УДК 517.95+534.1

П. Я. Пукач

ЯКІСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ СТРІЧКИ КОНВЕЄРА

Викладено методику якісного дослідження розв'язку математичної моделі коливань стрічки конвеєра на основі загальних підходів теорії нелінійних крайових задач. Розглянуто випадок перебування коливальної системи в момент часу, достатньо віддалений від початкового. Методика базується на застосуванні методу монотонності та методу Гальоркіна і дозволяє обґрунтувати коректність розв'язку моделі, а також дає можливість при її дослідженні застосовувати різноманітні наближені методи.

Вступ. Актуальною інженерно-технічною проблемою є вивчення динамічних процесів у нелінійних коливальних системах, що описують поперечні (поздовжні) коливання при переміщеннях вантажів за допомогою конвеєрів стрічкового (канатного) типу [6, 7]. Ця проблема достатньо досліджена у випадку коливальних систем, що моделюються лінійними диференціальними рівняннями. Хоча всі реальні технічні конструкції тою чи іншою мірою описуються нелінійними математичними моделями, значну частину практичних розрахунків здебільшого виконано на основі суто лінійної теорії [3]. Очевидно, що такі розрахунки не приводять до цілком адекватного відображення технічних (зокрема, динамічних) явищ, оскільки процеси в реальних системах не можуть бути описані в термінах виключно лінійної теорії. До того ж під час дослідження змістовно корисних практичних задач переважно вимушено не враховують нелінійність пружних властивостей середовища, ігнорують різного роду нелінійні сили опору тощо. Все це призводить до зниження цінності отриманих результатів дослідження і до визнання необхідності проведення розрахунків на основі нелінійної теорії. Асимптотичні методи нелінійної механіки дозволили дослідити широкий клас механічних коливальних систем у випадку квазілінійної залежності амплітуди коливань від сили опору (див., для прикладу, [5]). Для випадку нелінійного закону пружності матеріалу, суттєво нелінійної залежності амплітуди коливань від сил опору та змінної швидкості руху стрічки конвеєра задача пов'язана з принциповими математичними труднощами, оскільки відсутні загальні аналітичні методи розв'язування такого класу задач. З іншого боку, якісні методи загальної теорії нелінійних крайових задач дають змогу для широкого класу коливальних систем отримати результати коректності розв'язку моделі [1, 2, 4] та в подальшому при її дослідженні застосовувати різноманітні наближені методи.

Постановка задачі. Наведемо методику якісного дослідження розв'язку математичної моделі нелінійних коливань за умови лінійного (змінного за просторовою змінною) закону пружності та нелінійної сили опору. Модель описується задачею для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + g(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t), \qquad p > 2\,, \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0\,. \tag{2}$$

Рівняння (1) розглядається в області $Q_T = (0,\ell)\times(-\infty,T)$, $\ell, T < +\infty$. Зазначимо, що задача (1), (2) є задачею без початкових умов.

Метою роботи є дослідження задачі без початкових умов для нелінійного рівняння другого порядку та отримання умов коректності розв'язку математичної моделі − достатніх умов існування та єдиності розв'язку.

Формулювання основного результату. Припустимо, що:

(**I**) функція $a(x) \in L^{\infty}(0,\ell)$, $a(x) \ge a_0 > 0$ для майже всіх $x \in (0,\ell)$;

(**II**) функція $g(x) \in L^{\infty}(0,\ell)$, $g(x) \ge g_0 > 0$ для майже всіх $x \in (0,\ell)$;

(**III**) $f \in L^{p'}(Q_T)$, $f \in C((-\infty,T], L^{p'}(0,\ell))$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Надалі будемо позначати $Q_{s_1,s_2}=(0,\ell)\times(s_1,s_2)$ для довільних скінченних s_1, s_2, а через S_T – бічну поверхню області Q_T.

