

**ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД ОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ В ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВБЕЗМЕЖНОГО ЦИЛІНДРА**

*Розвинуто варіаційний метод однорідних розв'язків для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для півбезмежного циліндра з вільною бічною поверхнею за заданих на торці напружень, переміщень або змішаних умов. Розв'язання задач з використанням цього методу зводиться до розв'язання безмежних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Виконано числове дослідження збіжності отриманих розв'язків. Розглянуто приклад застосування запропонованого підходу для визначення концентрації напружень у околі з'єднання торця циліндра з абсолютно жорсткою поверхнею.*

Задачі визначення напружено-деформованого стану циліндричних твердих тіл виникають у різних наукових дисциплінах, зокрема, у прикладних теоріях міцності твердих тіл [9]. Незважаючи на значні успіхи методів чисельного аналізу задач механіки та широкий вибір сертифікованих високоефективних програмних середовищ, призначених для розв'язування цих задач із використанням методу скінчених елементів [12], інтерес до аналітичних методів все ще залишається доволі високим. Про це свідчать, зокрема, наукові публікації, які продовжують появлятися (див., наприклад, [10, 11, 13–15]). Це можна пояснити декількома причинами. Однією із них є те, що наявність аналітичного розв'язку прямої задачі дозволяє істотно спростити процес розв'язування відповідних їй обернених задач.

Виділимо два відомі підходи до аналітичного розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для кругового циліндра: метод перехресної суперпозиції [2, 10] і метод однорідних розв'язків [3, 5].

Перший метод базується на поданні розв'язку у вигляді суми двох складових, одна із яких забезпечує виконання крайових умов на торці, а інша – на бічній поверхні. Кожну зі складових подають у вигляді розвинення за повними системами функцій. Наприклад, у монографії [2] для цього використовують системи гіперболічно-циліндричних і тригонометрично-циліндричних функцій. Коефіцієнти розвинень визначають підпорядкуванням розв'язку заданим крайовим умовам на торцях і на бічній поверхні циліндра. При цьому приходять до безмежної системи алгебраїчних рівнянь. Це дозволяє виразити коефіцієнти розвинень через коефіцієнти Фур'є та Фур'є – Бесселя функцій крайових умов.

В основі другого методу – подання шуканого розв'язку у вигляді розвинення за повними системами функцій, так званими однорідними розв'язками. Системами однорідних розв'язків є власні функції однієї із однорідних осесиметричних задач теорії пружності для циліндричної області. Наприклад, у монографії [3] наведено систему однорідних розв'язків осесиметричної задачі для циліндра, на бічній (циліндричній) поверхні якого задано однорідні умови в напруженнях. Належним вибором коефіцієнтів у розвиненні розв'язку і за певних обмежень можна задовольнити не-нульові крайові умови на торцях циліндра.

Порівняльний аналіз цих двох підходів виконано у монографії [2]. Тут наведено також декілька прикладів застосування методу суперпозиції до розв'язування крайових задач теорії пружності для кругового циліндра скінченної довжини.

Слід підкреслити, що однорідна крайова задача теорії пружності, власні функції якої використовують у методі однорідних розв'язків як функціональну базу для розвинення розв'язку, не є самоспряженою. Тому власні функції є неортогональними. Це істотно знижує його обчислювальну ефективність і обмежує сферу практичного застосування методу. Приклад за-

стосування методу однорідних розв'язків наведено в монографії [3]. Для знаходження коефіцієнтів розвинення використано умову мінімуму функціоналу, який визначає середньоквадратичне відхилення розв'язку від функцій крайових умов у напруженнях, заданих на торці. Обмежуючись скінченним числом  $N$  членів у поданні розв'язку, автор отримав систему  $2N$  алгебраїчних рівнянь стосовно невизначених коефіцієнтів. У роботі виконано деякі обчислення для випадку  $N = 2$ , проте числовий аналіз розв'язків для конкретних умов навантаження не проведено.

Однак цей метод широко використовувався для розв'язування плоских задач з використанням системи однорідних розв'язків П. Ф. Папковича [4]. У випадку змішаних задач, коли на торцях задано нормальні переміщення і дотичні напруження або ж нормальні напруження і дотичні переміщення, цей метод не уступає за ефективністю методу суперпозиції, оскільки він дозволяє записати прості формули, які виражають коефіцієнти розвинення шуканого розв'язку за системами однорідних розв'язків через функції крайових умов [4].

