

## ВЗАЄМОВПЛИВ КОЛІНЕАРНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ТРІЩИН І КРУГОВОГО ОТВОРУ В ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ

Досліджено взаємовплив колінеарних поверхневих тріщин і кругового отвору на напружений стан ізотропної пластини. Для розв'язання задачі застосовано метод граничних інтегральних рівнянь і модель лінійних пружин. Отриману систему сингулярних інтегральних рівнянь розв'язано чисельно методом механічних квадратур. Досліджено вплив різних параметрів на концентрацію напружено-деформованого стану в пластині.

**Вступ.** Одна з найважливіших задач, яку потрібно розв'язати при проектуванні конструкцій різних машин, літальних апаратів і інженерних споруд, є розрахунок несучої здатності тонкостінних елементів, зокрема оболонок і пластин. Наявність тріщин, вирізів, отворів може істотно впливати на параметри напружено-деформованого стану оболонок і пластин.

У роботах [1, 2, 6–11, 13] досліджували оболонки і пластини з різного типу отворами і наскрізними тріщинами. У роботі J. Rice, N. Levy [14] до розв'язання тривимірної задачі про поверхневі тріщини в пластині був запропонований наближений підхід – модель лінійних пружин (*line-spring model*), який дозволяє розглядати задачу в двовимірній постановці. У рамках цієї теорії тріщини моделюються як математичні розрізи серединної поверхні, а напруження, які виникають у прошарку суцільного матеріалу під фронтом поверхневої тріщини при дії розтягу і згину, замінюють невідомими зусиллями і моментами на лінії тріщини.

Поверхневі тріщини в пластині з використанням *line-spring model* були розглянуті в праці P. F. Joseph, F. Erdogan [12]. Взаємовплив колінеарних поверхневих тріщин було досліджено в роботах К. М. Довбні та її учнів [3–5].

**Постановка задачі.** Розглядаємо тонку пружну ізотропну пластину постійної товщини  $h$ , відношену до системи ортогональних координат  $x, y$  з осями вздовж напрямів пружної симетрії. Пластину ослаблена системою  $2N$  колінеарних поверхневих тріщин довжини  $2\ell_m$ , спрямованих уздовж осі  $x$ , і круговим отвором радіуса  $R$ , розташованим у центрі конструкції (рис. 1). Пластину знаходиться під дією симетричного зовнішнього навантаження – рівномірного розтягу вздовж осі  $y$ . Розміри тріщин і отвору більші порівняно з товщиною пластини, але менші порівняно з її іншими лінійними розмірами.

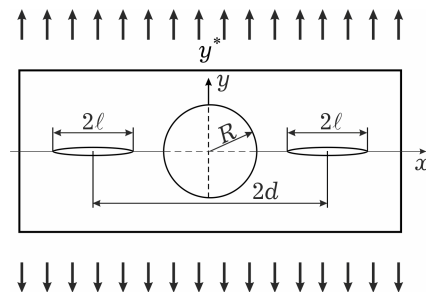


Рис. 1

Будемо вважати, що відстань між тріщинами і зовнішнім контуром велика порівняно з їхніми розмірами, і збурений напружений стан практично не досягає зовнішньої границі. Область, яку займає пластину, будемо вважати нескінченною, що дозволяє не враховувати граничні умови на зовнішньому контурі. Відстань між центрами тріщин  $2d$ . Тріщини мають напівеліптичну форму, їх глибина задається формулою

$$L_m(x) = \ell_{0m} \sqrt{1 - \tau^2},$$

де  $\ell_{0m}$  – найбільша глибина тріщин.

Позначимо гладкі ділянки контурів розрізів через  $L_m$ ,  $m = 1, \dots, 2N$ , а контур отвору – через  $L_{2N+1}$ .