Введемо тепер основні функціональні простори, що використовуються нижче, та норми в цих просторах:

$H_0^1(0,\ell)=\{u\in H^1(0,\ell) : u|_{x=0}=u|_{x=\ell}=0\}$,

$$\|u\|_{H_0^1(0,\ell)}=\left(\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)^{1/2};$$

$H_0^1(Q_{\tau,T})=\{u\in H^1(Q_{\tau,T}) : u|_{S_{\tau,T}}=0\}$, де $S_{\tau,T}$ – бічна поверхня області $Q_{\tau,T}$, τ – довільне число з інтервалу $(-\infty,T]$, і $H_{0,\mathrm{loc}}^1(\overline{Q}_T)=\{u\in H_0^1(Q_{\tau,T})\}$,

$$\|u\|_{H_0^1(Q_{\tau,T})}=\left(\int_{Q_{\tau,T}}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx\,dt\right)^{1/2};$$

$L_{\mathrm{loc}}^r(\overline{Q}_T)=\{u\in L^r(Q_{\tau,T})\}$, $\qquad r\in(1,+\infty)$.

Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називаємо функцію

$$u\in C((-\infty,T], H_0^1(0,\ell))\cap L^{\infty}((-\infty,T), H_0^1(0,\ell)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in C((-\infty,T], L^2(0,\ell))\cap L^p(Q_T),$$

яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{Q_{t_1,t_2}}\left[-\frac{\partial v}{\partial t}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+g(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t}v-f(x,t)v\right]dx\,dt+$$

$$+\int_0^{\ell}\left[\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t_1)}{\partial t}\right]v\,dx=0 \qquad (3)$$

для довільних t_1, $t_2\in(-\infty,T)$ та для довільної функції v такої, що

$$v\in L_{\mathrm{loc}}^2((-\infty,T), H_0^1(0,\ell))\cap L_{\mathrm{loc}}^p((-\infty,T), L^p(0,\ell)),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\in L_{\mathrm{loc}}^2((-\infty,T), L^2(0,\ell)).$$

Основний результат цієї статті полягає в наступному:

при виконанні умов (**I**), (**II**), (**III**) *задача* (1), (2) *має узагальнений розв'язок* u.

Зауваження. Якщо, крім того, виконується умова

$$\lim_{t\to-\infty}\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx=0,$$

цей розв'язок єдиний. Зі сказаного вище також випливає, що для узагальненого розв'язку $u(x,t)$ задачі (1), (2) маємо

$$\lim_{t\to-\infty}\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx = 0\,.$$

Методика отримання основного результату. *Існування.* Нехай $\{\varphi_k(x)\}$ – база в просторі $H_0^1(0,\ell)\bigcap L^p(0,\ell)$ і $t_0 < T$ – довільне число. Тоді за методом Гальоркіна система функцій

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^N(t)\varphi_k(x)\,,$$

де $N = 1,2,\ldots$, утворює послідовність наближених розв'язків задачі (1), (2) з нульовими початковими умовами при $t = t_0$, причому функції $C_k^N(t)$ визначаються як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int_0^{\ell}\left[\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\varphi_k + a(x)\frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + g(x)\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^N}{\partial t}\varphi_k\right]dx -$$

$$-\int_0^{\ell} f(x,t)\varphi_k\,dx = 0, \qquad k = 1,\ldots,N\,, \tag{4}$$

з початковими умовами

$$C_k^N(t_0) = 0, \qquad \frac{\partial C_k^N}{\partial t}(t_0) = 0\,. \tag{5}$$

Помножимо (4) на $\dfrac{\partial C_k^N}{\partial t}$ і зінтегруємо результат від t_0 до τ, де $t_0 < \tau \le T$:

$$\int_{Q_{t_0,\tau}}\left[\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\frac{\partial u^N}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial u^N}{\partial t\partial x} + g(x)\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p -\right.$$

$$\left.- f(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial t}\right]dx\,dt = 0\,. \tag{6}$$

Перетворимо та оцінимо інтеграли з рівності (6). Для першого одержимо

$$I_1 = \int_{Q_{t_0,\tau}}\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial u^N(x,\tau)}{\partial t}\right)^2 dx\,.$$

Використовуючи умову (**I**), отримаємо

$$I_2 = \int_{Q_{t_0,\tau}} a(x)\frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial u^N}{\partial t\partial x}\,dx\,dt \ge \frac{a_0}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2 dx\,.$$

Згідно з умовою (**II**),

$$I_3 = \int_{Q_{t_0,\tau}} g(x)\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p dx\,dt \ge g_0\int_{Q_{t_0,\tau}}\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p dx\,dt\,.$$

Нарешті, з умови (**III**) одержимо

$$I_4 = -\int_{Q_{t_0,\tau}} f(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial t}\,dx\,dt \ge -C(\delta_0)\int_{Q_{t_0,\tau}}|f(x,t)|^{p'}\,dx\,dt -$$

$$-\delta_0 p\int_{Q_{t_0,\tau}}\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p dx\,dt\,,$$

де $\delta_0 > 0$ – довільне число, $C(\delta_0) > 0$.