У роботах [5, 6] розвинуто варіаційний метод однорідних розв'язків для плоских задач. Згідно з цим методом підпорядкування розв'язку крайовим умовам здійснюється за квадратичною нормою  $L_2$ . Це приводить до безмежних систем алгебраїчних рівнянь стосовно коефіцієнтів розвинення шуканих розв'язків, яку розв'язували методом редукції. У [5, 6] на конкретних прикладах досліджено збіжність методу редукції і доведено ефективність варіаційного методу однорідних розв'язків для розв'язування усіх чотирьох типів крайових задач плоскої теорії пружності для прямокутної області, коли на протилежних сторонах задано умови в напруженнях, переміщеннях і змішаного типу, а також для контактної-крайових задач для кусково-однорідного тіла прямокутного перерізу [8]. До того ж цей метод виявився достатньо ефективним і для обернених задач [5, 7, 8].

Метою цієї статті є оцінка ефективності застосування варіаційного методу однорідних розв'язків до розв'язування основних крайових задач теорії пружності для півбезмежного циліндра з ненавантаженою бічною поверхнею, а також числове дослідження збіжності методу редукції залежно від умов навантаження.

Зазначимо, що існує клас прикладних задач механіки, які можна звести до розв'язування крайових задач теорії пружності для циліндра, бічна поверхня якого є ненавантажена, а до торцевих поверхонь прикладено самозрівноважене навантаження. Як приклад наведемо проблему визначення міцності клейового з'єднання [9]. Напруження, що їх зумовлюють самозрівноважені навантаження, швидко згасають із віддаленням від поверхні їх прикладання. Тому для достатньо довгих циліндрів вихідну задачу можна розбити на дві незалежні задачі для півбезмежного циліндра. У статті розглянуто такий приклад.

**1. Метод однорідних розв'язків для півбезмежного циліндра.** Розглянемо тверде тіло у формі півбезмежного циліндра  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z < \infty$ , де  $r, \theta, z$  – циліндричні координати. Тіло перебуває в осесиметричному напружено-деформованому стані, зумовленому самозрівноваженими силами, прикладеними до торцевої поверхні  $z = 0$ , заданими на цій поверхні переміщеннями або ж нормальними силами та тангенціальними переміщеннями чи навпаки. Бічна поверхня циліндра  $r = a$  вільна від навантажень. Використаємо відоме зображення Папковича – Нейбера розв'язку задачі в переміщеннях, яке з урахуванням симетрії задачі матиме вигляд [3]

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - (3 - 4\nu)\psi + y \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Тут  $\varphi$  та  $\psi$  – безрозмірні функції, що задовольняють рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{y^2} \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

$u_r, u_z$  – безрозмірні радіальна та осьова компоненти переміщення;  $y \equiv r/a, x \equiv z/a$ .

Компоненти тензора напружень виражаються через функції  $\varphi$  та  $\psi$  формулами

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{rr} = - \left( (3 - 2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - (1 - 2\nu) \frac{1}{y} \psi + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right),$$

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (-3 + 2\nu) \frac{1}{y} \psi + (1 - 2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (-2\nu) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{y} \psi \right),$$

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{rz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y},$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу,  $\mu$  – модуль зсуву.

Розв'язки рівнянь (2), (3) шукатимемо у дещо відмінному від [3] вигляді [5]:

$$\varphi = e^{-\gamma x} f_0(y), \quad (4)$$

$$\psi = e^{-\gamma x} f_1(y). \quad (5)$$

Підставивши подання (4), (5) у рівняння (2), (3), отримаємо рівняння для функцій  $f_0(y), f_1(y)$ :

$$f_0''(y) + \frac{1}{y} f_0'(y) + \gamma^2 f_0(y) = 0, \quad (6)$$

$$f_1''(y) + \frac{1}{y} f_1'(y) - \left( \frac{1}{y^2} - \gamma^2 \right) f_1(y) = 0. \quad (7)$$

Підпорядковуючи загальні розв'язки (6), (7) умові обмеженості, матимемо

$$f_0(y) = A J_0(\gamma y),$$

$$f_1(y) = B J_1(\gamma y).$$

Тут  $J_0(\gamma y)$  і  $J_1(\gamma y)$  – функції Бесселя нульового та першого порядків;  $A, B$  – невідомі сталі.

Умови ненавантаження бічних сторін циліндра

$$\sigma_{rr} \Big|_{y=1} = 0, \quad \sigma_{rz} \Big|_{y=1} = 0$$

приводять до однорідної системи рівнянь стосовно сталих  $A$  і  $B$

$$\begin{aligned} (-\gamma J_1(\gamma) + \gamma^2 J_0(\gamma))A + ((3 - 2\nu)\gamma J_0(\gamma) + (\gamma^2 - (4 - 4\nu))J_1(\gamma))B &= 0, \\ \gamma J_1(\gamma)A + ((2 - 2\nu)J_1(\gamma) - \gamma J_0(\gamma))B &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Із умови сумісності системи отримуємо трансцендентне рівняння сто-

совно  $\gamma$  :

$$\gamma^2(J_0^2(\gamma) + J_1^2(\gamma)) + (2\nu - 2)J_1^2(\gamma) = 0. \quad (9)$$

Єдиним дійсним коренем рівняння (9) є тривіальний  $\gamma = 0$ , тому розглядатимемо безмежні послідовності комплексних коренів  $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$ . Легко переконатися, що  $\gamma_k$ ,  $-\gamma_k$ ,  $\bar{\gamma}_k$  та  $-\bar{\gamma}_k$ , де риска над буквою означає комплексне спряження, є також коренями цього рівняння. У подальшому використовуватимемо дві послідовності комплексно спряжених коренів із додатною дійсною частиною, які забезпечують згасання розв'язку зі зростанням координати  $x$ .

