

## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ДВАЖДЫ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

*Рассматривается осесимметричная смешанная задача о напряженном состоянии дважды усеченного конуса при учете его собственного веса и выполнении условий гладкого контакта на его конической поверхности. Применение нового интегрального преобразования по меридиональному углу непосредственно к уравнениям Ламе сводит задачу в пространстве трансформант к одномерной векторной краевой задаче. Полученная задача решается точно с помощью методов матричного дифференциального исчисления. Последующее применение обратных интегральных преобразований приводит к окончательному решению исходной задачи. Исследованы решения частных случаев сформулированной задачи: конус с острием, сферический купол, полушар. Проведено исследование нормальных напряжений на поверхности конуса в зависимости от его геометрических параметров.*

Объекты конической формы достаточно часто используются в инженерной практике, и поэтому исследование их напряженного состояния является актуальной задачей как с точки зрения практической, так и с точки зрения развития математических методов решения подобных проблем. Немногочисленность работ, посвященных аналитическим методам решения такого рода задач, обусловлена отсутствием подходящих интегральных преобразований, а также необходимостью решить неоднородные уравнения Ламе в случаях, когда требуется учесть собственный вес либо температурные воздействия. Наиболее сложным является случай, когда на конической поверхности выполнены условия первой основной задачи теории упругости либо сцепления. В такой постановке, но без учета собственного веса, задача была рассмотрена в [3, 4]. В [7, 8, 11] были рассмотрены другие граничные условия на торцах конуса и конических поверхностях, но также только для однородных уравнений Ламе. Приближенные численные методы решения задач определения поля смещений и напряжений усеченного конуса также немногочисленны [9].

Г. Я. Поповым предложен метод решения осесимметричных задач теории упругости для конуса при учете его собственного веса [5], базирующийся на сведении исходной задачи с помощью новых интегральных преобразований [6] к неоднородной векторной одномерной краевой задаче. Цель настоящей работы – реализовать этот метод для решения осесимметричной задачи о напряженном состоянии дважды усеченного конуса с учетом его собственного веса при выполнении условий скользящей заделки на конической поверхности. Предложенный подход позволил построить точное решение задачи, а также получить точные формулы поля смещений и напряжений для таких частных случаев, как упругий купол, упругий полушар и конус с острием.

**Постановка задачи.** Рассмотрим упругий конус (коэффициент Пуассона  $\mu$ , модуль сдвига  $G$  и  $\gamma$  – удельный вес материала конуса), ось которого направлена вниз и положение которого в сферической системе координат фиксируется соотношениями

$$a_0 \leq r \leq a_1, \quad 0 \leq \theta \leq \omega, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (1)$$

На сферических гранях  $r = a_i$ ,  $0 \leq \theta \leq \omega$ ,  $i = 0, 1$ , выполняются условия первой основной задачи

$$\sigma_r(a_i, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(a_i, \theta) = 0. \quad (2)$$

На конической поверхности  $a_0 \leq r \leq a_1$ ,  $\theta = \omega$  выполняются условия

скользящей заделки

$$v(r, \omega) = 0, \quad \tau_{\theta r}(r, \omega) = 0. \quad (3)$$

Требуется отыскать смещения  $u = u_r(r, \theta)$  и  $v = u_\theta(r, \theta)$ , удовлетворяющие осесимметричным уравнениям Ламе с объемными силами

$$(r^2 u')' - 2u + \frac{1}{\mu_*} \frac{(\sin \theta u^*)'}{\sin \theta} - \frac{\mu'}{\mu_*} \frac{(v \sin \theta)'}{\sin \theta} + \frac{\mu_0}{\mu_*} r \frac{(v' \sin \theta)'}{\sin \theta} = -\frac{2r^2}{\mu_*} \gamma \cos \theta, \quad (4)$$

$$(r^2 v')' + \mu_* \left[ \frac{(\sin \theta v^*)'}{\sin \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right] + \mu_0 r u' + 2\mu_* u'' = -2r^2 \gamma \sin \theta \quad (5)$$

в области, определяемой соотношениями (1), и граничным условиям (2), (3). Тут введены обозначения

$$\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}, \quad \mu' = \mu_0 + 2, \quad \mu_* = 2(1-\mu)\mu_0. \quad (6)$$

Напряжения в терминах обозначений (6) будут выражаться формулами [10]

$$r\sigma_r(r, \theta) = \frac{1}{2} \mu_* r u' + 2\mu_0 u + \mu_0 \frac{(\sin \theta v)'}{\sin \theta}, \quad (7)$$

$$r\sigma_\theta(r, \theta) = \mu_0 u + \mu_0 r u' + \frac{1}{2} \mu_* v^* + \mu_0 v(r, \theta) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$2r\tau_{r\theta}(r, \theta) = r v' - v + u^*.$$

Прежде чем применить интегральное преобразование по переменной  $\theta$ , следует переформулировать краевые условия на конической поверхности в терминах смещений:

$$v(r, \omega) = 0, \quad u^*(r, \omega) = 0. \quad (8)$$

К уравнению (4) применим интегральное преобразование Попова [6] вида

$$u_k(r) = \int_0^\omega P_{v_k}(\cos \theta) \sin \theta u(r, \theta) d\theta \quad (9)$$

с формулой обращения

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r) \frac{P_{v_k}(\cos \theta)}{\|P_{v_k}(\cos \theta)\|^2}, \quad (10)$$

где  $v_k$  – корни трансцендентного уравнения

$$P_v^1(\cos \omega) = 0, \quad v = v_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$P_v(\cos \theta)$  – функция Лежандра, а  $P_v^1(\cos \theta)$  – присоединенная функции Лежандра.