В результаті отримаємо нерівність

$$\int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial u^N(x,\tau)}{\partial t}\right)^2 + a_0\left(\frac{\partial u^N(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\right]dx + (2g_0 - 2\delta_0 p)\int_{Q_{t_0,\tau}} \left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p dx\,dt \le$$

$$\le C(\delta_0)\int_{Q_{t_0,\tau}} |f(x,t)|^{p'}\,dx\,dt\,.$$

Виберемо $\delta_0 = g_0/p$. Тоді

$$\left\|u^N\right\|_{L^\infty((t_0,T),\,H^1_{0,1}(0,\ell))} \le C_1\,,$$

$$\left\|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right\|_{L^\infty((t_0,T),\,L^2(0,\ell))} \le C_1\,, \qquad \left\|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right\|_{L^p(Q_{t_0,\tau})} \le C_1\,, \tag{7}$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від N. З апріорних оцінок (7) отримаємо, що існує підпослідовність $\{u^k\} \subset \{u^N\}$ така, що

$$u^k \to u \qquad {}^*\text{-слабко в} \quad L^\infty((t_0,T),\,H^1_0(0,\ell))\,,$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} \qquad {}^*\text{-слабко в} \quad L^\infty((t_0,T),\,L^2(0,\ell))\,,$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{слабко в} \quad L^p(Q_{t_0,T})\,,$$

$$g(x)\left|\frac{\partial u^k}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^k}{\partial t} \to g(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{слабко в} \quad L^{p'}(Q_{t_0,T})\,,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,.$$

Помноживши далі (4) на $C^N_{kt}(t+\delta)$, де δ − довільне додатне число, маємо

$$\int_0^\ell \left(\frac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial t^2}\frac{\partial u^N(x,t+\delta)}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 u^N(x,t+\delta)}{\partial x\partial t}\right)dx +$$

$$+\int_0^\ell \left(g(x)\left|\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\frac{\partial u^N(x,t+\delta)}{\partial t} -\right.$$

$$\left. - f(x,t)\frac{\partial u^N(x,t+\delta)}{\partial t}\right)dx = 0\,. \tag{8}$$

Зауважимо, що з використанням методики [1] з рівності (8) можна показати, що

$$\int_0^\ell \left[\left|\frac{\partial u^N(x,t+\delta)}{\partial t} - \frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial u^N(x,t+\delta)}{\partial x_i} - \frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x_i}\right|^2\right]dx \le \varepsilon$$

для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ при достатньо малому $\delta > 0$. Тому за теоремою Асколі − Арцела отримаємо, що послідовність $\dfrac{\partial u^N}{\partial t}$ є одностайно неперервною в просторі $C([t_0,T],\,L^2(0,\ell))$, а послідовність u^N є одностайно неперервною в просторі $C([t_0,T],\,H^1_{0,w}(0,\ell))$, де $H^1_{0,w}(0,\ell)$ − топологічний простір $H^1_0(0,\ell)$ зі слабкою збіжністю. Отже, можемо вважати, що

$$\int_0^{\ell} \frac{\partial u^k}{\partial t}(x,t) v\, dx \to \int_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v\, dx\,,$$

$$\int_0^{\ell} \frac{\partial u^k}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\, dx \to \int_0^{\ell} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\, dx \tag{9}$$

рівномірно на $[t_0, T]$ для довільної функції $v \in H_0^1(0,\ell)$. Використовуючи (4) і (9), отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + g(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t} v - fv \right] dx\, dt +$$

$$+ \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_2) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t_1) \right) v\, dx = 0$$

для довільної функції

$$v \in H^1(Q_{t_0,T}) \cap L^p(Q_{t_0,T}) \cap L^2\big((t_0,T), H_0^1(0,\ell)\big)$$

і для довільних $t_1,\, t_2 \in [t_0, T]$, $t_1 < t_2$. Зрозуміло, що з (5) випливає виконання умов

$$u(x,t_0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0) = 0\,. \tag{10}$$