Рівняння (9) розв'язували чисельно шляхом мінімізації нев'язки. Отримано значення перших двадцяти п'яти коренів. У табл. 1 для випадку  $\nu = 0.25$  наведено перші 15 значень коренів, заокруглених до п'яти значущих цифр.

Таблиця 1

$k$	$\alpha_k$	$\beta_k$	$k$	$\alpha_k$	$\beta_k$	$k$	$\alpha_k$	$\beta_k$
1	2.69765	1.36735	6	18.75905	2.16604	11	34.50379	2.46622
2	6.05122	1.63814	7	21.91184	2.24211	12	37.64928	2.50949
3	9.26127	1.82853	8	25.06203	2.30817	13	40.79422	2.54932
4	12.43844	1.96742	9	28.21044	2.36656	14	43.93871	2.58623
5	15.60220	2.07642	10	31.35758	2.41886	15	47.08284	2.62059

Використовуючи асимптотичні представлення для функцій Бесселя у рівнянні (9), отримуємо такі асимптотики для дійсної і уявної частин коренів  $\gamma_k$  при достатньо великих  $k$  :

$$\alpha_k^a = \pi k - \left( \frac{\ln(4\pi k)}{4\pi k} - \frac{1}{2\pi k} \left( \frac{1}{4} - 2(1 - \nu) \right) \right), \quad \beta_k^a = \frac{1}{2} \ln(4\pi k). \quad (10)$$

Відносна похибка  $\delta\alpha_k = \frac{|\alpha_k^a - \alpha_k|}{\alpha_k}$  та  $\delta\beta_k = \frac{|\beta_k^a - \beta_k|}{\beta_k}$  знаходження коренів

за формулами (10) вже при  $k \geq 10$  не перевищує  $10^{-7}$  та  $10^{-4}$  відповідно.

Для знайдених значень  $\gamma_k$  однорідна система (8) має безмежну послідовність розв'язків  $A_k$ ,  $B_k$ , які пов'язані співвідношенням

$$A_k = \left( \frac{2(\nu - 1)}{\gamma_k} + \lambda_k \right) B_k, \quad \lambda_k = \frac{J_0(\gamma_k)}{J_1(\gamma_k)}.$$

У результаті отримуємо повну систему однорідних комплексних розв'язків осесиметричної задачі  $u_{kz}(y) \exp(-\gamma_k x)$ ,  $u_{kr}(y) \exp(-\gamma_k x)$ ,  $\sigma_{krz}(y) \times \exp(-\gamma_k x)$ ,  $\sigma_{k\theta\theta}(y) \exp(-\gamma_k x)$ ,  $\sigma_{kzz}(y) \exp(-\gamma_k x)$ ,  $\sigma_{krz}(y) \exp(-\gamma_k x)$ , що згасають при  $x \rightarrow \infty$ , де

$$u_{kz}(y) = a((2 - 2\nu - \gamma_k \lambda_k) J_0(\gamma_k y) - y \gamma_k J_1(\gamma_k y)),$$

$$u_{kr}(y) = a(\gamma_k y J_0(\gamma_k y) + (2(\nu - 1) - \lambda_k \gamma_k) J_1(\gamma_k y)),$$

$$\sigma_{krz}(y) = \frac{2\mu}{a} \left( \left( (2(1 - \nu) + \gamma_k \lambda_k) \frac{1}{y} - y \gamma_k^2 \right) J_1(\gamma_k y) - (1 + \lambda_k \gamma_k) \gamma_k J_0(\gamma_k y) \right),$$

$$\sigma_{k\theta\theta}(y) = \frac{2\mu}{a} \left( (-2 + 2\nu - \gamma_k \lambda_k) \frac{1}{y} J_1(\gamma_k y) + (1 - 2\nu) \gamma_k J_0(\gamma_k y) \right),$$

$$\sigma_{kzz}(y) = \frac{2\mu}{a}((-2 + \lambda_k \gamma_k) \gamma_k J_0(\gamma_k y) + y \gamma_k^2 J_1(\gamma_k y)),$$

$$\sigma_{krz}(y) = \frac{2\mu}{a}(\lambda_k \gamma_k^2 J_1(\gamma_k y) - \gamma_k^2 y J_0(\gamma_k y)).$$

