УДК 517.95

П. І. Каленюк[1,2], І. В. Когут[1], З. М. Нитребич[1], У. Б. Ярка[1]

ЗАДАЧА З НЕОДНОРІДНОЮ ІНТЕГРАЛЬНОЮ ЧАСОВОЮ УМОВОЮ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ ТА НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ

Виділено клас квазіполіномів як клас однозначної розв'язності задачі з неоднорідною інтегральною часовою умовою для однорідного рівняння із частинними похідними першого порядку за часом і в загальному випадку нескінченного порядку за просторовими змінними зі сталими коефіцієнтами. У цьому класі розв'язок задачі зображено у вигляді дії диференціального виразу, символом якого є права частина інтегральної умови, на мероморфну функцію параметрів з подальшим покладанням цих параметрів рівними нулеві. У більш ширшому класі квазіполіномів – класі існування неєдиного розв'язку задачі, запропоновано формулу для побудови її часткових розв'язків.

Вступ. В останні роки задачі з інтегральними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними знаходять широке застосування у важливих для практики задачах. Інтегральні умови застосовують, зокрема, у моделях поширення тепла та вологопереносу, у демографічних моделях і задачах математичної біології, в обернених задачах теорії теплопровідності, задачах оптимального контролю в техніці тощо [1, 7, 11–13, 15, 18].

Наявність інтегральних умов в задачах вимагає нових підходів до дослідження таких задач, які в загальному є умовно коректними. Встановленню умов коректної розв'язності задач з інтегральними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними присвячено чимало праць вчених (див., наприклад, [2, 6, 8–10, 14, 16, 17] та бібліографію в них).

Ця стаття продовжує дослідження праці [3] на випадок кількох просторових змінних. Зокрема, встановлюється однозначна розв'язність задачі з неоднорідною інтегральною часовою умовою для однорідного диференціального рівняння із частинними похідними першого порядку за часом та в загальному нескінченного порядку за просторовими змінними у шарі. Розв'язок задачі за допомогою диференціально-символьного методу [4] будується у класі квазіполіномів як дія деякого диференціального виразу на мероморфну функцію параметрів з подальшим покладанням цих параметрів такими, що дорівнюють нулеві. Символом цього виразу є права частина неоднорідної інтегральної умови. Крім того, пропонується метод побудови часткових розв'язків задачі у класі квазіполіномів, що містить неєдиний розв'язок задачі.

1. Формулювання задачі. В шарі $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^s$ вивчатимемо задачу

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]U(t,x)=0,\qquad t\in(0,T),\qquad x\in\mathbb{R}^s\,, \tag{1}$$

$$\int_0^T U(t,x)\,dt=\varphi(x),\qquad x\in\mathbb{R}^s\,, \tag{2}$$

де $a\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальний вираз з цілим символом $a(\nu)\neq\mathrm{const}\,,\nu\in\mathbb{C}^s$, $T\in\mathbb{R}$, $T>0$, $s\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Поряд з неоднорідною інтегральною умовою (2) розглянемо однорідну умову

$$\int_0^T U(t,x)\,dt=0\,. \tag{3}$$

Існування та єдиність розв'язку задачі (1), (2) встановимо у певному класі квазіполіномів. У ширшому класі квазіполіномів розв'язки задачі (1), (2) будуть знаходитися з точністю до квазіполіномних розв'язків задачі (1), (3). Дослідженню множини розв'язків задачі (1), (3) присвячена стаття [5].

Нехай K_M − клас дійснозначних квазіполіномів вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\alpha_j \cdot x] Q_j(x), \tag{4}$$

де $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{js}) \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $j, k = 1, \ldots, m$, $x \in \mathbb{R}^s$, $\alpha_j \cdot x = \alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \ldots + \alpha_{js}x_s$, $m \in \mathbb{N}$; $Q_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, − деякі поліноми з дійсними коефіцієнтами. Крім того, $K_{\mathbb{C},M}$ − це клас дійснозначних квазіполіномів вигляду

$$f(t, x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\beta_j t + \alpha_j \cdot x] Q_j(t, x), \tag{5}$$

де $\beta_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+s}$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ або $\beta_j \neq \beta_k$ для $j \neq k$, $j, k = 1, \ldots, m$; $Q_j(t, x)$, $j = 1, \ldots, m$, − поліноми змінних t і x з дійсними коефіцієнтами.