К уравнению (5) применим интегральное преобразование вида

$$v_k(r) = \int_0^\omega P_{v_k}^1(\cos \theta) \sin \theta v(r, \theta) d\theta \quad (12)$$

с формулой обращения

$$v(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) \frac{P_{v_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{v_k}^1(\cos \theta)\|^2}. \quad (13)$$

Система уравнений (4), (5) в пространстве трансформант (9), (12) примет вид

$$\begin{aligned} (r^2 u_k'(r))' - 2u_k(r) - \mu_*^{-1} [N_k u_k(r) - \mu' v_k(r) + \mu_0 r v_k'(r)] &= f_k^1(r), \\ (r^2 v_k'(r))' - \mu_* N_k v_k(r) + \mu_0 r N_k u_k'(r) + 2\mu_* N_k u_k(r) &= f_k^2(r), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} N_k &= v_k(v_k + 1), \\ f_k^1(r) &= -\gamma \mu_*^{-1} r^2 \int_0^{\omega} \sin^2 \theta P_{v_k}^1(\cos \theta) d\theta, \\ f_k^2(r) &= -2\gamma r^2 \int_0^{\omega} \sin^2 \theta P_{v_k}^1(\cos \theta) d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Запишем в пространстве трансформант интегральных преобразований (9), (12) краевые условия поставленной задачи. Условия (2) и (3) запишутся соответственно в виде

$$\begin{aligned} (1 - \mu) a_i u_k'(a_i) + 2\mu u_k(a_i) - \mu v_k(a_i) &= 0, \\ a_i v_k'(a_i) - v_k(a_i) + N_k u_k(a_i) &= 0, \quad i = 0, 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Требуется решить полученную одномерную задачу (14), (15).

**Решение одномерной краевой задачи путем сведения ее к векторной краевой задаче.** Введем замену переменных

$$r = a_1 \rho, \quad \rho = 2(a_1)^{-1}, \quad \rho \in [\alpha, 1], \quad \alpha = a_0 a_1^{-1}$$

и обозначим

$$u_k(r) = u_k(a_1 \rho) = \tilde{u}_k(\rho), \quad v_k(r) = v_k(a_1 \rho) = \tilde{v}_k(\rho). \quad (16)$$

В новых переменных (16) систему уравнений одномерной задачи запишем в форме

$$\begin{aligned} [\rho^2 \tilde{u}_k'(\rho)]' - 2\tilde{u}_k(\rho) - \mu_*^{-1} [N_k \tilde{u}_k(\rho) - \mu' \tilde{v}_k(\rho) + \mu_0 \rho v_k'(\rho)] &= \tilde{f}_k^1(\rho), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \\ [\rho^2 \tilde{v}_k'(\rho)]' - \mu_* N_k \tilde{v}_k(\rho) + \mu_0 \rho N_k \tilde{u}_k'(\rho) + 2\mu_* N_k \tilde{u}_k(\rho) &= \tilde{f}_k^2(\rho), \\ k &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\tilde{u}_k'(\rho) = \frac{d\tilde{u}_k(\rho)}{d\rho}.$$

Краевые условия примут вид

$$\begin{aligned} \alpha(1 - \mu) \tilde{u}_k'(\alpha) + 2\mu \tilde{u}_k(\alpha) - \mu \tilde{v}_k(\alpha) &= 0, \quad \alpha \tilde{v}_k'(\alpha) - \tilde{v}_k(\alpha) + N_k \tilde{u}_k(\alpha) = 0, \\ (1 - \mu) \tilde{u}_k'(1) + 2\mu \tilde{u}_k(1) - \mu \tilde{v}_k(1) &= 0, \quad v_k'(1) - \tilde{v}_k(1) + N_k \tilde{u}_k(1) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем векторы

$$\mathbf{y}_k(\rho) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_k(\rho) \\ \tilde{v}_k(\rho) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k(\rho) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_k^1(\rho) \\ \tilde{f}_k^2(\rho) \end{pmatrix}$$

и матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_*^{-1} \\ N_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 - \mu_*^{-1}N_k & \mu_*^{-1}N_k \\ 2\mu_*N_k & -\mu_*N_k \end{pmatrix}.$$

Тогда система (17) примет вид векторного уравнения

$$[\rho^2 \mathbf{y}'_k(\rho)]' + \rho \mu_0 \mathbf{Q} \mathbf{y}'_k(\rho) + \mathbf{P} \mathbf{y}_k(\rho) = \mathbf{f}_k(\rho), \quad (19)$$