Неважко переконатися, що послідовності функцій  $\bar{u}_{kz}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)$ ,  $\bar{u}_{kr}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)$ ,  $\bar{\sigma}_{krz}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)$ ,  $\bar{\sigma}_{krz}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)$ ,  $\bar{\sigma}_{kzz}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)$ ,  $\bar{\sigma}_{krz}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)$  також утворюють повну систему однорідних розв'язків осесиметричної задачі. Йдучи за підходом [5, 6] представимо загальний розв'язок осесиметричної задачі для півбезмежного циліндра з ненавантаженою бічною поверхнею у вигляді лінійної комбінації однорідних комплексних розв'язків

$$u_z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k u_{kz}(y) \exp(-\gamma_k x) + \bar{B}_k \bar{u}_{kz}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)) + C, \quad (11)$$

$$u_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k u_{kr}(y) \exp(-\gamma_k x) + \bar{B}_k \bar{u}_{kr}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)), \quad (12)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sigma_{krz}(y) \exp(-\gamma_k x) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{krz}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)), \quad (13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sigma_{k\theta\theta}(y) \exp(-\gamma_k x) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{k\theta\theta}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)), \quad (14)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sigma_{kzz}(y) \exp(-\gamma_k x) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{kzz}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)), \quad (15)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sigma_{krz}(y) \exp(-\gamma_k x) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{krz}(y) \exp(-\bar{\gamma}_k x)). \quad (16)$$

Стала  $C$  дозволяє врахувати переміщення абсолютно жорсткого тіла. Отриманий загальний розв'язок (11)–(16) залежить від безмежної послідовності невизначених комплексних сталих  $B_k$ . Використаємо їх, щоб підпорядкувати розв'язок крайовим умовам, заданим на торці циліндра.

**2. Варіаційний метод розв'язування задач.** Розглянемо задачі, які відрізняються крайовими умовами, заданими на торці  $x = 0$  (задачі *I–IV*):

$$\sigma_{zz}|_{x=0} = \sigma(y), \quad \sigma_{rz}|_{x=0} = \tau(y), \quad (17)$$

$$u_z|_{x=0} = u(y), \quad u_r|_{x=0} = v(y), \quad (18)$$

$$\sigma_{zz}|_{x=0} = \sigma(y), \quad u_r|_{x=0} = v(y), \quad (19)$$

$$u_z|_{x=0} = u(y), \quad \sigma_{rz}|_{x=0} = \tau(y). \quad (20)$$

Тут  $\sigma(y)$ ,  $\tau(y)$ ,  $u(y)$ ,  $v(y)$  – задані функції. Функція  $\sigma(y)$  задовольняє умову самозрівноваження

$$\int_0^1 y \sigma(y) dy = 0.$$

Підпорядкування розв'язку крайовим умовам (17)–(20) здійснюватимемо за квадратичною нормою [5]. Для цього введемо для кожної із задач *I–IV* відповідний квадратичний функціонал:

$$F_I = \int_0^1 (\sigma_{zz}|_{x=0} - \sigma(y))^2 y + (\sigma_{rz}|_{x=0} - \tau(y))^2 y dy, \quad (21)$$

$$F_{II} = \int_0^1 (u_z|_{x=0} - u(y))^2 y + (u_r|_{x=0} - v(y))^2 y dy, \quad (22)$$

$$F_{III} = \int_0^1 (\sigma_{zz}|_{x=0} - \sigma(y))^2 y + (u_r|_{x=0} - u(y))^2 y dy, \quad (23)$$

$$F_{IV} = \int_0^1 (u_z|_{x=0} - u(y))^2 y + (\sigma_{rz}|_{x=0} - \tau(y))^2 y dy. \quad (24)$$

Із умови мінімуму квадратичних функціоналів (21)–(24)

$$\frac{\partial F_j}{\partial B_m} = 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial \bar{B}_m} = 0, \quad j = I, II, III, IV, \quad m = 1, 2, \dots,$$

отримуємо безмежні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^2 C_{mk}^{sp} B_k^p = K_m^s. \quad (25)$$