Таким чином, $u(x,t)$ є розв'язком задачі (1), (2) в $Q_{t_0,T}$ в сенсі інтегральної тотожності (3) для довільної функції

$$v \in L^2\big((t_0,T), H_0^1(0,\ell)\big) \cap L^p(Q_{t_0,T}), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2\big((t_0,T), L^2(0,\ell)\big)\,.$$

Розглянемо тепер послідовність $t_0 = T-1$, $t_0 = T-2$, $\ldots$, $t_0 = T-k$, $\ldots$, $f_k(x,t) = f(x,t)$, $(x,t) \in Q_{T-k,T}$, $f_k(x,t) = 0$, $(x,t) \in Q_T \setminus Q_{T-k}$. Використовуючи наведені вище міркування, отримаємо, що задача (1), (2), (10) з правою частиною $f_k(x,t)$ має розв'язок $u^k(x,t)$. Продовжимо u^k нулем на $Q_T \setminus Q_{T-k,T}$ і продовжений розв'язок знову позначимо через u^k. Тоді послідовність u^k буде визначена в Q_T. Аналогічно до того, як це зроблено в [1], показуємо, що u^k є фундаментальною послідовністю у просторі $C\big([t_1,t_2], H_{0,1}^1(0,\ell)\big)$.

Єдиність. Нехай u^1 і u^2 − два узагальнених розв'язки задачі (1), (2). Тоді для функції $w = u^1 - u^2$ є правильною рівність, аналогічна до (3), з якої, враховуючи зауваження, отримуємо, що $u^1 = u^2$ майже всюди в Q_T.

Висновки. Отримано умови коректності розв'язку в математичній моделі коливань нерухомої стрічки конвеєра під впливом нелінійної сили опору − достатні умови існування та єдиності. Запропонована методика дозволяє обґрунтувати коректність розв'язку моделі також і в складнішому випадку − випадку коливань рухомої стрічки. Отримані якісні результати обґрунтовують можливість застосування до вказаної задачі методу Гальоркіна та в подальшому при дослідженні динамічних характеристик розв'язків розглянутих математичних моделей коливань застосовувати різноманітні наближені методи.

1. *Колінько М. О., Лавренюк С. П., Пукач П. Я.* Задача Фур'є для нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 67–79.
2. *Лавренюк С. П., Пукач П. Я.* Мішана задача для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій за просторовими змінними області // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1523–1531.
   Те саме: *Lavrenyuk S. P., Pukach P. Ya.* Mixed problem for a nonlinear hyperbolic equation in a domain unbounded with respect to space variables // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, No. 11. – P. 1708–1718.
3. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. – Москва: Наука, 1991. – 651 с.
4. *Пукач П. Я.* Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 4. – С. 149–154.
5. *Сокіл Б. І.* Дослідження нелінійних коливань стрічок конвеєрів // Оптимізація виробничих процесів і технологічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2000. – № 394. – С. 101–104.
6. *Metrikine A. V.* Steady state response of an infinite string on a non-linear viscoelastic foundation to moving point loads // J. Sound Vib. – 2004. – **272**. – P. 1033–1046.
7. *Santee D. M., Goncalves, P. B.* Oscillations of a beam on a non-linear elastic foundation under periodic loads // Shock Vib. – 2006. – **13**. – P. 273–284.

КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛЕНТЫ КОНВЕЙЕРА

Изложена методика качественного исследования решения математической модели колебаний ленты конвейера на основании общих подходов теории нелинейных краевых задач. Рассмотрен случай пребывания системы в момент времени, достаточно удаленный от начального. Указанная методика, базирующаяся на применении метода монотонности и метода Галеркина, позволяет обосновать корректность решения модели и дает возможность при ее исследовании применять разнообразные приближенные методы.

QUALITATIVE INVESTIGATION METHODS OF MATHEMATICAL MODEL OF NONLINEAR VIBRATIONS OF BELT CONVEYOR

Methodology of qualitative investigation of solution of mathematical model of belt conveyor vibrations on the basis of general approaches of nonlinear boundary value problems theory is developed. The case of the system being in time that was far away from the initial is considered. The methodology based on the application of monotony method and Galerkin method allows to substantiate the correctness of model solution and gives an opportunity to apply various approximate methods at its investigation.

Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів

Одержано
30.11.12