а граничные условия могут быть записаны как краевые функционалы:

$$U_i[\mathbf{y}(\rho)] = \mathbf{A} \mathbf{y}'(a_i) + \mathbf{B} \mathbf{y}(a_i) = 0, \quad i = 0, 1, \quad (20)$$

где

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = 1, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\mu & -\mu \\ N_k & -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Таким образом, в пространстве трансформант сформулирована следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} L_2[\mathbf{y}_k(\rho)] &= \mathbf{f}_k(\rho), & \rho \in [\alpha, 1], \\ U_i[\mathbf{y}_k(\rho)] &= 0, & i = 0, 1. \end{aligned} \quad (22)$$

В задаче (22) следует отдельно рассмотреть два случая: случай 1)  $k = 0$  и случай 2)  $k = 1, 2, \dots$

**Решение векторной задачи для случая  $k = 0$ .** В случае  $k = 0$  имеем

$$u_0(\rho) \neq 0, \quad v_0(\rho) \equiv 0, \quad N_k = 0, \quad v_k = v_0 = 0.$$

Поэтому требуется решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} [\rho^2 \tilde{u}'_0(\rho)]' - 2\tilde{u}_0(\rho) &= f_0^1(\rho), & \rho \in [\alpha, 1], \\ \alpha(1 - \mu)\tilde{u}'_0(\alpha) + 2\mu\tilde{u}_0(\alpha) &= 0, \\ (1 - \mu)\tilde{u}'_0 + 2\mu\tilde{u}_0(1) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Дифференциальное уравнение задачи является уравнением Эйлера. Построим его решение как суперпозицию общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Нетрудно убедиться, что

$$\tilde{u}_0(\rho) = D_1 \rho^{-2} + D_2 \rho + a_1^2 \rho^2 q_{r0}(\rho) \quad (24)$$

является решением уравнения из (23) и

$$q_{r0}(\rho) = -\frac{\gamma}{2\mu_*} (\cos 2\omega - 1).$$

Чтобы найти неизвестные постоянные  $D_1$  и  $D_2$ , входящие в формулу (24), следует удовлетворить граничным условиям из (23). Таким образом, решение задачи для случая  $k = 0$  построено.

**Решение векторной краевой задачи для случая  $k \geq 1$ .** Для решения векторной краевой задачи (22) сначала решим матричное однородное уравнение

$$L_2[\mathbf{Y}(\rho)] = 0, \quad \alpha < \rho < 1, \quad (25)$$

и построим два его линейно независимых решения  $\mathbf{Y}_1(\rho)$  и  $\mathbf{Y}_2(\rho)$ , где  $\mathbf{Y}_j(\rho)$ ,  $j = 1, 2$ , – матрицы порядка  $2 \times 2$ . Для этого будем разыскивать решение уравнения в виде  $\mathbf{Y}(\rho) = \rho^s \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Подставим это выражение в векторное уравнение (22), откуда получим

$$L_2[\rho^s \mathbf{I}] = \mathbf{M}(s) \rho^s, \quad (26)$$

матрицы  $\mathbf{M}(s)$  и  $\mathbf{M}^{-1}(s)$  имеют вид

$$\mathbf{M}(s) = \begin{pmatrix} s(+1) - 2 - \mu_*^{-1}N_k & -\mu_*^{-1}s\mu_0 + \mu_*^{-1}\mu' \\ s\mu_0N_k + 2\mu_*N_k & s(s+1) - \mu_*N_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1}(s) = \frac{\mathbf{M}^c(s)}{\Delta(s)},$$

где

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 - (2N_k + 1)s^2 - 2(N_k + 1)s - N_k(N_k - 2), \quad (27)$$

$$\mathbf{M}^c(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) - \mu_*N_k & \mu_*^{-1}(\mu_0s - \mu') \\ -\mu_0N_ks - 2\mu_*N_k & s(s+1) - 2 - \mu_*N_k \end{pmatrix}. \quad (28)$$

С учетом формул (27), (28) решение уравнения (25) запишем в форме

$$\mathbf{Y}(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \rho^s \frac{\mathbf{M}^c(\rho)}{\Delta(s)} ds, \quad (29)$$

где  $c$  – замкнутый контур, окружающий нули знаменателя  $\Delta(s) = 0$ , определенного формулой (27). Эти нули находятся точно:

$$s_1 = \nu + 1, \quad s_2 = \nu - 1, \quad s_3 = -\nu, \quad s_4 = -\nu - 2. \quad (30)$$

Тогда  $\Delta(s)$  можно переписать в виде

$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^4 (s - s_i). \quad (31)$$

Вычислим интеграл в (29), используя теорему о вычетах. Это приведет к отысканию интегралов вида

$$\mathbf{I}_k^i(\rho) = \oint_c \frac{\rho^s s^i}{\prod_{j=1}^4 (s - s_j)}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (32)$$