Коефіцієнти  $C_{mk}^{sp}$ ,  $s, p = 1, 2$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , системи (25) залежать від умов навантаження торця (17)–(20) і виражаються формулами

$$C_{mk}^{sp} = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sigma_{kzz}^p \sigma_{mzz}^s + \sigma_{krz}^p \sigma_{mrz}^s) y dy,$$

$$K_m^s = \int_0^1 (\sigma(y) \sigma_{mzz}^s + \tau(y) \sigma_{mrz}^s) y dy,$$

$$C_{mk}^{sp} = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_{kz}^p u_{mz}^s + u_{kr}^p u_{mr}^s) y dy - \int_0^1 u_{mz}^s y dy \int_0^1 u_{kz}^p y dy,$$

$$K_m^s = \int_0^1 (u(y) u_{mz}^s + v(y) u_{mr}^s) y dy - 2 \int_0^1 u(y) y dy \int_0^1 u_{mz}^s y dy,$$

$$C_{mk}^{sp} = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sigma_{kzz}^p \sigma_{mzz}^s + u_{kr}^p u_{mr}^s) y dy,$$

$$K_m^s = \int_0^1 (\sigma(y) \sigma_{mzz}^s + v(y) u_{mr}^s) y dy,$$

$$C_{mk}^{sp} = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_{kz}^p u_{mz}^s + \sigma_{krz}^p \sigma_{mrz}^s) y dy - \int_0^1 u_{mz}^s y dy \int_0^1 u_{kz}^p y dy,$$

$$K_m^s = \int_0^1 (u(y) u_{mz}^s + \tau(y) \sigma_{mrz}^s) y dy - 2 \int_0^1 u(y) y dy \int_0^1 u_{mz}^s y dy.$$

Для спрощення запису тут використано позначення

$$\sigma_{kzz}^1 = \sigma_{kzz}(y), \quad \sigma_{kzz}^2 = \bar{\sigma}_{kzz}(y), \quad \sigma_{krz}^1 = \sigma_{rz}(y), \quad \sigma_{krz}^2 = \bar{\sigma}_{krz}(y),$$

$$\sigma_{mzz}^1 = \sigma_{mzz}(y), \quad \sigma_{mzz}^2 = \bar{\sigma}_{mzz}(y), \quad \sigma_{mrz}^1 = \sigma_{mrz}(y), \quad \sigma_{mrz}^2 = \bar{\sigma}_{mrz}(y),$$

$$u_{kz}^1 = u_{kz}(y), \quad u_{kz}^2 = \bar{u}_{kz}(y), \quad u_{kr}^1 = u_{kr}(y), \quad u_{kr}^2 = \bar{u}_{kr}(y),$$

$$u_{mz}^1 = u_{mz}(y), \quad u_{mz}^2 = \bar{u}_{mz}(y), \quad u_{mr}^1 = u_{mr}(y), \quad u_{mr}^2 = \bar{u}_{mr}(y).$$

Константу  $C$  визначаємо як

$$C = \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-B_k u_{kz} - \bar{B}_k \bar{u}_{kz}) + 2u(y) \right) y dy.$$

**3. Числове дослідження збіжності методу редукції.** Дослідження задач з умовами вигляду (17)–(20) для півбезмежної смуги [5], яке провели методом редукції, показало, що швидкість збіжності числового розв'язку істотно залежить як від типу задачі  $I$ – $IV$ , так і від конкретного вигляду функцій крайових умов.

Дослідимо на характерних прикладах збіжність методу для півбезмежного циліндра. Розглянемо наступні функції правих частин для крайових умов (17)–(20) відповідно

$$\sigma(y) = \sigma_0 \exp\left(\frac{-(y - y_0)^2}{b^2}\right), \quad \tau(y) = 0, \quad y_0 = 0.5, \quad b = 0.1, \quad (26)$$

$$u(y) = u_0 \left(y^2 - \frac{1}{2}\right), \quad v(y) = u_0 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) - 1\right), \quad (27)$$

$$\sigma(y) = \sigma_0 \left(y^2 - \frac{1}{2}\right), \quad v(y) = \sigma_0 y, \quad (28)$$

$$u(y) = u_0 \left(y^2 - \frac{1}{2}\right), \quad \tau(y) = 0. \quad (29)$$

Похибки розв'язування задач  $I$ – $IV$  залежно від розмірності  $N$  редукованої системи (25) оцінюватимемо за значеннями відповідних функціоналів, обчислених на розв'язку, отриманому для вибраного  $N$ :

$$\delta_I = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{F_I^N}{2}\right)^{1/2}, \quad \delta_{II} = \frac{1}{u_0} \left(\frac{F_{II}^N}{2}\right)^{1/2},$$

$$\delta_{III} = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{F_{III}^N}{2}\right)^{1/2}, \quad \delta_{IV} = \frac{1}{u_0} \left(\frac{F_{IV}^N}{2}\right)^{1/2}.$$

Дослідження проводили для  $N = 1, \dots, 25$ . Деякі результати обчислень наведені у табл. 2.