Для квазіполінома $\varphi(x)$ вигляду (4) з класу K_M заміною x на $\frac{\partial}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial}{\partial \nu_1}, \frac{\partial}{\partial \nu_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \nu_s}\right)$ утворимо диференціальний вираз $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)$ і його дію на функцію $g(t, x, \nu)$ з подальшим покладанням вектор-параметра ν рівним нуль-векторові $O = (0, \ldots, 0)$ означимо так:

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{g(t, x, \nu)\}\Big|_{\nu=O} \equiv \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{g(t, x, \nu)\}\Big|_{\nu=\alpha_j}. \tag{6}$$

2. Основні результати.

***2.1. Однозв'язна розв'язність задачі* (1), (2).**

Оскільки $\exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]$ − розв'язок рівняння (1) класично відокремленого вигляду, де ν − вектор-параметр відокремлення, то відповідно до диференціально-символьного методу [4] розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$U(t, x) = g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{C(\nu) \exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]\}\Big|_{\nu=O},$$

де $g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)$ − деякий невідомий диференціальний вираз з аналітичним символом, а $C(\nu)$ − невідома (аналітична) функція.

Задовольняючи умову (2) , одержуємо рівність

$$\varphi(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{C(\nu)\int_0^T \exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]\, dt\right\}\Bigg|_{\nu=O}.$$

Покладемо

$$C(\nu) = \frac{a(\nu)}{\exp[a(\nu)T] - 1}.$$

Тоді

$$\varphi(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{\exp[\nu \cdot x]\}\Big|_{\nu=O},$$

звідки одержуємо $g(x) = \varphi(x)$.

Отже, розв'язок задачі (1), (2) можна подати у вигляді

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\exp[a(\nu)t + \nu\cdot x]}{\eta(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=O}, \tag{7}$$

де

$$\eta(\nu) = \frac{\exp[a(\nu)T] - 1}{a(\nu)}. \tag{8}$$

Нехай $P = \{\nu \in \mathbb{C}^s : \eta(\nu) = 0\}$. Зауважимо, що $P \neq \varnothing$ і $P \neq \mathbb{C}^s$ з огляду на припущення $a(\nu) \neq \text{const}$. Тому у формулу (7) для знаходження розв'язку задачі (1), (2) входить знаменник, який може перетворюватися в нуль. Отже, для випадку, коли $\varphi \in K_{\mathbb{C}^s}$, ця формула є незастосовною.

Зауваження 1. *Формулу* (7) *не можна використати, наприклад, якщо* $s = 2$, $a(\nu) = \nu_1^2 + \nu_2^2$, $T = \pi$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1 \exp[x_2]\sin[x_2]$.

Сформулюємо та доведемо теорему, яка з'ясовує застосовність формули (7) для випадку, коли $\varphi \in K_M$, де M – деяка підмножина $\mathbb{C}^s$.

Теорема 1. *Нехай* $\varphi \in K_{\mathbb{C}^s \setminus P}$, *де* P – *множина нулів функції* (8). *Тоді у класі функцій* $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \setminus P}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який можна знайти за формулою* (7).

Д о в е д е н н я. Встановимо спочатку існування розв'язку задачі в $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \setminus P}$. Нехай $\varphi(x)$ – квазіполіном з класу $K_{\mathbb{C}^s \setminus P}$ вигляду (4). Тоді, враховуючи (6), з формули (7) одержимо

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\exp[a(\nu)t + \nu\cdot x]}{\eta(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha_j}. \tag{9}$$

Оскільки $\alpha_j \in \mathbb{C}^s \setminus P$, то функція (9) визначена коректно. Вона справджує рівняння (1) та умову (2). Крім того, знайдена функція $U(t,x)$, очевидно, є квазіполіномом вигляду (5), тобто належить до класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \setminus P}$. *Існування* розв'язку задачі (1), (2) у класі $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \setminus P}$ доведено.