Как видно, корни  $s_1$  и  $s_2$  определяют решение, растущее на бесконечности, а корни  $s_3$  и  $s_4$  – убывающее, что соответственно приводит к двум матрицам  $\mathbf{Y}_0(\rho)$  и  $\mathbf{Y}_1(\rho)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_0(\rho) &= \rho^{\nu+1} R_{\nu+1} \mathbf{A}_+ - \rho^{\nu-1} R_{\nu} \mathbf{B}_+, \\ \mathbf{Y}_1(\rho) &= \rho^{-\nu} R_{\nu} \mathbf{A}_- - \rho^{-\nu-2} R_{\nu+1} \mathbf{B}_-. \end{aligned} \quad (33)$$

Вид коэффициентов  $R_{\nu}$  и матриц  $\mathbf{A}_{\pm}$ ,  $\mathbf{B}_{\pm}$  приведен в *Приложении 1*.

С учетом (33) общее решение однородного векторного уравнения (25) окончательно примет вид

$$\mathbf{y}_k^0(\rho) = \mathbf{Y}_0(\rho) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{Y}_1(\rho) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , – неизвестные постоянные, которые следует отыскать.

Требуется найти частное решение неоднородного векторного уравнения. Это можно сделать несколькими способами: либо построить матрицу-функцию Грина, либо попытаться отыскать частное решение уравнения по виду правой части. Используем последний подход – построим частные решения в виде

$$u_k^{\chi}(\rho) = D_1 \rho^2, \quad v_k^{\chi}(\rho) = D_2 \rho^2, \quad (35)$$

где  $D_1, D_2$  – неизвестные постоянные.

Подставим эти выражения в систему уравнений. Умножим первое уравнение на  $\mu_*/\rho^2$ , а второе – на  $1/\rho^2$ , откуда получим систему двух уравнений относительно искомых коэффициентов  $D_1$  и  $D_2$  (их вид приведен в *Приложении 2*).

Полученное частное решение в векторном виде примет вид

$$\mathbf{y}^\lambda(\rho) = \mathbf{D}\rho^2, \quad (36)$$

где  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$  – вектор, содержащий найденные постоянные.

Окончательно решение векторного уравнения из (22) запишем как

$$\mathbf{y}_k(\rho) = \mathbf{y}_k^0(\rho) + \mathbf{y}_k^\lambda(\rho), \quad (37)$$

где слагаемые определяются формулами (34) и (36).

Решение в пространстве трансформант будет полностью отстроено, если будут определены постоянные, входящие в представление (37).

**Отыскание постоянных и получение точного решения исходной задачи.** С целью отыскания постоянных  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , решим систему линейных алгебраических уравнений, возникающую при подстановке трансформант смещений в условия (20) (в связи с громоздкостью здесь эти выражения не приводим). Для получения оригиналов применим к полученным трансформантам смещений  $u_k(\rho)$ ,  $v_k(\rho)$  обратные интегральные преобразования (10), (13) соответственно. Таким образом, в результате точное решение поставленной задачи получено в виде рядов, сходимость которых следует установить.

С этой целью исследуем асимптотику корней  $v = v_k$  и  $P_{v_k}(\cos \theta)$ ,  $P_{v_k}^1(\cos \theta)$  – присоединенных функций Лежандра при  $k \rightarrow \infty$ . Как показано в [5], асимптотика собственных чисел при  $k \rightarrow \infty$  имеет вид  $v_k \sim \frac{\pi k}{\omega}$ . Для

исследования асимптотики выражений  $P_v(\cos \omega)$ ,  $P_v^1(\cos \omega)$  воспользуемся формулой (3.9.1 (2)) из [1]. Кроме того, возникает необходимость асимптотического разложения интегралов вида  $\int_0^\omega \sin \theta P_v^1(\cos \theta) d\theta$ . Используя указан-

ную формулу, подставив ее в подынтегральное выражение и преобразуя его, приходим к заключению, что все интегралы, входящие в разложение,

можно описать интегралами вида  $\int_0^\omega f(\theta) \sin v_k \theta d\theta$  либо  $\int_0^\omega f(\theta) \cos v_k \theta d\theta$ , где

$f(\theta)$  – функция с ограниченной вариацией (т. к. на отрезке  $[0, \omega]$  она принадлежит к классу кусочно-монотонных функций). Тогда по теореме Римана – Лебега поведение интегралов описывается как  $o(1)$ . Из этого заключаем, что главным членом асимптотики будут только два первых слагаемых. В результате для исходного интеграла получим

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \sin 2\theta P_v^1(\cos \theta) d\theta &= k^{-1/2} \frac{2\sqrt{\sin \omega}}{\sqrt{\pi}} \sin \omega \left( \sin k\omega \left( \cos \frac{\omega}{2} - \sin \frac{\omega}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos k\omega \left( \sin \frac{\omega}{2} + \cos \frac{\omega}{2} \right) \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем асимптотику второго интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \sin^2 \theta P_v(\cos \theta) d\theta &= k^{-3/2} (-1)^k \frac{\omega^{3/2} \sqrt{\sin \omega}}{\pi^2} \times \\ &\quad \times \cos \omega \left( \sin \frac{\omega}{2} - \cos \frac{\omega}{2} \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right). \end{aligned}$$