Таблиця 2

$N$	1	3	5	7	9	11	13	15
$\delta_I$	0.1305	0.0843	0.0498	0.0267	0.0131	0.0053	0.0017	0.0006
$\delta_{II}$	0.1466	0.0504	0.0267	0.0188	0.0143	0.0112	0.0091	0.0075
$\delta_{III}$	0.2990	0.0850	0.0390	0.0290	0.0200	0.0160	0.0130	0.0110
$\delta_{IV}$	0.0960	0.0110	0.0037	0.0018	0.0017	0.0007	0.0005	0.0003

Для задач  $II$  та  $IV$  мінімальне значення  $\delta_{II} = 0.005$  та  $\delta_{IV} = 2.015 \cdot 10^{-4}$  досягається при  $N = 21$ . Подальше збільшення  $N$  призводить до зростання похибок розв'язування цих задач. Так, для  $N = 25$  отримано  $\delta_{II} = 0.036$ ,  $\delta_{IV} = 3.374 \cdot 10^{-3}$ . Для задач  $I$  та  $III$  похибки розв'язування зменшуються у цілому інтервалі зміни  $N = 1, \dots, 25$ . При  $N = 25$  для цих задач отримано  $\delta_I = 5.25 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta_{III} = 5.67 \cdot 10^{-3}$ .

На рис. 1 – рис. 4 для прикладу показані залежності нормованих значень напружень  $\sigma_{zz}^N$ ,  $\sigma_{rz}^N$ , та переміщень  $u_z^N$ ,  $u_r^N$  від координати  $y$  для задач  $I$ ,  $II$  при  $N = 3, 5, 8, 25$  (криві 1–4 відповідно). Криві 4 на цих рисунках практично збігаються із графіками заданих функцій крайових умов  $\sigma(y)$ ,  $\tau(y)$  і  $u(y)$ ,  $v(y)$ .

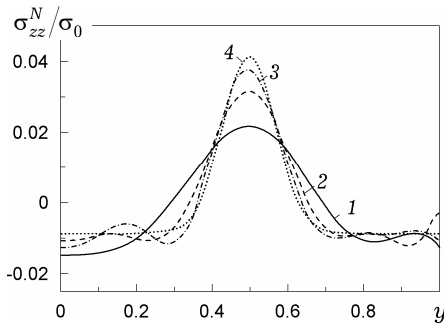


Рис. 1

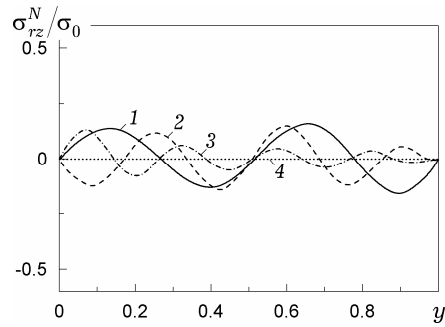


Рис. 2

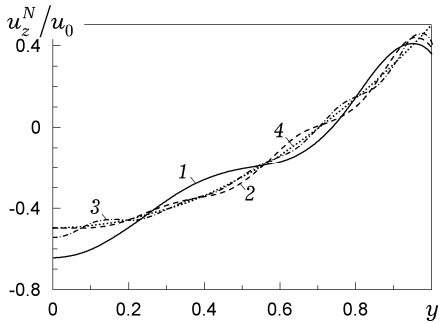


Рис. 3

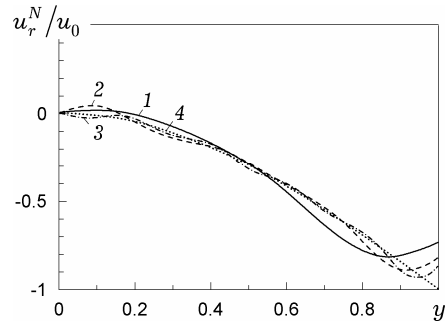


Рис. 4

Напруження швидко згасають з віддаленням від торцевої поверхні. На рис. 5 для прикладу наведено залежності напружень  $\sigma_{zz}$  і  $\sigma_{\theta\theta}$  від координати  $x$  при  $y = 1$ , обчислені за формулами (28) для  $N = 15$ .

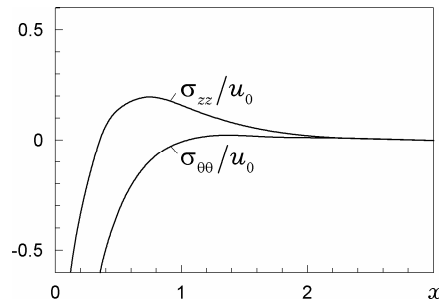


Рис. 5

З чисельних результатів, отриманих на рис. 5, бачимо, що отримані розв'язки з достатньою точністю можна використовувати для скінченних циліндричних тіл, довжина яких більша від їх діаметра.

