

## ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНІ СХЕМИ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ ДЕФОРМУВАННЯ ПЛАСТИН З ОТВОРАМИ ТА ВКЛЮЧЕННЯМИ

*Запропоновано проєкційно-ітераційні схеми реалізації методу скінченних елементів для розв'язування варіаційних задач для пружних тіл з включеннями та отворами. Вивчається взаємовплив отворів і пружного гострокутного включення на прикладі розв'язування плоскої задачі теорії пружності для ізотропної прямокутної пластини при стиску. Досліджено збіжність запропонованих схем.*

**Вступ.** Порушення суцільності (отвори, пори, тріщини) і наявність у матеріалі різноманітних включень є чинником, що зумовлює неоднорідність структури та має суттєвий вплив на концентрацію напружень і процеси деформування і руйнування твердих тіл. Подібні ефекти спричиняють накладки, підкріплення, що змінюють жорсткість системи. Тонкими включеннями можна вважати заповнені матеріалом пори, тріщини а також початкові геометричні недосконалості (відхилення форми від ідеальної) [16, 20].

Зазначимо, що порушення суцільності та геометричні недосконалості можуть виникати при технологічних операціях виготовлення і при експлуатації елементів конструкцій.

Особливу увагу слід звернути на включення, які супроводжують фазові перетворення матеріалів, скажімо, формування мартенситних структур в аустенітному середовищі [11]. Це, зокрема, можна спостерігати у матеріалах з пам'яттю форми, сталях, які експлуатуються при високих або низьких і криогенних температурах [15]. Включеннями можна моделювати смужчатість феритно-перлітної структури в мікроструктурі металів, яка виникає при попередньому складному навантаженні [7, 8]. При цьому зерна втрачають рівноважну структуру, набуваючи видовженої форми (відповідні включення можна моделювати смугами зі зміненою після розвантаження межею текучості). Труднощі дослідження неоднорідно пружної структури, що виникає після зняття попереднього навантаження, при наступному навантаженні пов'язані, зокрема, з появою залишкових деформацій. Включення і щілини можуть моделювати, зокрема, дефекти, які виникають на межі поділу матеріалів, кристалітів.

Елементами конструкцій сучасної техніки часто є тонкі пластини, послаблені отворами та включеннями різної форми. Отвори і включення виникають також внаслідок вказаних вище причин. При навантаженні таких пластин поблизу меж отворів і включень виникає концентрація напружень, яка може спричинити появу недопустимих деформацій або й руйнування. Різноманітні аналітичні методи розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) пластин з отворами і включеннями досліджено в [13, 16, 22, 23, 25] та ін. Однак знаходження розв'язків відповідних задач в аналітичному вигляді є можливим лише в окремих випадках геометричної форми пластин, отворів і включень, навантаження та умов закріплення.

Для інженерної практики розрахунку важливим є застосування числових методів. До найбільш розповсюджених ефективних числових методів розв'язання задач механіки деформованого твердого тіла відносяться варіаційно-сітковий метод скінченних елементів (МСЕ), варіаційно-різницеви методи, метод граничних інтегральних рівнянь [10, 17, 18, 24, 26]. Ці методи широко використовуються при дослідженні НДС пластин та оболонок з неоднорідностями у вигляді отворів і включень.

Однак при застосуванні таких методів особливо важливим завданням є побудова ефективних розрахункових схем визначення НДС складних елементів конструкцій. До таких схем належать проєкційно-ітераційні варіанти

МСЕ, які дозволяють істотно зменшити час комп'ютерного розрахунку. Застосування відповідних схем їх реалізації до розв'язування задач пружного та пружно-пластичного деформування пластин і циліндричних оболонок з різними отворами та пластин з включеннями містять праці [2, 4, 19, 21].

У цій роботі запропоновано проєкційно-ітераційні схеми МСЕ розв'язування варіаційних задач для пружних тіл з отворами і включеннями. З їх застосуванням досліджено НДС пружної прямокутної пластини з прямокутними отворами та пружним гострокутним включенням при стиску. Приділено увагу питанню ефективності запропонованих схем при використанні трикутних скінченних елементів (СЕ). Досліджується взаємовплив отворів і включень на розподіл полів переміщень і напружень.

