матрицы, определяющие $[\mathbf{A}]$:

$$[\Gamma\xi] = EAL \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\Gamma\psi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\psi\xi] = \sqrt{\frac{EAL}{12}} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Согласно соотношению (22) имеем

$$[\mathbf{A}] = \frac{EAL}{4} \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен нулю. Отсюда следует, что согласно теореме существования, приведённой в этой работе, исследуемая система (рис. 2) с собственными деформациями (34), (35) обладает возможностью независимого управления напряжениями.

Нуль-пространство полученной матрицы имеет вид

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Зная

$$[\Omega] = [\alpha]^\top [\Gamma\xi] [\alpha] = 66 EAL, \quad \{\omega\} = [\alpha]^\top \{\chi\} = -25 \sigma_0 AL,$$

по формуле (32) получаем оптимальные параметры собственной деформации (34):

$$\{a_{\text{opt}}\} = \frac{\sigma_0}{E} \{-0.76 \quad 1.89\}^\top, \quad (36)$$

при этом

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{opt}}^* = \frac{\sigma_0}{E} \{1.14 \quad -1.52 \quad 1.90\}^\top. \quad (37)$$

Поле напряжений, соответствующее собственным деформациям $\tilde{\varepsilon}_{\text{opt}}^*$, получается следующим:

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{C} \cdot \tilde{\varepsilon}_{\text{opt}}^* = -\tilde{C} \cdot \tilde{\varepsilon}_{\text{opt}}^* = \sigma_0 \{-1.14 \quad 3.04 \quad -1.90\}^\top. \quad (38)$$

Таким образом, согласно теореме о декомпозиции собственные деформации (34), соответствующие ограничениям (35) и параметрам (36), позволяют создать в системе поле напряжений (38), достаточно близкое к $\tilde{\sigma}^0$, не вызывая при этом полных деформаций.

Следует отметить, что в приведённых рассуждениях были использованы базисные элементы подпространства H_σ . Однако точно такое же решение можно получить с помощью базиса подпространства H_u . Действительно,

$$[\pi\xi] = \frac{\sqrt{EAL}}{2} \{5 \quad 2\}, \quad [\Gamma\pi] = 1,$$

тогда

$$[\mathbf{A}] = [\pi\xi]^\top [\Gamma\pi]^{-1} [\pi\xi] = \frac{EAL}{4} \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что и в этом случае оптимальным является решение (36).

Проверку решения (37) можно легко осуществить, решив задачу о деформировании системы стержней с собственной деформацией (37), используя уравнение равновесия, закон Гука и условие, что полные деформации стержней равны друг другу. Действительно, полные деформации стержней будут равны нулю, а напряжения будут равны напряжениям в формуле (38).

Заключение. В работе приведены теоретические основы и иллюстративный пример независимого управления напряжениями в системах с собственной деформацией. Дана постановка соответствующей краевой задачи, приведена теорема существования и приведен алгоритм решения. В результате выполнения алгоритма будут найдены собственные деформации, создающие в теле заданные напряжения и не меняющие форму системы.

Отметим, что предложенный алгоритм может быть использован, если собственная деформация может быть записана в виде формулы (12). Это является одним из основных ограничений применения разработанного алгоритма. При записи формулы (12) необходимо учитывать природу собственной деформации и соответствующие определяющие соотношения. Этот вопрос должен быть проработан при анализе конкретной системы или задачи. При выполнении условия (12) алгоритм дает эффективный способ вычисления параметров управления и не требует итерационных процедур методов оптимизации.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Францу Циглеру (Венский технический университет, Австрия) за полезные обсуждения работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00910, № 12-01-31404) и гранта Венского технического университета.

1. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – Москва: Наука, 1984. – 320 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
3. *Кирюхин В. Ю., Няшин Ю. И., Лохов В. А.* О постановке и решении задач управления температурными напряжениями // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 128–135.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – Москва: Наука, 1979. – 318 с.
5. *Няшин Ю. И., Симановская Е. Ю., Лохов В. А., Тверье В. М.* Биомеханика зубочелюстной системы человека // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 220–224.
То же: *Nyashin Yu. I., Simanovskaya E. Yu., Likhov V. A., Tverier V. M.* Biomechanics of the human dentofacial system // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 3. – P. 426–430.
6. *Поздеев А. А., Няшин Ю. И., Трусов П. В.* Остаточные напряжения: теория и приложения. – Москва: Наука, 1982. – 112 с.
7. *Соколов А. Г., Стружанов В. В.* Об одной задаче оптимизации напряженного состояния в упругом теле // Прикл. математика и механика. – 2001. – **65**, № 2. – С. 317–322.
8. *Туктамышев В. С., Лохов В. А.* Метод независимого управления механическими напряжениями в деформируемых системах // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2008. – **14**, № 2. – С. 256–267.
9. *Туктамышев В. С., Лохов В. А., Няшин Ю. И.* Независимое управление напряжениями и деформациями в растущих живых тканях // Рос. журн. биомеханики. – 2011. – **15**, № 2. – С. 69–76.
10. *Choi S., Lee J. J., Seo D. C., Choi S. W.* The active buckling control of laminated composite beams with embedded shape memory alloy wires // Compos. Struct. – 1999. – **47**, No. 1-4. – P. 679–686.
11. *Crawley E. F.* Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment // AIAA Journal. – 1994. – **32**, No. 8. – P. 1689–1699.
12. *Irschik H.* A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation // Eng. Struct. – 2002. – **24**, No. 1. – P. 5–11.
13. *Irschik H., Ziegler F.* Eigenstrain without stress and static shape control of structures // AIAA Journal. – 2001. – **39**, No. 10. – P. 1985–1990.
14. *Nyashin Y., Kiryukhin V.* Biological stresses in living tissues. The modeling and control problems // Russian J. Biomechanics. – 2002. – **6**, No. 3. – P. 13–31.
15. *Nyashin Y., Kiryukhin V., Ziegler F.* Control of thermal stress and strain // J. Therm. Stresses. – 2000. – **23**, No. 4. – P. 309–326.

16. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – **85**, No. 8. – P. 557–570.
17. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. Decomposition method in thermal stress control problems // Proc. 7th Int. Congr. on Therm. Stresses (June 4–7, 2007, Taipei, Taiwan). – 2007. – **2**. – P. 583–586.
18. Ostachowicz W., Krawczuk M., Żak A. Dynamics and buckling of a multilayer composite plate with embedded SMA wires // Compos. Struct. – 2000. – **48**, No. 1-3. – P. 163–167.
19. Rafalski P. Orthogonal projection method. II. Thermoelastic problem // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech. – 1969. – **17**, No. 2. – P. 69–74.
20. Reißner H. Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen // Z. Angew. Math. Mech. – 1931. – **11**. – P. 1–8.
21. Romano R., Tannuri E. A. Modeling, control and experimental validation of a novel actuator based on shape memory alloys // Mechatronics. – 2009. – **19**, No. 7. – P. 1169–1177.
22. Srinivasan A. V., McFarland D. M. Smart structures: Analysis and design. – Cambridge Univ. Press, 2001. – 228 p.
23. Tauchert T., Ashida F., Noda N., Adali S., Verijenko V. Developments in thermo-piezoelasticity with relevance to smart composite structures // Compos. Struct. – 2000. – **48**, No. 1-3. – P. 31–38.
24. Tzou H., Zhong J. Adaptive piezoelectric shell structures: theory and experiments // Mech. Syst. Signal Pr. – 1993. – **7**, No. 4. – P. 307–319.
25. Zaremba S. Sur le principe de minimum // Bull. Int. l'Acad. d. Sciences de Cracovie. Cl. des Sciences math. et natur. – 1909. – No. 7. – P. 197–204.

НЕЗАЛЕЖНЕ КЕРУВАННЯ НАПРУЖЕННЯМИ В НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМАХ З ВЛАСНИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ

Розглянуто алгоритм, який дозволяє досліджувати незалежне керування напруженнями (тобто забезпечення в тілі заданого поля напружень за допомогою власних деформацій таким чином, щоб повні деформації системи не змінювалися) у деформованих неоднорідних системах з власними деформаціями. У рамках сформульованого алгоритму проведено математичну формалізацію обмежень, пов'язаних із розподілом власних деформацій. Доведено теорему існування розв'язку задачі незалежного керування напруженнями при наявності обмежень, а також запропоновано процедуру визначення оптимальних параметрів власних деформацій для випадку, коли такий розв'язок існує.

INDEPENDENT STRESS CONTROL IN HETEROGENEOUS SYSTEMS WITH EIGENSTRAINS

The algorithm allowing to investigate the independent stress control problems in heterogeneous systems with prescribed eigenstrains is considered. The independent stress control means the creation of desired stress field in the system by eigenstrains in such way that total deformation of the system is unchanged. Within the frames of the algorithm, the mathematical formalization of the constraints associated with the distribution of eigenstrains is done. The existence theorem for solution of independent stress control problem under constraints is proved and for the case when the solution exists, the procedure for determination of optimal eigenstrain parameters is developed.

Пермск. нац. исслед. политехн. ун-т, Пермь, Россия

Получено
05.06.12