**4. Приклад.** Розглянемо задачу визначення напружено-деформованого стану циліндричного тіла, довжина  $L$  якого задовольняє умову  $L > 2$ . Бічні сторони тіла ненавантажені, торець  $x = 0$  жорстко зацемлений, а до торця  $x = L$  прикладено нормальні сили  $\sigma(y)$ :

$$u_z|_{x=0} = 0, \quad u_r|_{x=0} = 0, \quad (30)$$

$$\sigma_{zz}|_{x=L} = \sigma(y), \quad \sigma_{rz}|_{x=L} = 0. \quad (31)$$

Розв'язок цієї лінійної задачі шукатимемо у вигляді суперпозиції основного напружено-деформованого стану  $\bar{\sigma}_{ij}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  та збурення  $\tilde{\sigma}_{ij}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij}.$$



Виберемо  $\bar{\sigma}_{zz} = \bar{\sigma}$ , де  $\bar{\sigma} = 2 \int_0^1 \sigma(y)y dy$ , решту компонент напружень

основного стану вважатимемо нульовими. Тоді компоненти тензора деформації основного стану визначаються як

$$\bar{\varepsilon}_{rr} = -\frac{\nu\bar{\sigma}}{E}, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\frac{\nu\bar{\sigma}}{E}, \quad \bar{\varepsilon}_{zz} = \frac{\bar{\sigma}}{E}, \quad \bar{\varepsilon}_{rz} = 0, \quad \bar{\varepsilon}_{r\theta} = 0, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta z} = 0,$$

де  $E$  – модуль Юнга, а відповідні їм переміщення на торці  $x = 0$  циліндра будуть такими:

$$\bar{u}_z|_{x=0} = 0, \quad \bar{u}_r|_{x=0} = -\frac{\nu\bar{\sigma}}{E} y.$$

Вибираючи крайові умови для збурення на торці  $x = 0$  та  $x = L$  відповідно у вигляді

$$\tilde{u}_z|_{x=0} = 0, \quad \tilde{u}_r|_{x=0} = \frac{\nu\bar{\sigma}}{E} y, \quad (32)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}|_{x=L} = \sigma(y) - \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma}_{rz}|_{x=L} = 0, \quad (33)$$

забезпечимо виконання умов (30) і (31).

Напруження  $\tilde{\sigma}_{ij}$  визначають збурення, які виникають в околах торців циліндра. Оскільки довжина циліндра  $L$  перевищує його діаметр, то збурення протилежних кінців циліндра практично не взаємодіють. Це дозволяє звести задачу для збурень до двох незалежних задач для півбезмежного циліндра: 1) за умов (32) (ця задача відповідає торцю  $x = 0$ ); 2) за умов

$$\tilde{\sigma}_{zz}|_{x=0} = \sigma(y) - \bar{\sigma}, \quad \tilde{\sigma}_{rz}|_{x=0} = 0, \quad (34)$$

які відповідають торцю  $x = L$ .

Розв'язки кожної із цих двох задач слід підпорядкувати умові згасання компонент напружень і деформацій за необмеженого зростання координати  $x$ . Тоді розв'язок вихідної задачі визначиться як

$$\sigma_{ij}(x, y) = \bar{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(x, y) + \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(L - x, y),$$

$$\varepsilon_{ij}(x, y) = \bar{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}(x, y) + \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(2)}(L - x, y),$$

де верхній індекс у дужках вказує на розв'язки першої та другої задач для збурень.

Деякі результати розв'язування задачі наведено на рис. 6, рис. 7. При розрахунках приймали  $\sigma(y) = \sigma_0 \exp\left(\frac{-(y - y_0)^2}{0.01}\right)$ , покладаючи  $\sigma_0 = 0.05E$ . Застосовували метод редукції для  $N = 20$ .

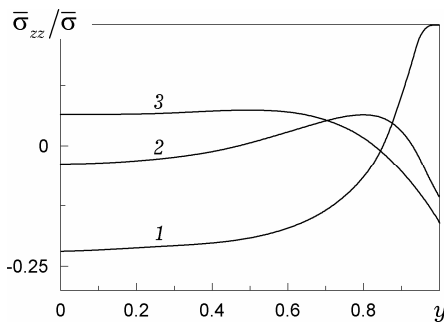


Рис. 6

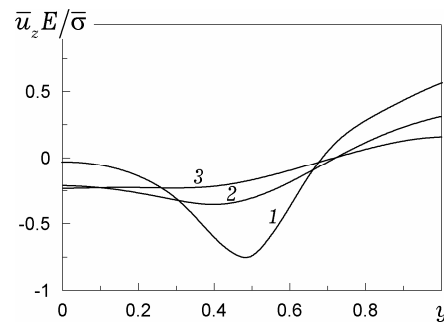


Рис. 7

Графіки на рис. 6 ілюструють концентрацію напружень в околі жорстко закріпленого торця циліндра, а рис. 7 відтворює збурення поля переміщень в околі торця, навантаженого нормальними силами. Криві 1, 2 та 3 на обох рисунках відповідають відстаням 0, 0.3 і 0.5 від відповідних торців.