Также требуется установить асимптотику соотношений вида

$$\frac{P_\nu^\mu(\cos \theta)}{\|P_\nu^\mu(\cos \theta)\|^2}, \quad \mu = 0, 1.$$

Учтем, что норма присоединенных функций Лежандра определяется равенством

$$\|P_\nu^\mu(\cos \theta)\|^2 = \int_0^\omega \sin \theta (P_\nu^\mu(\cos \theta))^2 d\theta.$$

Используя (3.9.1 (2)) из [1], получим, что

$$\|P_\nu(\cos \theta)\|^2 = \frac{\omega}{\pi\nu} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right],$$

$$\frac{P_\nu(\cos \theta)}{\|P_\nu(\cos \theta)\|^2} = \frac{\sqrt{2\pi\nu} \cos \left[ \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{1}{4} \right]}{\omega \sqrt{\sin \theta}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right],$$

$$\frac{P_\nu^1(\cos \theta)}{\|P_\nu^1(\cos \theta)\|^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega \sqrt{\nu} \sqrt{\sin \theta}} \cos \left[ \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right]. \quad (38)$$

Подставив сюда асимптотическое выражение для собственных чисел, получим окончательные формулы, приведенные в **Приложении 3**.

Формулы (38) дают возможность установить асимптотику трансформант смещений  $\tilde{u}_k(\rho)$ ,  $\tilde{v}_k(\rho)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k(\rho) &= \rho^{-\nu} R_\nu s_1 - \rho^{-\nu-2} R_{\nu+1} s_3, \\ \tilde{v}_k(\rho) &= \rho^{-\nu} R_\nu s_2 - \rho^{-\nu-2} R_{\nu+1} s_4. \end{aligned} \quad (39)$$

Вид коэффициентов  $s_i^k$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , приведен в **Приложении 4**.

Подставив найденные асимптотики трансформант (39) в формулы обращения (10), (13), установим асимптотические формулы для вычисления смещений  $\tilde{u}(\rho, \theta)$ ,  $\tilde{v}(\rho, \theta)$ .

**Частные случаи поставленной задачи.** При переходе в окончательных формулах для вычисления смещений и напряжений к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$  получим поле смещений и напряжений конечного конуса с острием, усеченного по сферической поверхности и занимающего область  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \omega$ . Формулы для смещений в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\rho, \theta) &= u_0(\rho, \theta) + \frac{\gamma a_1^2}{\pi^2} \omega \sqrt{\frac{\sin \omega}{\sin \theta}} \sin \omega \left( \sin \frac{\omega}{2} + \cos \frac{\omega}{2} \right) \times \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-3} B^+(k, \theta) \rho \frac{k\pi}{\omega} \frac{a_1^2}{2} \times \\ &\quad \times \left\{ \left( \rho - \frac{1}{\rho} \frac{(4\mu - 3)((1 - \mu) + 2\mu(1 - 2\mu))}{5\mu - 3} \right) - 2\rho^2 \right\}, \\ \tilde{v}(\rho, \theta) &= \frac{\gamma a_1^4}{\pi^2} \omega \sqrt{\frac{\sin \omega}{\sin \theta}} \sin \omega \left( \sin \frac{\omega}{2} + \cos \frac{\omega}{2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-3} B_-(k_\theta) \times \\ &\quad \times \rho \frac{k\pi}{\omega} \left\{ \rho + \rho^{-1} \frac{(4\mu - 3)(1 - \mu) + 2\mu(1 - 2\mu)}{2(5\mu - 3)} \right\}, \end{aligned}$$

$$B_{\pm}(k, \theta) = \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \left( \cos \frac{\theta}{2} \pm \sin \frac{\theta}{2} \right) + \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \left( \pm \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Располагая этими формулами, установим формулу для вычисления напряжений  $\sigma_{\theta}(\rho, \theta)$ , которая приведена в *Приложении 5*.

Второй частный случай получим при переходе к значению  $\omega = \pi/2$ , когда конус с острием перейдет в полушар. Расчетные формулы для напряжений запишутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} \left( \rho, \frac{\pi}{2} \right) = & \frac{\gamma a}{\rho(1-2\mu)\pi} * \left\{ \frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} [\rho^{2k}(\rho - \rho^{-1}g) - 2\rho^2] + \frac{\mu a^2}{2} \times \right. \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} [\rho^{2k}(\rho + \rho^{-1}g) - 4\rho^2] - \frac{(1-\mu)a^2}{2} \times \\ & \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \left[ \rho^{2k} \left( \rho + \rho^{-1} \frac{g}{2} \right) \right] \right\}, \\ g = & \frac{(4\mu - 3)(1 - \mu) + 2\mu(1 - 2\mu)}{(5\mu - 3)}. \end{aligned}$$

Если же в окончательных формулах поставленной задачи перейти к значению  $\omega = \pi/2$ , а величину  $\alpha$  считать отличной от нуля,  $\alpha \neq 0$ , получим точное решение осесимметричной задачи для упругого купола под действием собственного веса. В этом случае корни трансцендентного уравнения (11) будут целыми числами  $\nu_k = 2k, k = 0, 1, 2, \dots$ . Асимптотические формулы для смещений и напряжений существенно упрощаются.