Контури тріщин на поверхні пластини мають вигляд

$$L_m : \quad x = \alpha_m(\tau) = d + \ell_m \tau, \quad y = \beta_m(\tau) = 0, \quad \tau \in [-\ell_m, \ell_m],$$

де  $\ell_m$  – півдовжина контуру  $L_m$ , а контур отвору задано таким чином:

$$L_{2N+1} : \quad x = \alpha(R\tau) = R \cos(\tau), \quad y = \beta(R\tau) = R \sin(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi).$$

Чисельне дослідження проведемо для випадку пластини з круговим отвором і двома колінеарними поверхневими тріщинами. Згідно з методикою, наведеною в [1, 4], для розв'язання сформульованої задачі отримуємо таку систему граничних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 (\mathcal{K}_{1j}(\alpha(\tau) - \alpha(\theta), \beta(\tau) - \beta(\theta))\psi_j) d\theta &= F_1(\tau), \\ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 (\mathcal{K}_{2j}(\alpha(\tau) - \alpha(\theta), \beta(\tau) - \beta(\theta))\psi_j) d\theta + \\ &+ \int_{-1}^1 (\mathcal{K}_{23}(R\alpha(\tau) - \ell(s + \gamma), 0) + \\ &+ \mathcal{K}_{23}(R\alpha(\tau) - \ell(s - \gamma), 0))\psi_3 dt = F_2(\tau), \\ \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 (\mathcal{K}_{ij}(\ell(t - \gamma) - R\alpha(\theta), -\beta(\theta))\psi_j) dt + \\ &+ \int_{-1}^1 \sum_{j=3}^4 (\mathcal{K}_{ij}(t - s)\psi_j + \mathcal{K}_{ij}(t + s - 2\gamma)\psi_j) dt = \\ &= \pi(F_i(s) - F_i^*(s)), \quad i = 3, 4, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\tau = \frac{\pi k}{n}$ ,  $\theta = \frac{\pi(2m-1)}{2n}$ ,  $m = 1, \dots, n-1$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Невідомі функції мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1 &= Eh \frac{d[u]_{L_3}}{d\theta}, \quad \psi_2 = Eh \frac{d[v]_{L_3}}{d\theta}, \quad \psi_3 = \frac{Eh}{4\ell} \frac{d[v]_{L_{1,2}}}{ds}, \\ \psi_4 &= \frac{Eh}{4\ell} \frac{\sqrt{3}(1-\nu)(3+\nu)}{\sqrt{1-\nu^2}} \left( \frac{h}{6} \frac{d[\theta_2]_{L_{1,2}}}{ds} \right), \end{aligned}$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

У роботі [2] запропоновано новий підхід до побудови системи граничних інтегральних рівнянь. Відповідно до нього на контурі отвору замість зусиль задаємо компоненти головного вектора навантаження, які діють уздовж контуру кругового отвору. Тоді праві частини  $F_1(\tau)$ ,  $F_2(\tau)$  системи набудуть вигляду

$$F_1(\tau) = P'_x, \quad F_2(\tau) = P'_y. \quad (2)$$

Остаточні зусилля на контурі виражаються формулами

$$\begin{aligned} P'_x &= T_1 n_1 + S n_2 = T_1 \cos \varphi, \\ P'_y &= S n_1 + T_2 n_2 = T_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

На контурах тріщин  $F_3^*(s) = T_2^*$ ,  $F_4^*(s) = 0$ . Граничні умови відповідно до [4] запишемо так:

$$F_3(s) = -T(s), \quad F_4(s) = -M(s). \quad (4)$$

де  $T(s)$ ,  $M(s)$  спрямовані на змикання тріщин. З урахуванням *line-spring model* введені позначення в (4) набудуть вигляду

$$\begin{pmatrix} T \\ \frac{6M}{h} \end{pmatrix} = \frac{2}{1-\nu^2} \frac{\ell}{h} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{-\ell}^s \psi_1 ds \\ \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}} \int_{-\ell}^s \psi_3 ds \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де

$$\int_{-\ell}^s \psi_j ds = \frac{1}{2} \int_{-\ell}^{\ell} \psi_j(t) \operatorname{sgn}(s-t) dt,$$

а елементи матриці  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , описано в [4, 12].