**Постановка задачі.** Розглядаємо прямокутну ізотропну пружну пластину  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  зі сторонами  $L_1$ ,  $L_2$  і прямокутними отворами та пружним прямокутним включенням  $\Omega_2$  розміром  $f_1 \times f_2$  (рис. 1). На рисунку зображено випадок чотирьох однакових отворів розміром  $d_1 \times d_2$ , хоча в загальному кількість отворів і включень і їх розміри можуть бути різними. На зовнішній частині межі пластини задано навантаження

$$P_x = 0, \quad P_y = P = \text{const}.$$

Необхідно визначити поля переміщень і напружень в пластині та дослідити взаємовплив отворів і включення. На рис. 1 штриховими лініями позначено перерізи, де у подальшому будуть визначені напруження.

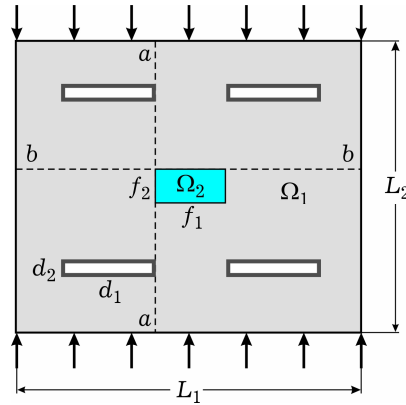


Рис. 1

У випадку плоского напруженого стану ( $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ) повна потенціальна енергія системи має вигляд [1]

$$W[u, v] = \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k \iint_{\Omega_k} \left\{ \frac{2}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \lambda_k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{\gamma} (P_x u + P_y v) d\gamma, \quad (1)$$

де  $u, v$  – проєкції вектора переміщень на осі  $Ox, Oy$  відповідно;  $\lambda_k$  і  $\mu_k$  – сталі Ляме для відповідного матеріалу пластини і включення,  $k = 1, 2, \dots, \ell$ ;  $\gamma$  – контур пластини, до якого прикладено навантаження.

Поля напружень  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  і деформацій  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$  пов'язані між собою законом Гука

$$\sigma_{xx} = \lambda_k \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu_k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = \lambda_k \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu_k \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\sigma_{xy} = \mu_k \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Для розв'язування задачі мінімізації функціоналу (1) на множині усіх кінематично допустимих переміщень застосуємо проекційно-ітераційний варіант МСЕ. Основна ідея цього варіанту для розв'язування задачі у варіаційній постановці полягає у наступному. Аналогічно до випадку застосування проекційного методу Рітца, вихідну варіаційну задачу апроксимуємо послідовністю задач умовної мінімізації. Для розв'язування цих задач використовуємо якийсь із ітераційних методів, причому для кожної з задач знаходимо лише декілька наближень, останнє з яких беремо за початкове наближення розв'язку для наступної задачі. За послідовність наближень до розв'язку вихідної варіаційної задачі приймаємо отриману послідовність розв'язків наближених задач.

У розглядуваному випадку вихідну екстремальну задачу

$$W[z] \rightarrow \inf, \quad z \in Z,$$

де  $Z$  – множина кінематично допустимих переміщень  $z = (u, v)$ , апроксимуємо за допомогою МСЕ послідовністю дискретних екстремальних задач ( $n = 1, 2, \dots$ ) для функцій багатьох змінних:

$$W_n[z_n] \rightarrow \inf, \quad z_n \in Z_n,$$

де  $Z_n$  – дискретний аналог множини  $Z$ .

Кожна з одержаних задач розв'язується за допомогою методу послідовної верхньої релаксації [14], але не до кінця. Починаючи з деякого  $n = N$  досить грубого розбиття, для відповідної функції багатьох змінних  $W_n$  будується лише декілька ( $k_n$ ) наближень до її точки мінімуму, останнє з яких інтерполюється на більш дрібну ( $n + 1$ ) скінченноелементну сітку і служить на ній початковим наближенням до точки мінімуму для відповідної функції багатьох змінних  $W_{n+1}$ . Процес продовжується, поки не буде досягнуто заданої точності між двома сусідніми наближеннями. Основні положення проекційно-ітераційних варіантів МСЕ містяться у [2, 3, 12, 14, 17–19, 21] та ін.