**Результаты численного исследования.** Расчеты проводились для стального дважды усеченного конуса (коэффициент Пуассона  $\mu = 0.3$ ) с различными углами раствора:  $\omega = \pi/6$ ,  $\omega = \pi/4$  и  $\omega = \pi/3$ . На рис. 1 (соответствующем величине  $\alpha = 1/4$ ) приведены графики изменения значений нормальных напряжений на поверхности конуса  $\rho \in [\alpha, 1]$ ,  $\theta = \omega$ . Как следует из анализа графиков, при уменьшении угла раствора конуса отмечается появление на его поверхности растягивающих напряжений. Абсолютные значения нормальных напряжений при этом увеличиваются.

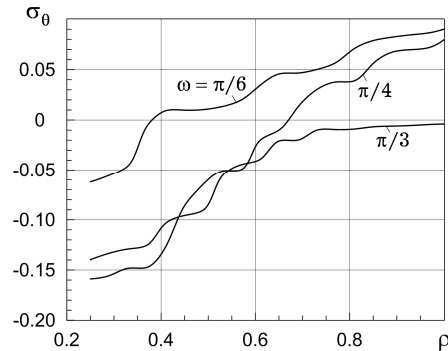


Рис. 1

Также были исследованы величины нормальных напряжений на поверхности сферического купола (при  $\omega = \pi/2$ ) при различных значениях его толщины:  $\alpha = 1/4$ ,  $\alpha = 1/3$  и  $\alpha = 1/2$ . Значения нормальных напряжений приведены в табл. 1.



Таблица 1

$\alpha = 1/4$		$\alpha = 1/3$		$\alpha = 1/2$	
$\rho$	$\sigma_\theta(\rho, \pi/2)$	$\rho$	$\sigma_\theta(\rho, \pi/2)$	$\rho$	$\sigma_\theta(\rho, \pi/2)$
0.25	-0.09089	0.33	-0.12071	0.5	-0.14678
0.29	-0.09061	0.36	-0.11892	0.53	-0.13987
0.33	-0.08907	0.40	-0.10903	0.56	-0.12064
0.37	-0.08063	0.44	-0.104	0.59	-0.08677
0.41	-0.07989	0.48	-0.09742	0.62	-0.03044
0.45	-0.07823	0.52	-0.09022	0.65	0.02077
0.49	-0.07731	0.56	-0.08992	0.68	0.02991
0.53	-0.07001	0.60	-0.07786	0.71	0.03044
0.57	-0.06754	0.64	-0.06051	0.74	0.03905
0.61	-0.06022	0.68	-0.04243	0.77	0.04197
0.65	-0.05922	0.72	-0.02477	0.8	0.04991
0.69	-0.05431	0.76	0.03092	0.83	0.05263
0.73	-0.05004	0.80	0.04659	0.84	0.05772
0.77	-0.04908	0.84	0.05562	0.86	0.06088
0.81	-0.04667	0.88	0.05701	0.88	0.07003
0.85	-0.04223	0.92	0.06341	0.9	0.07899
0.89	-0.03965	0.94	0.06544	0.92	0.08009
0.93	-0.03789	0.96	0.06781	0.94	0.08755
0.97	-0.03044	0.98	0.06933	0.98	0.09703
1.00	-0.02908	1.00	0.07025	1	0.09954

Анализ приведенных напряжений свидетельствует, что уже при толщине купола  $\alpha = 1/4$  и более растягивающие напряжения на его поверхности не наблюдаются (т. е. отрыва нет). При значениях толщины, меньших указанного значения, растягивающие напряжения появляются (т. е. имеет место отрыв), причем абсолютные значения напряжений растут.

Для случая полушара было проведено сравнение вычисленных нормальных напряжений с величинами напряжений, полученными в [2]. Погрешность отклонения результатов не превышала величины  $10^{-3}$ .

**Выводы.** Получено точное решение задачи о напряженном состоянии дважды усеченного конуса под действием собственного веса при выполнении условий скользящей заделки по его конической поверхности.

При изменении параметров задачи можно получить точные решения для частных случаев:

– если устремить  $\alpha \rightarrow 0$ , то получим задачу для конуса с острием;

– если зафиксировать значение угла раствора конуса  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , то конус перейдет в полушар;

– если  $\alpha \neq 0$ , а  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , то конус перейдет в купол.

Приведенная в работе схема построения решения полностью сохранится при выполнении на сферической поверхности  $r = a_0$  условий второй основной задачи либо условий скользящей заделки. Изменение условий повлияет только на изменение вида граничного функционала задачи.