Доведемо *єдиність* знайденого розв'язку у виділеному класі квазіполіномів методом від супротивного. Нехай існують два різних розв'язки $U_1(t,x)$ та $U_2(t,x)$ задачі (1), (2), причому $U_1, U_2 \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \setminus P}$. Тоді їх різниця $V(t,x) = U_1(t,x) - U_2(t,x)$ належить до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \setminus P}$, крім того, є розв'язком рівняння (1) і справджує однорідну умову (3). Однак, як показано у [5], $V \in K_{\mathbb{C},P}$. Оскільки $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \setminus P} \cap K_{\mathbb{C},P} = \{0\}$, то $V(t,x) = 0$. Тому $U_1(t,x) = U_2(t,x)$. Одержали суперечність. Теорему доведено. ♦

Приклад 1. Знайти в шарі $\{(t, x_1, x_2) : t \in (0,\pi), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ розв'язок задачі:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] U(t, x_1, x_2) = 0,$$

$$\int_0^\pi U(t, x_1, x_2)\, dt = x_1 + x_2^2. \tag{10}$$

▼ Для цієї задачі маємо: $T = \pi$, $a(\nu) = \nu_1^2 + \nu_2^2$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$,

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2, \qquad \eta(\nu) = \frac{\exp[\pi(\nu_1^2 + \nu_2^2)] - 1}{\nu_1^2 + \nu_2^2},$$

$$P = \{(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{C}^2 : \nu_1^2 + \nu_2^2 = ki, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, i^2 = -1\}.$$

Оскільки $\nu = (0, 0) \notin P$, то за теоремою 1 існує єдиний розв'язок задачі (10) у класі $K_{\mathbb{C}, \mathbb{C}^2 \setminus P}$. Знайдемо його за формулою (7):

$$U(t, x) =$$

$$= \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu_1} + \frac{\partial^2}{\partial \nu_2^2} \right) \left(\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2) \exp[(\nu_1^2 + \nu_2^2)t + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2]}{\exp[\pi(\nu_1^2 + \nu_2^2)] - 1} \right) \right\} \Bigg|_{\nu_1 = \nu_2 = 0} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2^2 + 2t}{\pi} - 1. \qquad \blacktriangle$$

2.2. Побудова часткового розв'язку задачі* (1), (2) *у класі існування неєдиного розв'язку задачі. Для функції $\eta(\nu)$ вигляду (8) і $\alpha \in P$ введемо таку множину:

$$\Omega(\alpha) = \left\{ r \in \mathbb{Z}_+^s : \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^r \eta \Bigg|_{\nu = \alpha} \neq 0 \right\},$$

де $r = (r_1, r_2, \ldots, r_s)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s)$, $\left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^r \eta = \frac{\partial^{|r|} \eta}{\partial \nu_1^{r_1} \partial \nu_2^{r_2} \ldots \partial \nu_s^{r_s}}$, $|r| = \sum_{i=1}^{s} r_i$.

Якщо $\varphi \in K_P$, то розв'язок задачі (1), (2) існує у класі $K_{\mathbb{C}, P}$, однак він не є єдиним і знаходиться з точністю до розв'язків задачі (1), (3), що містяться в $K_{\mathbb{C}, P}$. Тому ставиться питання про знаходження часткових розв'язків задачі (1), (2) у класі $K_{\mathbb{C}, P}$.

Нехай $\varphi \in K_P$ і має вигляд

$$\varphi(x) = Q(x) \exp[\alpha \cdot x], \tag{11}$$

де $Q(x)$ – поліном степеня $n \in \mathbb{N}$ за сукупністю змінних, $\alpha \in P$.