Введемо в області  $\Omega$  сітку із трикутних СЕ, які утворені поділом прямокутників розмірами  $2\Delta x_n \times 2\Delta y_n$  діагоналлю на дві однакові частини. Тут індекс  $n$  означає відповідність розбиття області черговій дискретній задачі, що розглядається. В результаті розбиття області  $\Omega$  отримуємо два види скінченних елементів (рис. 2). Зазначимо, що ефективність трикутних СЕ (лінійна апроксимація функцій переміщень) порівняно з прямокутними СЕ (білінійна апроксимація) при використанні проекційно-ітераційних схем МСЕ досліджено у [6].

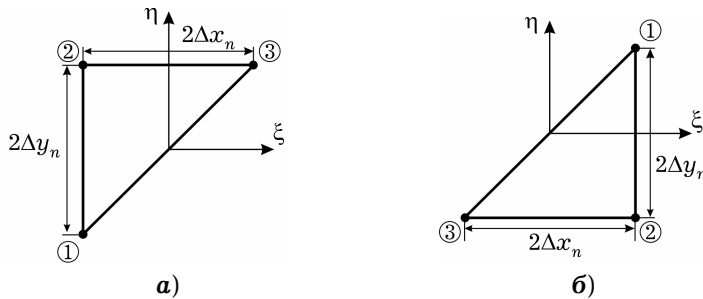


Рис. 2

Введемо локальну систему координат  $O'\xi\eta$  і апроксимуємо шукані функції  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  лінійними поліномами:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= a_0 + a_1\xi + a_2\eta, \\ v(\xi, \eta) &= b_0 + b_1\xi + b_2\eta, \end{aligned} \quad (2)$$

де невідомі коефіцієнти  $a_i, b_i$  знайдемо з умов співпадиння значень поліномів (2) з вузловими значеннями переміщень  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$  у вершинах виділеного СЕ.

Так,

$$\begin{aligned} u_1 &= u(\Delta x_n, \Delta y_n) = a_0 + a_1\Delta x_n + a_2\Delta y_n, \\ u_2 &= u(\Delta x_n, -\Delta y_n) = a_0 + a_1\Delta x_n - a_2\Delta y_n, \\ u_3 &= u(-\Delta x_n, -\Delta y_n) = a_0 - a_1\Delta x_n - a_2\Delta y_n, \end{aligned}$$

звідки

$$a_0 = \frac{u_1 + u_3}{2}, \quad a_1 = \frac{u_2 - u_3}{2\Delta x_n}, \quad a_2 = \frac{u_1 - u_2}{2\Delta y_n}. \quad (3)$$

Аналогічно запишемо значення для  $b_0, b_1, b_2$ :

$$b_0 = \frac{v_1 + v_3}{2}, \quad b_1 = \frac{v_2 - v_3}{2\Delta x_n}, \quad b_2 = \frac{v_1 - v_2}{2\Delta y_n}. \quad (4)$$

Коефіцієнти для другого виду СЕ одержимо з формул (3), (4) зміною знаку в формулах для  $a_1, a_2, b_1, b_2$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= u(\Delta x_n, \Delta y_n) = a_0 - a_1\Delta x_n - a_2\Delta y_n, \\ u_2 &= u(\Delta x_n, -\Delta y_n) = a_0 - a_1\Delta x_n + a_2\Delta y_n, \\ u_3 &= u(-\Delta x_n, -\Delta y_n) = a_0 + a_1\Delta x_n + a_2\Delta y_n, \end{aligned}$$

звідки

$$a_0 = \frac{u_1 + u_3}{2}, \quad a_1 = \frac{u_3 - u_2}{2\Delta x_n}, \quad a_2 = \frac{u_2 - u_1}{2\Delta y_n}.$$

Аналогічно для  $b_0, b_1, b_2$ :

$$b_0 = \frac{v_1 + v_3}{2}, \quad b_1 = \frac{v_3 - v_2}{2\Delta x_n}, \quad b_2 = \frac{v_2 - v_1}{2\Delta y_n}.$$

Інтеграл в (1) замінимо сумою інтегралів за скінченними елементами ( $m = 1, 2, \dots, M_n, n = 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} W &= \sum_{m=1}^{M_n} \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k \iint_{\Omega_{km}} \frac{2}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right) + \lambda_k \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right\} d\xi d\eta - \sum_{j=1}^{J_n} \int_{\gamma_j} (P_x u + P_y v) d\gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут  $M_n$  – кількість скінченних елементів в області  $\Omega$  для  $n$ -ї дискретної задачі;  $J_n$  – кількість скінченних елементів на межі  $\gamma$ .