#### Приложение 1.

$$R_v = 2(2v + 1)(2v - 1), \quad N_k = v(v + 1),$$

$$A_+ = \begin{pmatrix} (v + 1)(v(1 - \mu_*) + 2) & \mu_*^{-1}(\mu_0(v + 1) - \mu') \\ -N_k(\mu_0(v + 1) + 2\mu_*) & (v + 1)(v + 2) - 2 - N_k\mu_*^{-1} \end{pmatrix},$$

$$B_+ = \begin{pmatrix} (v-1)v - \mu_* N_k & \mu_0(v-1) - \mu' \\ -N_k(\mu_0(v-1) + 2\mu_*) & v(v-1) - 2 - N_k\mu_*^{-1} \end{pmatrix},$$

$$A_- = \begin{pmatrix} v(-\mu_0(v+1) - 2) & -\mu_*^{-1}\mu_0(v + \chi) \\ -N_k(2\mu_* - \mu_0 v) & v(v-1) - 2 - N_k\mu_*^{-1} \end{pmatrix},$$

$$B_- = \begin{pmatrix} (v+1)(v-1 - \mu_0) & -\mu_*^{-1}\mu_0(v+2) - \chi \\ N_k(\mu_0 v - 2) & (v+2)(v+1) - 2 - N_k\mu_*^{-1} \end{pmatrix}.$$

**Приложение 2.**

$$D_1 = \frac{a_1^2}{\mu_*(N_k - 12)(N_k - 2)} [-\mu_0(f_k^2 + \bar{f}_k^1 N_k) + 2f_k^2 + 6\bar{f}_k^1 - \bar{f}_k^1 N_k],$$

$$D_2 = \frac{a_1^2}{\mu_*(N_k - 12)(N_k - 2)} [-4\mu_0(f_k^2 + \bar{f}_k^1 N_k) - 4f_k^2 - 2\bar{f}_k^1 N_k + f_k^2 N_k],$$

где  $\bar{f}_k = \mu_* \tilde{f}_k^1$ .

**Приложение 3.**

$$\frac{P_v(\cos \theta)}{\|P_v(\cos \theta)\|^2} = \frac{\sqrt{k}\pi}{\omega^{3/2}\sqrt{\sin \theta}} \left[ \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \left( \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ \left. + \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \left( \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right),$$

$$\frac{P_v^1(\cos \theta)}{\|P_v^1(\cos \theta)\|^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{\omega \sin \theta}} \left[ \cos \frac{k\pi}{\omega} \theta \left( \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ \left. + \sin \frac{k\pi}{\omega} \theta \left( -\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right).$$

**Приложение 4.**

$$s_1^k = (-1)^k 4a_1^2 \frac{\alpha^{v+2} h_1 (v+3-4\mu)(1-\mu)(2\alpha^2(3\mu-2) + (1-2\mu)(3-4\mu))}{v^{1/2}(1-2\mu)^2(3-4\mu)},$$

$$s_2^k = (-1)^{k+1} 4a_1^2 \alpha^{v+2} h_1 \times \\ \times \frac{(v-4+4\mu)(v+1)(1-\mu)(2\alpha^2(3\mu-2) + (1-2\mu)(3-4\mu))}{v^{1/2}(1-2\mu)^2(3-4\mu)},$$

$$s_3^k = (-1)^{k+1} 4a_1^2 \alpha^{v+1} \frac{k(v, \alpha)}{v^{3/2}(1-2\mu)^2(3-4\mu)},$$

$$s_4^k = (-1)^k 4a_1^2 \alpha^{v+2} \frac{k(v, \alpha)}{v^{3/2}(1-2\mu)^2(3-4\mu)},$$

$$h_1 = 2\sqrt{\frac{\sin \omega}{\pi}} \cos \omega \left( \sin \frac{\omega}{2} + \cos \frac{\omega}{2} \right),$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\sin \omega}{\pi}} \cos \omega \left( \sin \frac{\omega}{2} - \cos \frac{\omega}{2} \right),$$

$$\begin{aligned}
k(v, \alpha) = & v^2 \alpha^2 h_1(\mu - 1)(8\mu^2 - 4\mu - 1) + \\
& + v [h_1(\alpha^2(\mu - 1)(28\mu^2 - 34\mu + 11) + 2(11 - 14\mu)(1 - \mu)^2)] + \\
& + 2h_2(\alpha^2 - 1)\mu(3 - 4\mu)(3 - 2\mu) + \\
& + h_1[\alpha^2(2(\mu - 1)(1 - 2\mu)(5 - 6\mu)) + 4(1 - 2\mu)(3 - 2\mu)(1 - \mu)^2] + \\
& + 2h_2\mu(\alpha^2 - 1)(1 - 2\mu)(3 - 2\mu).
\end{aligned}$$