Введемо в розгляд таку функцію:

$$\rho(t, x, \nu) = [\eta(\nu)]^{n+1} Q\left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \frac{\exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]}{\eta(\nu)} \right\}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Нехай* $\varphi \in K_P$ *і має вигляд* (11), *а* $r_0 \in \Omega(\alpha)$ – *довільний вектор, для якого виконується рівність* $|r_0| = \min_{r \in \Omega(\alpha)} |r|$. *Тоді частковий розв'язок задачі* (1), (2) *можна знайти за формулою*

$$U(t, x) = \frac{\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^{r^*} \rho(t, x, \nu) \right\} \Big|_{\nu = \alpha}}{\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^{r^*} ([\eta(\nu)]^{n+1}) \right\} \Big|_{\nu = \alpha}}, \tag{13}$$

де $\rho(t, x, \nu)$ – *функція вигляду* (12), r^* – *довільний вектор, такий що* $|r^*| = (n+1)|r_0|$, *причому* $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^{r^*} ([\eta(\nu)]^{n+1}) \right\} \Big|_{\nu = \alpha} \neq 0$.

Д о в е д е н н я. Функція (13) справджує рівняння (1), оскільки вона отримана шляхом диференціювання розв'язку $\exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]$ рівняння за вектор-параметром ν і домноженням на функцію, що залежить лише від вектор-параметра ν. Покажемо, що для функції (13) виконується умова (2). Для цього досить довести, що

$$\int_0^T \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r^*} \rho(t, x, \nu) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} dt = Q(x) \exp[\nu \cdot x] \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r^*} [\eta(\nu)]^{n+1} \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}.$$

Справді,

$$\int_0^T \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r^*} \rho(t, x, \nu) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} dt = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r^*} \left(\int_0^T \rho(t, x, \nu)\, dt \right) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r^*} \left([\eta(\nu)]^{n+1} Q\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \frac{\int_0^T \exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]\, dt}{\eta(\nu)} \right) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r^*} \left([\eta(\nu)]^{n+1} Q\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \{\exp[\nu \cdot x]\} \right) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r^*} ([\eta(\nu)]^{n+1} Q(x) \exp[\nu \cdot x]) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}.$$

З умови $|r_0| = \min_{r \in \Omega(\alpha)} |r|$ випливає, що $\forall\, r \in \mathbb{Z}_+^s : |r| < |r_0|$ маємо рівності $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r} [\eta(\nu)] \right\}\Big|_{\nu=\alpha} = 0$, а звідси, враховуючи те, що $|r^*| = (n+1)|r_0|$, одержуємо, що $\forall\, r \in \mathbb{Z}_+^s : |r| < |r_0|$ виконуються рівності

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r} ([\eta(\nu)]^{n+1}) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} = 0.$$

Оскільки

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r^*} ([\eta(\nu)]^{n+1}) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} \neq 0,$$

то отримаємо

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r^*} ([\eta(\nu)]^{n+1} Q(x) \exp[\nu \cdot x]) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} =$$

$$= Q(x) \exp[\nu \cdot x] \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^{r*} ([\eta(\nu)]^{n+1}) \right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}.$$

Отже, отримуємо $\int_0^T U(t, x)\, dt = Q(x) \exp[\alpha \cdot x]$.

Теорему доведено. ♦

Зауваження 2. *Якщо* $r^* = (n+1)r_0$, *то*

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r^*}([\eta(\nu)]^{n+1})\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} = \frac{(r^*)!}{(r_0\,!)^{n+1}}\left[\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r_0}\eta(\nu)\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}\right]^{n+1}.$$

Зауваження 3. *Для довільного квазіполінома* $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} Q_j(x)\exp[\alpha_j \cdot x]$ (*правої частини умови* (2)) *з класу* K_P *частковий розв'язок задачі* (1), (2) *можна знайти у вигляді* $U(t,x) = \sum\limits_{j=1}^{m} U_j(t,x)$, *де* $U_j(t,x)$ – *часткові розв'язки задачі* (1), (2), *побудовані за квазіполіномами* $Q_j(x)\exp[\alpha_j \cdot x]$, $j = 1,2,\dots,m$.