Використовуючи формули (2), можемо аналітично обчислити інтеграл по кожному СЕ. В результаті функціонал (5) замінюється функцією бага-

тох змінних відносно невідомих вузлових переміщень  $u_i$  і  $v_i$  ( $i=1, 2, \dots, M_{1n}$ , де  $M_{1n}$  – кількість вузлів  $n$ -ї скінченноелементної сітки із  $M_n$  елементів в області  $\Omega$ ):

$$W_n[u_i, v_i] = \mu_k \left\{ \frac{2}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \left( \frac{(u_2 - u_3)^2 \Delta y_n}{2\Delta x_n} + \frac{(v_1 - v_2)^2 \Delta x_n}{2\Delta y_n} \right) + \lambda_k \frac{(u_2 - u_3)(v_1 - v_2)}{2} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{(u_1 - u_2)^2 \Delta x_n}{2\Delta y_n} + \frac{(v_2 - v_3)^2 \Delta y_n}{2\Delta x_n} + (u_1 - u_2)(v_2 - v_3) \right) \right\} + \dots \quad (6)$$

Тут  $2\Delta x_n, 2\Delta y_n$  – розміри SE  $n$ -ї скінченноелементної сітки (рис. 2).

Побудуємо семиточковий шаблон, утворений шістьма скінченними елементами, і вузол  $(i, j)$  позначимо цифрою 7 (рис. 3).

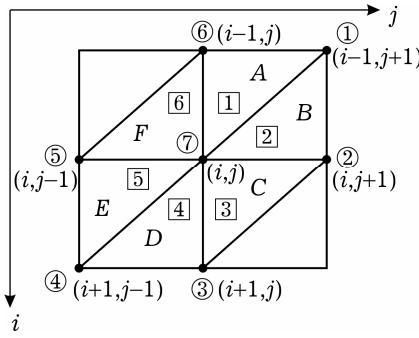


Рис. 3

При знаходженні похідної від функції (6) за  $u_i$  і  $v_i$  у кожному поточному вузлі будуть задіяні лише ті вузли, які є вершинами суміжних з  $(i, j)$  скінченних елементів. Запишемо фрагмент функції (6), що стосується шаблону (рис. 3), враховуючи, що в шаблон входять два види скінченних елементів: 2, 4, 6 – SE першого виду (рис. 2а) і 1, 3, 5 – SE другого виду (рис. 2б). Величини  $u_i$  і  $v_i$  у (6) входять у квадраті або у вигляді добутку, тому зміна їхнього знаку не впливає на результат. Маємо