Ядра  $\mathcal{K}_{11}$ ,  $\mathcal{K}_{12}$ ,  $\mathcal{K}_{21}$ ,  $\mathcal{K}_{22}$ ,  $\mathcal{K}_{31}$ ,  $\mathcal{K}_{32}$  інтегральних рівнянь, які відповідають отвору, і  $\mathcal{K}_{33}$ ,  $\mathcal{K}_{34}$ ,  $\mathcal{K}_{43}$ ,  $\mathcal{K}_{44}$  – тріщинам, мають вигляд

$$\mathcal{K}_{11} = n_1 \frac{\sin \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi)}{r} + n_2 \frac{-\cos 2\varphi \cdot \cos \varphi}{r}, \quad (6)$$

$$\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{21} = \mathcal{K}_{31} = n_1 \frac{-\cos 2\varphi \cdot \cos \varphi}{r} + n_2 \frac{-\cos 2\varphi \cdot \sin \varphi}{r}, \quad (7)$$

$$\mathcal{K}_{22} = \mathcal{K}_{32} = n_1 \frac{-\cos 2\varphi \cdot \sin \varphi}{r} + n_2 \frac{-\cos \varphi (1 + 2 \sin^2 \varphi)}{r}, \quad (8)$$

$$\mathcal{K}_{33} = \mathcal{K}_{44} = \frac{1}{x}, \quad (9)$$

$n_1 = \cos \theta$ ;  $n_2 = \sin \theta$  – напрямні косинуси вектора зовнішньої нормалі до кривої  $L_3$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\gamma = \frac{d}{\ell}$ ;  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ .

Для розглядуваної задачі  $\mathcal{K}_{41} = \mathcal{K}_{42} = \mathcal{K}_{23} = \mathcal{K}_{24} = 0$ . У системі (1) ядра  $\mathcal{K}_{34}$ ,  $\mathcal{K}_{43}$  обчислюємо з урахуванням (4), (5).

Систему (1) розв'язуємо методом механічних квадратур. Схематично матрицю отриманої системи для ядер, що залежать від тріщин, можна записати таким чином:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \mathcal{K}_{1,1}^{33} & \dots & \mathcal{K}_{1,n}^{33} & \mathcal{K}_{1,1}^{34} & \dots & \mathcal{K}_{1,n}^{34} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathcal{K}_{n-1,1}^{33} & \dots & \mathcal{K}_{n-1,n}^{33} & \mathcal{K}_{n-1,1}^{34} & \dots & \mathcal{K}_{n-1,n}^{34} \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \mathcal{K}_{1,1}^{43} & \dots & \mathcal{K}_{1,n}^{43} & \mathcal{K}_{1,1}^{44} & \dots & \mathcal{K}_{1,n}^{44} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathcal{K}_{n-1,1}^{43} & \dots & \mathcal{K}_{n-1,n}^{43} & \mathcal{K}_{n-1,1}^{44} & \dots & \mathcal{K}_{n-1,n}^{44} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \end{array}.$$

Для розглядуваної задачі нормований коефіцієнт інтенсивності напружень згідно з методом *line-spring model* має вигляд

$$\frac{K_I}{K_\infty} = \frac{Tg_t(s) + \frac{6M}{h}g_b(s)}{T_n^*g_t\left(\frac{\ell_0}{h}\right)}, \quad (10)$$

де  $s = L(x)/h$ , а невідомі функції  $g_t(s)$ ,  $g_b(s)$  наведено у [14].

Дотичну деформацію, яка характеризує концентрацію напружень на контурі отвору [1], визначаємо через невідомі функції за формулою

$$\varepsilon_\tau = \frac{1}{Eh}(n_2\psi_1 - n_1\psi_2), \quad n_2 = \sin \tau, \quad n_1 = \cos \tau,$$

де  $E$  – модуль Юнга.