Приклад 2. Знайти в шарі $\{(t,x_1,x_2) : t \in (0,\pi), (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ розв'язок задачі:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]U(t,x_1,x_2) = 0,$$

$$\int\limits_0^{\pi} U(t,x_1,x_2)\,dt = x_1\exp[x_2]\sin x_2. \qquad (14)$$

▼ Відповідно до *зауваження 1* розв'язок задачі (14) за формулою (7) знайти неможливо.

Для цієї задачі маємо

$$T = \pi,\ a(\nu) = \nu_1^2 + \nu_2^2,\ \nu = (\nu_1,\nu_2),$$

$$\varphi(x_1,x_2) = x_1\exp[x_2]\sin x_2, \qquad \eta(\nu) = \frac{\exp[\pi(\nu_1^2+\nu_2^2)]-1}{\nu_1^2+\nu_2^2},$$

$$P = \{(\nu_1,\nu_2) \in \mathbb{C}^2 : \nu_1^2 + \nu_2^2 = ki,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ i^2 = -1\}.$$

Для функції вигляду

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{2i}x_1(\exp[(1+i)x_2] - \exp[(1-i)x_2])$$

скористаємось *зауваженням 3*. Точки $\nu = (0, 1 \pm i)$ належать до множини P. Обчислюємо $\left.\frac{\partial\eta}{\partial\nu_1}\right|_{\nu=(0,1\pm i)} = 0$, $\left.\frac{\partial\eta}{\partial\nu_2}\right|_{\nu=(0,1\pm i)} = \mp\pi i$, тобто $r_0 = (0,1)$ для обох точок $\nu = (0,1\pm i)$. Оскільки $n = 1$ і

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}([\eta(\nu)]^2)\right\}\Bigg|_{\nu=(0,1\pm i)} = \mp 4\pi^2 i,$$

то $r^* = (0,2)$ для кожної з точок $\nu = (0,1\pm i)$. Функція (12) для задачі (14) має вигляд

$$\rho(t,x,\nu) = \frac{\exp[a(\nu)t + \nu_1x_1 + \nu_2x_2]}{[a(\nu)]^2}\{[(2\nu_1(t-\pi) + x_1)a(\nu) + 2\nu_1]\times$$

$$\times\exp[\pi a(\nu)] - 2\nu_1 - a(\nu)(2\nu_1t + x_1)\}.$$

За формулою (13) згідно із *зауваженням 3* знаходимо

$$U(t,x)=\left(\frac{\frac{1}{2i}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\rho(t,x,\nu)\right\}\Big|_{\nu=(0,1+i)}}{\left\{\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}([\eta(\nu)]^2)\right\}\Big|_{\nu=(0,1+i)}}-\frac{\left\{\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\rho(t,x,\nu)\right\}\Big|_{\nu=(0,1-i)}}{\left\{\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}([\eta(\nu)]^2)\right\}\Big|_{\nu=(0,1-i)}}\right)=$$

$$=\frac{\pi x_1\exp[x_2]}{2i}\left\{\frac{2(2(1+i)t+x_2)(1-i)+4\pi+3i}{-4\pi^2 i}\exp[i(2t+x_2)]-\right.$$