$$W_n[u_i, v_i] = \mu_k \left\{ \frac{2}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \left( \frac{(u_6 - u_1)^2 \Delta y_n^{(1)}}{2\Delta x_n^{(1)}} + \frac{(v_7 - v_6)^2 \Delta x_n^{(1)}}{2\Delta y_n^{(1)}} \right) + \lambda_k \frac{(u_6 - u_1)(v_7 - v_6)}{2} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{(u_7 - u_6)^2 \Delta x_n^{(1)}}{2\Delta y_n^{(1)}} + \frac{(v_6 - v_1)^2 \Delta y_n^{(1)}}{2\Delta x_n^{(1)}} + (u_7 - u_6)(v_6 - v_1) \right) \right\} + \mu_k \left\{ \frac{2}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \left( \frac{(u_2 - u_7)^2 \Delta y_n^{(2)}}{2\Delta x_n^{(2)}} + \frac{(v_1 - v_2)^2 \Delta x_n^{(2)}}{2\Delta y_n^{(2)}} \right) + \lambda_k \frac{(u_2 - u_7)(v_1 - v_2)}{2} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{(u_1 - u_2)^2 \Delta x_n^{(2)}}{2\Delta y_n^{(2)}} + \frac{(v_2 - v_7)^2 \Delta y_n^{(2)}}{2\Delta x_n^{(2)}} + (u_1 - u_2)(v_2 - v_7) \right) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \mu_k \left\{ \frac{2}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \cdot \left( \frac{(u_7 - u_2)^2 \Delta y_n^{(3)}}{2\Delta x_n^{(3)}} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{(v_3 - v_7)^2 \Delta x_n^{(3)}}{2\Delta y_n^{(3)}} \right) + \lambda_k \frac{(u_7 - u_2)(v_3 - v_7)}{2} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{(u_3 - u_7)^2 \Delta x_n^{(3)}}{2\Delta y_n^{(3)}} + \frac{(v_7 - v_2)^2 \Delta y_n^{(3)}}{2\Delta x_n^{(3)}} + (u_3 - u_7)(v_7 - v_2) \right) \right\} + \\
& + \mu_k \left\{ \frac{2}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \cdot \left( \frac{(u_3 - u_4)^2 \Delta y_n^{(4)}}{2\Delta x_n^{(4)}} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{(v_7 - v_3)^2 \Delta x_n^{(4)}}{2\Delta y_n^{(4)}} \right) + \lambda_k \frac{(u_3 - u_4)(v_7 - v_3)}{2} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{(u_7 - u_3)^2 \Delta x_n^{(4)}}{2\Delta y_n^{(4)}} + \frac{(v_3 - v_4)^2 \Delta y_n^{(4)}}{2\Delta x_n^{(4)}} + (u_7 - u_3)(v_3 - v_4) \right) \right\} + \\
& + \mu_k \left\{ \frac{2}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \cdot \left( \frac{(u_5 - u_7)^2 \Delta y_n^{(5)}}{2\Delta x_n^{(5)}} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{(v_4 - v_5)^2 \Delta x_n^{(5)}}{2\Delta y_n^{(5)}} \right) + \lambda_k \frac{(u_5 - u_7)(v_4 - v_5)}{2} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{(u_4 - u_5)^2 \Delta x_n^{(5)}}{2\Delta y_n^{(5)}} + \frac{(v_5 - v_7)^2 \Delta y_n^{(5)}}{2\Delta x_n^{(5)}} + (u_4 - u_5)(v_5 - v_7) \right) \right\} + \\
& + \mu_k \left\{ \frac{2}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \cdot \left( \frac{(u_7 - u_5)^2 \Delta y_n^{(6)}}{2\Delta x_n^{(6)}} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{(v_6 - v_7)^2 \Delta x_n^{(6)}}{2\Delta y_n^{(6)}} \right) + \lambda_k \frac{(u_7 - u_5)(v_6 - v_7)}{2} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{(u_6 - u_7)^2 \Delta x_n^{(6)}}{2\Delta y_n^{(6)}} + \frac{(v_7 - v_5)^2 \Delta y_n^{(6)}}{2\Delta x_n^{(6)}} + (u_6 - u_7)(v_7 - v_5) \right) \right\} + \dots, \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, M_{1n},
\end{aligned}$$

де верхнім індексом у  $\Delta y_n^{(s)}$  та  $\Delta x_n^{(s)}$  позначено номер відповідного СЕ,  $s = 1, 2, \dots, 6$ .

Застосуємо необхідні умови мінімуму функції багатьох змінних, частинні похідні при цьому прирівнюючи до нуля:

$$\frac{\partial W_n}{\partial u_7} = 0, \quad \frac{\partial W_n}{\partial v_7} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Внаслідок цього отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_n}{\partial u_7} = & \frac{\mu_k}{2} \left[ \frac{2(u_7 - u_6)\Delta x_n^{(1)}}{2\Delta y_n^{(1)}} + (v_6 - v_1) \right] t_1 - \frac{2\mu_k}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \times \right. \\
& \left. \times \frac{2(u_2 - u_7)\Delta y_n^{(2)}}{2\Delta x_n^{(2)}} + \frac{\lambda_k}{2} (v_1 - v_2) \right] t_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\mu_k}{2\mu_k + \lambda_k} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \frac{2(u_7 - u_2)\Delta y_n^{(3)}}{2\Delta x_n^{(3)}} + \frac{\lambda_k}{2} (v_3 - v_7) \right] t_3 - \\
& - \frac{\mu_k}{2} \left[ \frac{2(u_3 - u_7)\Delta x_n^{(3)}}{2\Delta y_n^{(3)}} + (v_7 - v_2) \right] t_3 + \\
& + \frac{\mu_k}{2} \left[ \frac{2(u_7 - u_4)\Delta x_n^{(4)}}{2\Delta y_n^{(4)}} + (v_3 - v_4) \right] t_4 - \\
& - \frac{2\mu_k}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \frac{2(u_5 - u_7)\Delta y_n^{(5)}}{2\Delta x_n^{(5)}} + \frac{\lambda_k}{2} (v_4 - v_5) \right] t_5 + \\
& + \frac{2\mu_k}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \frac{2(u_7 - u_5)\Delta y_n^{(6)}}{2\Delta x_n^{(6)}} + \frac{\lambda_k}{2} (v_4 - v_5) \right] t_6 - \\
& - \frac{\mu_k}{2} \left[ \frac{2(u_6 - u_7)\Delta x_n^{(6)}}{2\Delta y_n^{(6)}} + (v_7 - v_5) \right] t_7 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_n}{\partial v_7} & = \frac{2\mu_k}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \frac{2(v_7 - v_6)\Delta x_n^{(1)}}{2\Delta y_n^{(1)}} + \frac{\lambda_k}{2} (u_6 - u_1) \right] t_1 - \\
& - \frac{\mu_k}{2} \left[ \frac{2(v_2 - v_7)\Delta y_n^{(2)}}{2\Delta x_n^{(2)}} + (u_1 - u_2) \right] t_2 - \\
& - \frac{2\mu_k}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \frac{2(v_3 - v_7)\Delta x_n^{(3)}}{2\Delta y_n^{(3)}} + \frac{\lambda_k}{2} (u_7 - u_2) \right] t_3 + \\
& + \frac{\mu_k}{2} \left[ \frac{2(v_7 - v_2)\Delta y_n^{(3)}}{2\Delta x_n^{(3)}} + (u_3 - u_7) \right] t_3 + \\
& + \frac{2\mu_k}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \frac{2(v_7 - v_3)\Delta x_n^{(4)}}{2\Delta y_n^{(4)}} + \right. \\
& \left. + \frac{\lambda_k}{2} (u_3 - u_4) \right] t_4 - \frac{\mu_k}{2} \left[ \frac{2(v_5 - v_7)\Delta y_n^{(5)}}{2\Delta x_n^{(5)}} + (u_4 - u_5) \right] t_5 - \\
& - \frac{2\mu_k}{2\mu_k + \lambda_k} \left[ (\mu_k + \lambda_k) \frac{2(v_6 - v_7)\Delta x_n^{(6)}}{2\Delta y_n^{(6)}} + \frac{\lambda_k}{2} (u_7 - u_5) \right] t_6 + \\
& + \frac{\mu_k}{2} \left[ \frac{2(v_7 - v_5)\Delta y_n^{(6)}}{2\Delta x_n^{(6)}} + (u_6 - u_7) \right] t_6 = 0.
\end{aligned}$$