**Приложение 5.**

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta(\rho, \theta) = & \sigma_{0\theta}(\rho, \theta) + \frac{\gamma a_1 \omega}{\rho(1 - 2\mu)\pi^2} \sqrt{\frac{\sin \omega}{\sin \theta}} \sin \omega \left( \sin \frac{\omega}{2} + \cos \frac{\omega}{2} \right) \times \\
& \times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-3} B^+(k, \theta) \left[ \rho \frac{k\pi}{\omega} \frac{a_1^2}{2} \times \right. \right. \\
& \times \left( \rho - \rho^{-1} \frac{(4\mu - 3)(1 - \mu) + 2\mu(1 - 2\mu)}{5\mu - 3} \right) - 2\rho^2 \left. \right] + \\
& + \mu \rho \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-3} B^+(k, \theta) \left[ \rho \frac{k\pi}{\omega} \frac{a_1^2}{2} (1 + \rho^{-2}) - \right. \\
& - \mu \rho + (1 - \mu) a_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-3} \rho \frac{k\pi}{\omega} \times \\
& \times \left[ \rho + \rho^{-1} \frac{(4\mu - 3)(1 - \mu) + 2\mu(1 - 2\mu)}{2(5\mu - 3)} \right] \times \\
& \times \left[ -\frac{1}{2 \sin \theta} \left( \cos \frac{k\pi\theta}{\omega} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) + \right. \right. \\
& + \sin \frac{k\pi\theta}{\omega} \left( -\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \left. \right] + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{k\pi\theta}{\omega} \left( -\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \sin \frac{k\pi\theta}{\omega} \left( -\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right) \right] + \\
& + \mu \operatorname{ctg} \theta a_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-3} B_-(k, \theta) \rho \frac{k\pi}{\omega} \times \\
& \times \left[ \rho + \rho^{-1} \frac{(4\mu - 3)(1 - \mu) + 2\mu(1 - 2\mu)}{2(5\mu - 3)} \right] \left. \right\}, \\
\sigma_{0\theta}(\rho, \theta) = & \frac{a_1 q_0}{4(1 - 2\mu)(1 - \cos \omega)} [2 + (1 - 12\mu)\rho].
\end{aligned}$$

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 296 с.

То же: Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions. – Vol. 2: Bessel functions, parabolic cylinder functions, and orthogonal polynomials. – New York McGraw-Hill, 1953.

2. Бондарева В. Ф. Контактная задача для вращающегося полушара // Тр. Всерос. науч.-исслед. ин-та физ.-техн. и радиотехн. измерений. – 1974. – С. 3–13.

3. Вайсфельд Н. Д., Попов Г. Я., Реут В. В. Осесимметричная смешанная задача теории упругости для защемленного по боковой поверхности конуса с присоединенным шаровым сегментом // Прикл. математика и механика. – 2013. – **77**, № 1. – С. 102–112.
4. Попов Г. Я. Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 74–89.
5. Попов Г. Я. Об осесимметричных задачах теории упругости для усеченного полого конуса // Прикл. математика и механика. – 2005. – **69**, № 3. – С. 458–468.
6. Попов Г. Я. Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усеченного кругового полого конуса // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, № 3. – С. 431–443.
7. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 342 с.
8. Хомасуридзе Н. Г. Термоупругое равновесие конических тел // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, № 1. – С. 124–133.
9. Kamran Asemi, Manouchehr Salehi, Mehdi Akhlaghi. Elastic solution of a two-dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads // Acta Mech. – 2011. – **217**, No. 1-2. – P. 119–134.
10. Nowacki W. Teoria sprężystości. – Warszawa: PWN, 1973.
11. Thompson T. R., Little R. W. End effects in a truncated semi-infinite cone // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1970. – **23**, No. 2. – P. 185–196.

### ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН ДВІЧІ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

Розглядається осесимметрична змішана задача про напружений стан двічі зрізаного конуса з урахуванням його власної ваги і за виконання умов гладкого контакту на його конічній поверхні. Застосування нового інтегрального перетворення за меридіанним кутом безпосередньо до рівнянь Ляме зводить задачу в просторі трансформант до одновимірної векторної крайової задачі. Отримана задача розв'язується точно за допомогою методів матричного диференціального числення. Наступним застосуванням обернених інтегральних перетворень отримано остаточний розв'язок вихідної задачі. Досліджено розв'язки таких часткових випадків сформульованої задачі: конус із вістрям, сферичний купол, півкуля. Проведено дослідження нормальних напружень на поверхні конуса залежно від його геометричних параметрів.

### AXISYMMETRIC PROBLEM ON THE STRESS STATE OF TWICE TRUNCATED CONE

The mixed axisymmetric problem on the stress state of the twice truncated cone is considered with the regard to its proper weight and fulfilling the smooth contact conditions on its conic surface. The application of the new integral transformation by the meridian angle directly to Lamé equations reduces the problem in the transformation space to one-dimensional vector boundary problem. The obtained problem is solved exactly with the help of the matrix differential calculus. The subsequent application of the inverse integral transformations leads to the final solution of the initial problem. The solutions of the problem's special cases such as a cone with an edge, a spherical dome, a semicircle are obtained. The estimation of the normal stresses on the cone's surface depending on its geometric parameters is carried out.

Ин-т математики, економіки і механіки  
Одес. нац. ун-та ім. І. І. Мечникова, Одеса

Получено  
21.01.13