$$\left.-\frac{2(2(1-i)t+x_2)(1+i)+4\pi-3i}{4\pi^2 i}\exp[-i(2t+x_2)]\right\}=$$

$$=\frac{x_1\exp[x_2]}{8\pi}\{(2(2(1+i)t+x_2)(1-i)+4\pi+3i)\exp[i(2t+x_2)]+$$

$$+(2(2(1-i)t+x_2)(1+i)+4\pi-3i)\exp[-i(2t+x_2)]\}=$$

$$=\frac{x_1\exp[x_2]}{8\pi}\{(8t+2x_2(1-i)+4\pi+3i)\exp[i(2t+x_2)]+$$

$$+((8t+2x_2(1+i)+4\pi-3i))\exp[-i(2t+x_2)]\}.$$

Отже,шуканий розв'язок задачі (14) має вигляд

$$U(t,x_1,x_2)=\frac{x_1\exp[x_2]}{4\pi}\{(8t+2x_2+4\pi)\cos(2t+x_2)-$$

$$-(3-2x_2)\sin(2t+x_2)\}. \qquad \blacktriangle$$

Зауваження 4. *Якщо* $\varphi\in K_P$ *і має вигляд* $\varphi(x)=C\exp[\alpha\cdot x]$, *де* $C\in\mathbb{R}$, *а* r_0 *– довільний вектор з* $\Omega(\alpha)$, *для якого* $|r_0|=\min\limits_{r\in\Omega(\alpha)}|r|$, *то частковий розв'язок задачі* (1), (2) *можна знайти за формулою*

$$U(t,x)=\frac{C\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r_0}\exp[a(\nu)t+\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=\alpha}}{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r_0}\eta(\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha}}. \qquad (15)$$

Приклад 3. Знайти в шарі $\{(t,x_1,x_2):t\in(0,\pi),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\}$ розв'язок задачі для диференціально-функціонального рівняння:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}-\exp[1]U(t,x_1,x_2)+U(t,x_1,x_2+1)=0,$$

$$\int_0^\pi U(t,x_1,x_2)\,dt=\exp[x_1+x_2]\cos x_1. \qquad (16)$$

▼ Для цієї задачі маємо: $T=\pi$, $a(\nu)=\nu_1^2+\exp[1]-\exp[\nu_2]$,

$$\eta(\nu)=\frac{\exp[\pi(\nu_1^2+\exp[1]-\exp[\nu_2])]-1}{\nu_1^2+\exp[1]-\exp[\nu_2]},$$

$$P=\{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{C}^2:\nu_1^2+\exp[1]-\exp[\nu_2]=ki,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ i^2=-1\},$$

$$\varphi(x_1,x_2)=\frac{\exp[(1+i)x_1+x_2]+\exp[(1-i)x_1+x_2]}{2}.$$

Маємо, що $(1 \pm i, 1) \in P$. Поліноми при $\exp[(1 \pm i)x_1 + x_2]$ мають нульовий степінь, тому використаємо формулу (15) та *зауваження 3*. Оскільки $\left.\frac{\partial \eta}{\partial \nu_1}\right|_{\nu=(1\pm i,1)} = \pi(1 \mp i)$, то $r_0 = (1,0)$ для $\nu = (1 \pm i, 1)$. Обчислюємо:

$$U(t, x_1, x_2) = \frac{\left.\left\{\frac{\partial}{\partial \nu_1} \exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]\right\}\right|_{\nu=(1+i,1)}}{2 \left.\frac{\partial \eta}{\partial \nu_1}\right|_{\nu=(1+i,1)}} +$$

$$+ \frac{\left.\left\{\frac{\partial}{\partial \nu_1} \exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]\right\}\right|_{\nu=(1-i,1)}}{2 \left.\frac{\partial \eta}{\partial \nu_1}\right|_{\nu=(1-i,1)}} =$$

$$= \frac{\exp[x_1 + x_2]}{2\pi} \left\{ \frac{(2(1+i)t + x_1)\exp[i(2t + x_1)]}{1-i} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2(1-i)t + x_1)\exp[-i(2t + x_1)]}{1+i} \right\} = \frac{\exp[x_1 + x_2]}{2\pi} \times$$

$$\times \left\{ -4t \sin(2t + x_1) + x_1 \cos(2t + x_1) - x_1 \sin(2t + x_1) \right\}. \qquad \blacktriangle$$

3. Висновки. У шарі $\{(t,x) : t \in (0,T),\ x \in \mathbb{R}^s\}$, де $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, для однорідного диференціального рівняння із частинними похідними першого порядку за часом та в загальному випадку нескінченного порядку за просторовими координатами з неоднорідною інтегральною часовою умовою:

– виділено клас квазіполіномів, у якому розв'язок задачі існує та є єдиним;

– за умови однозначної розв'язності задачі запропоновано диференціально-символьний метод побудови її розв'язку, причому для побудови розв'язку потрібна скінченна кількість операцій диференціювання;

– за умови існування неєдиного розв'язку задачі у більш ширшому класі квазіполіномів подано формули для побудови часткового її розв'язку.