**Результати чисельних досліджень.** У табл. 1 значення нормованих коефіцієнтів інтенсивності напружень  $\frac{K_I}{K_\infty}$  у центральній точці відповідають результатам, які були обчислені в цьому дослідженні при  $\rho = 0.01$ . Значення  $\frac{K_I^*}{K_\infty}$  відповідають результатам, отриманим у роботі Р. Ф. Joseph, F. Erdogan [12].

Таблиця 1

$\frac{\ell_0}{h} \backslash \nu$	0		0.3		0.5	
	$\frac{K_I^*}{K_\infty}$	$\frac{K_I}{K_\infty}$	$\frac{K_I^*}{K_\infty}$	$\frac{K_I}{K_\infty}$	$\frac{K_I^*}{K_\infty}$	$\frac{K_I}{K_\infty}$
0.1	0.935	0.923	0.945	0.941	0.956	0.957
0.4	0.473	0.431	0.507	0.469	0.554	0.515
0.7	0.138	0.134	0.146	0.141	0.163	0.157

На рис. 2 – рис. 5 наведено залежності  $\frac{K_I}{K_\infty}$  від  $\rho$  у центральній точці.

Криві на рис. 2, рис. 3 побудовано при  $\frac{\ell_0}{h} = 0.1$  для значень  $\frac{\ell}{h} = 1, 2, 4, 8$  (рис. 2) і  $\frac{\ell}{h} = 1, 16, 128$  (рис. 3). Відповідно криві на рис. 4, рис. 5 побудовано при  $\frac{\ell}{h} = 1$  для значень  $\frac{\ell_0}{h} = 0.3, 0.2, 0.1$  (рис. 4) і  $\frac{\ell_0}{h} = 0.6, 0.5, 0.4$  (рис. 5). Обчислення виконано при значенні коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0.3$ .

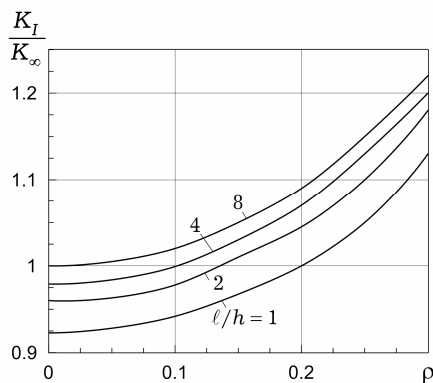


Рис. 2

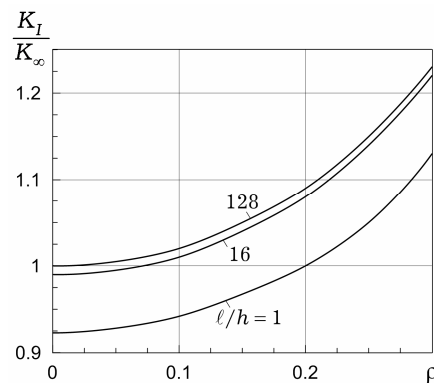


Рис. 3

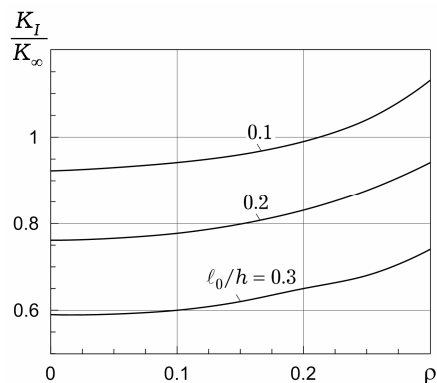


Рис. 4

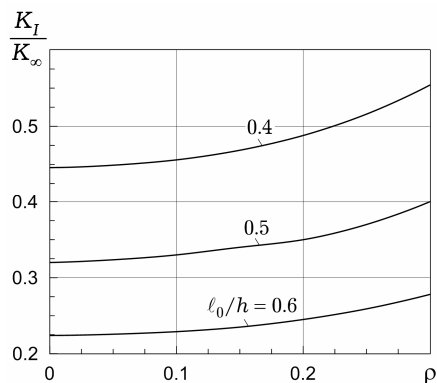


Рис. 5

На рис. 6 наведено залежність значень нормованих коефіцієнтів інтенсивності напружень від  $\rho$  при наближенні дефектів один до одного для значень коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0, 0.3, 0.5$ .