**5. Висновки.** Варіаційний метод розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для півбезмежного циліндричного тіла, що базується на розвиненні компонент напружень і переміщень за повними системами комплексних осесиметричних однорідних розв'язків рівнянь Ляме, дозволяє отримувати з використанням методу редукції достатньо точні числові розв'язки усіх чотирьох основних типів задач. Числова реалізація усіх розглянутих типів задач здійснюється за єдиним алгоритмом. Найвища збіжність методу редукції досягається в задачі *I*. У задачах *II–IV* крайові умови є змішані (на бічній поверхні циліндра задані умови в напруженнях, а на торцевій – в переміщеннях або змішані). При відшукуванні розв'язку в класі неперервних функцій задачі *II–IV* будуть цілком коректні лише за певних обмежень на функції правих частин у крайових умовах, заданих на торці. В іншому разі розв'язок може бути сингулярним у кутових точках. Оскільки метод передбачає задоволення крайових умов за квадратичною нормою, то це дещо сповільнює його збіжність у таких задачах. Це можна усунути, зокрема, шляхом аналітичного виділення сингулярної складової розв'язку у його поданні [1].

У статті [6] з використанням відповідних систем однорідних розв'язків, розроблено метод розв'язування двовимірних плоских задач теорії пружності для скінченної прямокутної області. Цей підхід можна розвинути і для відповідних осесиметричних задач для циліндра скінченної довжини.

1. Васильев В. В., Лурье С. А. Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 5. – С. 125–135.
2. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
4. Прокопов В. К. Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области // Прикл. математика и механика. – 1952. – 16, № 1. – С. 45–57.
5. Чекурин В. Ф. Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 58–70.
6. Чекурин В. Ф., Постолак Л. І. Варіаційний метод розв'язування бігармонічних задач для прямокутної області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 1. – С. 88–98.
7. Чекурин В., Постолак Л. Варіаційний метод розв'язування оберненої бігармонічної задачі в прямокутнику // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 145–159.
8. Чекурин В., Постолак Л. Обернена задача визначення залишкових напружень в околі з'єднання різнорідних матеріалів // машинознавство. – 2010. – № 6. – С. 3–7.
9. Chowdhuri M. A. K., Xia Z. Application of a new experimental method to determine bi-material interface bonding strength // Exp. Appl. Mech.: Proc. 2012 Ann. Conf. Exp. Appl. Mech. – 2013. – Vol. 4. – P. 247–254.
10. Grinchenko V. T. The biharmonic problem and progress in the development of analytical methods for the solution of boundary-value problems // J. Eng. Math. – 2003. – 46, No. 3-4. – P. 281–297.
11. Hisao Hasegawa, Ven-Gen Lee, Toshio Mura. Green's functions for axisymmetric problems of dissimilar elastic solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1992. – 59, No. 2. – P. 312–320.
12. Moaveni S. Finite element analysis. Theory and application with ANSYS: 3rd ed. – Prentice Hall, 2008. – 868 p.
13. Sburlati R. Three-dimensional analytical solution for an axisymmetric biharmonic problem // J. Elasticity. – 2009. – 95, No. 1-2. – P. 79–97.
14. Tokovyy Yu. V., Ma C. C. Analysis of residual stresses in a long hollow cylinder // Int. J. Press. Ves. Pip. – 2011. – 88, No. 5-7. – P. 248–255.
15. Vihak V. M., Yasinsky A. V., Tokovyy Yu. V., Rychahivsky A. V. Exact solution of the axisymmetric thermoelasticity problem for a long cylinder subjected to varying with-respect-to-length loads // J. Mech. Behav. Mater. – 2007. – 18, No. 2. – P. 141–148.

**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА**

*Развит вариационный метод однородных решений для осесимметричных задач теории упругости для полубесконечного цилиндра со свободной боковой поверхностью при заданных на торце напряжениях, перемещениях или смешанных условиях. Решение задач с использованием этого метода сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Проведено численное исследование сходимости полученных решений. Рассмотрен пример применения предложенного подхода для определения концентрации напряжений в окрестности соединения торца цилиндра с абсолютно жесткой поверхностью.*

**VARIATIONAL METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS IN AXISYMMETRIC ELASTICITY PROBLEMS FOR SEMI-INFINITE CYLINDER**

*A variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems for semi-infinite cylinder with free lateral surface is developed. Four types of boundary conditions on the end of cylinder are considered – in stresses, in displacements and two types of mixed conditions. Solution of the problems using this method is reduced to the infinite systems of linear algebraic equations. A numerical study of convergence of the obtained solutions is carried out. An application of the proposed approach for determination of the stress concentration in the neighborhood of joint of the end of cylinder with perfectly rigid lateral surface is exemplified.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
09.11.11