При обході отвору доводиться використовувати неповний шаблон, тому слід ввести так звані індикатори скінченних елементів  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . При цьому  $t_i = 1$ , якщо відповідний СЕ належить шаблону, і  $t_i = 0$ , якщо не належить. З урахуванням індикаторів СЕ і використанням рівномірної сітки ( $\Delta x_n^{(s)} = \Delta x_n$ ,  $\Delta y_n^{(s)} = \Delta y_n$ ,  $s = 1, 2, \dots, 6$ ) маємо такі формули для обчислення переміщень у поточному вузлі  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned}
\bar{u}_7 = & [A_1(t_2 + t_3) \cdot u_2 + A_4(t_3 + t_4) \cdot u_3 + A_1(t_5 + t_6) \cdot u_5 + A_4(t_1 + t_6) \cdot u_6 + \\
& + (A_3t_1 + A_2t_2) \cdot v_1 - (A_3t_2 + A_4t_3) \cdot v_2 - \\
& - (A_2t_3 + A_3t_4) \cdot v_3 + (A_3t_4 + A_2t_5) \cdot v_4 - \\
& - (A_2t_5 + A_3t_6) \cdot v_5 - (A_3t_1 + A_2t_6) \cdot v_6 + \\
& + (A_2 + A_3)(t_3 + t_6) \cdot v_7] \frac{1}{P}, \\
\bar{v}_7 = & [(A_2t_1 + A_3t_2) \cdot u_1 - (A_3t_2 + A_2t_3) \cdot u_2 - (A_3t_3 + A_2t_4) \cdot u_3 + \\
& + (A_2t_4 + A_3t_5) \cdot u_4 - (A_3t_5 + A_2t_6) \cdot u_5 - \\
& - (A_2t_1 + A_3t_6) \cdot u_6 + (A_2 + A_3)(t_3 + t_6) \cdot u_7 + \\
& + A_6(t_2 + t_3) \cdot v_2 + A_5(t_3 + t_4) \cdot v_3 + \\
& + A_6(t_5 + t_6) \cdot v_5 + A_5(t_1 + t_6) \cdot v_6] \frac{1}{Q}, \tag{8}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\eta = \frac{\Delta x_n}{\Delta y_n}, \quad A_1 = 2\mu_k \frac{(\mu_k + \lambda_k)}{(2\mu_k + \lambda_k)} \eta, \quad A_2 = \frac{\mu_k \lambda_k}{(2\mu_k + \lambda_k)}, \\
A_3 = \frac{\mu_k}{2}, \quad A_4 = \frac{\mu_k \eta}{2}, \quad A_5 = \frac{2\mu_k \eta}{(2\mu_k + \lambda_k)}, \quad A_6 = \frac{\mu_k}{2\eta}, \\
P = A_1(t_2 + t_3 + t_5 + t_6) + A_4(t_1 + t_3 + t_4 + t_6), \\
Q = A_5(t_1 + t_3 + t_4 + t_6) + A_6(t_2 + t_3 + t_5 + t_6).
\end{aligned}$$

Знайдені за (8) значення  $\bar{u}_7$  і  $\bar{v}_7$  уточнюємо згідно з формулами методу послідовної верхньої релаксації [3]:

$$\begin{aligned}
u_7^{(k+1)} &= u_7^{(k)} + \omega(\bar{u}_7 - u_7^{(k)}), \\
v_7^{(k+1)} &= v_7^{(k)} + \omega(\bar{v}_7 - v_7^{(k)}), \tag{9}
\end{aligned}$$

де  $k$  – номер ітерації,  $k = 0, 1, \dots, k_n$ ;  $\omega$  – параметр релаксації [14].

Збіжність проекційно-ітераційного варіанту методу поточної релаксації для задачі мінімізації функціонала (1) досліджено у [3].

Відмітимо, що відповідні шаблон і формули для прямокутних СЕ (білінійна апроксимація функцій переміщень) наведено у [5].

**Алгоритм методу.** Сформулюємо обчислювальний алгоритм розв'язання задачі.

**Крок 1.** Введення геометричних і механічних характеристик пластини (розмір пластини, кількість і розміри отворів і включень, модулі пружності і коефіцієнти Пуассона матеріалів пластини та включень).

**Крок 2.** Формування початкової ( $n = N$ ) скінченноелементної сітки з кількістю  $N_{1n}$  відрізків розбиття по осі  $Ox$  та  $N_{2n}$  – по осі  $Oy$ .

**Крок 3.** Формування початкового наближення  $u_n^{(0)}$ ,  $v_n^{(0)}$  у всіх внутрішніх вузлах сітки; генерація отворів та включень, врахування крайових умов.

**Крок 4.** Використання рекурентних формул для розрахунку наближень у кожному внутрішньому вузлі скінченноелементної сітки за методом верхньої релаксації (9).