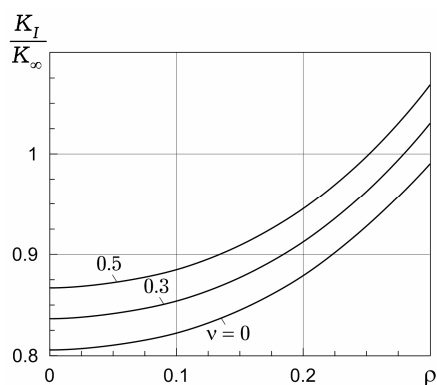


Рис. 6

Для ізотропної пластини з круговим отвором відомий [8] точний розв'язок:

$$\varepsilon_\tau \cdot Eh = 3 \quad \text{при } \tau = 0, \quad \varepsilon_\tau \cdot Eh = -1 \quad \text{при } \tau = \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 7, рис. 8 простежується така закономірність при збільшенні відстані між дефектами. На рис. 7 наведено  $\varepsilon_\tau \cdot Eh$  для  $\tau = 0$ , а на рис. 8 – для  $\tau = \frac{\pi}{2}$  при наближенні дефектів до один одного. Криві побудовано для значень  $\frac{\ell_0}{h} = 0.1, 0.3, 0.5$  при  $\frac{R}{\ell} = 1$ .

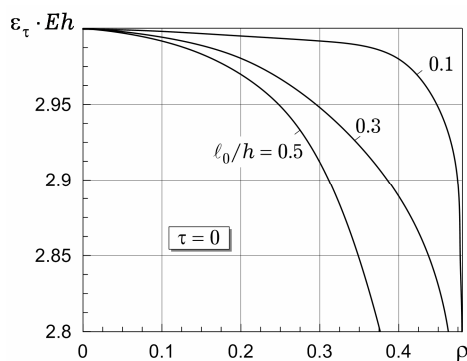


Рис. 7

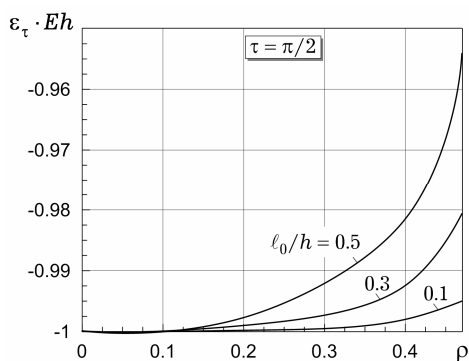


Рис. 8

### Висновки.

– При збільшенні товщини пластини значення нормованих коефіцієнтів інтенсивності напружень збільшуються. Простежується закономірність зменшення  $K_i/K_\infty$  при збільшенні глибини поверхневих тріщин.

– При зменшенні відстані між тріщинами і отвором  $K_i/K_\infty$  збільшуються.

– Чим вище коефіцієнт Пуассона, тим більше значення нормованих коефіцієнтів інтенсивності напружень при наближенні тріщин до отвору.

– Збільшення глибини поверхневих тріщин суттєво впливає на величину нормованої дотичної деформації.

– При збільшенні  $\rho$  значення  $\varepsilon_\tau \cdot Eh$  в критичній точці  $\tau = 0$  падають. Чим більша глибина тріщини, тим сильніше ефект.

1. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек нулевой и отрицательной кривизны, ослабленных разрезами и отверстиями // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 1998. – Вип. 2. – С. 45–52.
2. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек положительной кривизны с разрезами и отверстиями // Теорет. и прикл. механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 59–69.  
Te same: Dovbnya E. N. A system of boundary integral equations for orthotropic shells of positive curvature with slits and holes // J. Math. Sci. – 1997. – **86**, No. 6. – P. 3123–3128.
3. Довбня К. М., Чернищенко М. О. Дослідження напруженого стану в ізотропних оболонках довільної кривини з поверхневими тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 121–125.
4. Довбня К. М., Яртемик В. В. Дослідження КІН в оболонці з системою наскрізних і поверхневих колінеарних тріщин // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2007. – **13**. – С. 63–69.
5. Довбня К. М., Яртемик В. В. Оцінка похибки застосування теорії спеціальної ортотропії при розрахунку на міцність ортотропних оболонок з колінеарними розрізами // машинознавство. – 2005. – № 1. – С. 8–11.
6. Калоеров С. А., Горянская Е. С., Шаповалова Ю. Б. Двухмерное напряженное состояние анизотропного тела с отверстиями, упругими включениями и трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 1999. – Вып. 29. – С. 63–70.  
Te same: Kaloerov S. A., Goryanskaya E. S., Shapovalova Yu. B. Two-dimensional stressed state of an anisotropic body with holes, elastic inclusions, and cracks // J. Math. Sci. – 2000. – **101**, No. 1. – P. 2773–2779.
7. Калоеров С. А., Нескородев Н. М. Напряженное состояние анизотропной пластинки с двумя произвольно расположенными эллиптическими отверстиями или трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 1993. – Вып. 24. – С. 33–43.  
Te same: Kaloerov S. A., Neskorodev N. M. The stress state of an anisotropic plate with two arbitrarily located elliptic holes or cracks // J. Math. Sci. – 1995. – **77**, No. 6. – P. 3499–3505.
8. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
9. Wojczuk D., Mróz Z. Topological sensitivity derivative with respect to area, shape and orientation of an elliptic hole in a plate // Struct. Multidiscip. Optim. – 2012. – **45**, No. 2. – P. 153–169.
10. Chen J. T., Chou K. H., Lee Y. T. A novel method for solving the displacement and stress fields of an infinite domain with circular holes and/or inclusions subject to a screw dislocation // Acta Mech. – 2011. – **218**, No. 1-2. – P. 115–132.
11. Hasebe N. Magneto-elastic stress in a thin infinite plate with an elliptical hole under uniform magnetic field // Arch. Appl. Mech. – 2011. – **81**, No. 6. – P. 745–764.
12. Joseph P. F., Erdogan F. Surface crack problems in plates // Int. J. Fract. – 1989. – **41**, No. 2. – P. 105–131.
13. Luo L., Xiang Yu, Wang Q. Stress concentration factor expression for tension strip with eccentric elliptical hole // Appl. Math. Mech. – 2012. – **33**, No. 1. – P. 117–128.
14. Rice J. R., Levy N. The part-through surface crack in an elastic plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1972. – **39**, No. 1. – P. 185–194.

#### **ВЗАИМОВЛИЯНИЕ КОЛЛИНЕАРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТРЕЩИН И КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ**

*Исследовано взаимовлияние коллинеарных поверхностных трещин и кругового отверстия на напряженное состояние изотропной пластины. Для решения задачи использованы метод граничных интегральных уравнений и модель линейных пружин. Полученная система сингулярных интегральных уравнений решена численно методом механических квадратур. Исследовано влияние различных параметров на концентрацию напряженно-деформированного состояния в пластине.*

#### **INTERACTION OF COLLINEAR SURFACE CRACKS AND CIRCULAR HOLE IN ISOTROPIC PLATE**

*The article deals with the interrelation of collinear surface cracks and circular hole on the stress state of the isotropic plate. To solve this problem are used the method of boundary integral equations and line-spring model are used. A system of singular integral equations is obtained which is solved numerically by mechanical quadrature method. The effect of various parameters on the concentrations of stress-strain state of the plate was investigated.*

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано  
30.05.12