Наведено конкретні приклади задач з неоднорідною інтегральною часовою умовою для рівняння коливань мембрани та диференціально-функціонального рівняння, для яких виділено класи квазіполіномів як класи однозначної розв'язності та класи існування неєдиного розв'язку, а також реалізовано вказані у статті формули для побудови відповідно єдиного та часткового розв'язків задач.

1. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 2. – С. 294–304.
2. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 12–19.
3. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Задача з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними першого порядку за часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 7–16.
   Те саме: *Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with integral condition for a partial differential equation of the first order with respect to time // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 3. – P. 293–304.
4. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. – 292 с.
5. *Каленюк П. І., Нитребич З. М., Когут І. В.* Про ядро задачі з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 5–11.

6. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–140.
7. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – Москва: Высш. шк., 1995. – 301 с.
8 *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 9. – С. 71–102.
9. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887–892.
   Те саме: *Pul'kina L. S.* A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation // Different. Equat. – 2004. – **40**, No. 7. – P. 947–953.
10. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.
   Те саме: *Fardigola L. V.* Test for propriety in a layer of a boundary problem with integral condition // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, No. 11. – P. 1388–1394.
11. *Bouziani A.* Initial boundary-value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **291**. – P. 371–386.
12. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation. Subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. – **21**. – P. 155–160.
13. *Dao-Qing Dai, Yu Huang*. On a mixed problem with integral conditions for one-dimensional parabolic equation // Appl. Anal. – 2006. – **85**, No. 9. – P. 1113–1121.
14. *Denche M., Memou A.* Boundary value problem with integral conditions for a linear third-order equation // J. Appl. Math. – 2003. – No. 11. – P. 553–567.
15. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)
16. *Mehraliev Y. T., Azizbekov E. I.* A non-local boundary-value problem with integral conditions for a second order hyperbolic equations // J. Quality Measurement and Anal. – 2011. – **7**, No. 1. – P. 27–40.
17. *Mesloub S., Bouziani A.* Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations // J. Appl. Math. – 2001. – **1**, No. 3. – P. 107–116.
18. *Molaei H.* Optimal control and problem with integral boundary conditions // Int. J. Contemp. Math. Sci. – 2011. – **6,** No. 48. – P. 2385–2390.

ЗАДАЧА С НЕОДНОРОДНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВРЕМЕННЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ И БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Выделен класс квазиполиномов как класс однозначной разрешимости задачи с неоднородным интегральным временным условием для однородного уравнения в частных производных первого порядка по времени и в общем случае бесконечного порядка по пространственным переменным с постоянными коэффициентами. В этом классе решение задачи представлено в виде действия дифференциального выражения, символом которого является правая часть интегрального условия, на мероморфную функцию параметров, которые полагаются равными нулю после действия оператора. В более широком классе квазиполиномов – классе существования неединственного решения задачи – предложена формула для построения ее частных решений.

PROBLEM WITH NONHOMOGENEOUS INTEGRAL TIME CONDITION FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF FIRST ORDER IN TIME AND INFINITE ORDER IN SPATIAL VARIABLES

A class of quasipolynomials as a class of unique solvability of the problem with nonhomogeneous integral time condition for homogeneous partial differential equation of first order in time and, in general case, infinite order in spatial variables with constant coefficients is distinguished. In this class, the solution of the problem is represented in a form of action of a differential expression, whose symbol is the right-hand side of the integral condition, onto a certain meromorphic function of parameters, with further assuming those parameters equal to zero. In a wider class (the class of existence of nonunique solution of the problem) a formula for constructing its partial solutions is proposed.

[1] Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів,
[2] Жешувський ун-т, Жешув, Польща

Одержано
20.09.12