**Крок 5.** Перевірка умови закінчення ітераційного процесу на вибраній сітці

$$d_n = \frac{1}{N_{1n} \cdot N_{2n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{1n} \cdot N_{2n}} (u_{ni}^{(k-1)} - u_{ni}^{(k)})^2 + (v_{ni}^{(k-1)} - v_{ni}^{(k)})^2} < \varepsilon_n,$$

де  $k$  – номер ітерації ( $k = 1, 2, \dots, k_n$ );  $u_{ni}^{(k)}$ ,  $v_{ni}^{(k)}$  – компоненти шуканих векторів розв'язку ( $u$ ,  $v$  – проекції переміщень на осі  $Ox$ ,  $Oy$ );  $\varepsilon_n$  – задана точність обчислень на вибраній сітці.

Якщо умова не виконується, то переходимо до **кроку 4**, якщо виконується, то – до **кроку 6**.

**Крок 6.** Перевірка умови необхідності переходу на дрібнішу сітку:

$$\|u_n^{(k_n)} - u_{n-1}^{(k_{n-1})}\| < \varepsilon, \quad \|v_n^{(k_n)} - v_{n-1}^{(k_{n-1})}\| < \varepsilon, \quad (10)$$

де  $u_n^{(k_n)}$ ,  $v_n^{(k_n)}$  і  $u_{n-1}^{(k_{n-1})}$ ,  $v_{n-1}^{(k_{n-1})}$  – розв'язки дискретної задачі на  $n$ -й сітці ( $N_{1n} \times N_{2n}$ ) і  $(n-1)$ -й сітці ( $N_{1(n-1)} \times N_{2(n-1)}$ ),  $n = 1, 2, \dots$ ;  $k_n$  і  $k_{n-1}$  – кількість ітерацій на  $n$ -й і  $(n-1)$ -й сітках відповідно;  $\varepsilon$  – задана точність обчислень.

При виконанні умови (10) наближений розв'язок вважається знайденим і здійснюється перехід до **кроку 9**; якщо умова (10) не виконується, то – до **кроку 7**.

**Крок 7.** Формування нової скінченноелементної сітки з двічі більшою кількістю відрізків розбиття по осях  $Ox$  і  $Oy$  ( $N_{1n} = 2N_{1(n-1)}$ ,  $N_{2n} = 2N_{2(n-1)}$ ).

**Крок 8.** Формування початкового наближення на новій сітці за допомогою інтерполяції знайденого розв'язку на попередній сітці. Перехід до **кроку 4**.

**Крок 9.** Розрахунок полів деформацій і напружень.

**Числовий аналіз задачі.** Числові результати отримано на ПК Intel(R) Celeron (R) CPU E1400 (2,00 GHz) з 1 GB оперативної пам'яті. Алгоритм методу реалізовано на мові Фортран. Задача визначення НДС прямокутної пружної пластини з декількома отворами та пружним включенням була розв'язана за допомогою проекційно-ітераційного варіанта МСЕ, який реалізовано на 6-ти вкладених удвічі скінченноелементних сітках з трикутних лагранжевих елементів першого ступеня при використанні процесу послідовної верхньої релаксації з параметром  $\omega = 1.75$  і точністю обчислень  $\varepsilon = 10^{-9}$ . Одержані результати були порівняні з розв'язками, отриманими для цієї задачі за допомогою традиційного МСЕ (на одній останній сітці).

Розглянуто пластину під дією навантаження  $P_y = 10$  МПа, яка містить чотири однакових отвори і включення. Відношення модулів пружності матеріалу пластини (матриці) і включення  $E_1/E_2 = 1.82$  (у подальшому пластину (включення) з матеріалів 1, 2 позначаємо так: **пл(вк)1(2)**). Розміри пластини  $10 \times 10$  см. Відносні розміри отворів і прямокутного включення  $d_1/d_2 = 3$ ,  $f_1/f_2 = 2$ ,  $d_1/L_1 = 0.3$ ,  $f_1/L_1 = 0.2$ .

Наведемо деякі результати розрахунків. На рис. 4 зображено розподіл відносних напружень  $\sigma_{yy}/P_y$  у перерізі  $a-a$  пластинки. Суцільними лініями позначено дані для **пл1** ( $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа) (без включення), штриховими – для **пл1**, яка містить **вк2**. Спостерігається стрибок напружень у кутових точках отворів і включення. Максимальні напруження для пластини з включенням більші, ніж в пластинах без включення, майже в 2.5 рази.

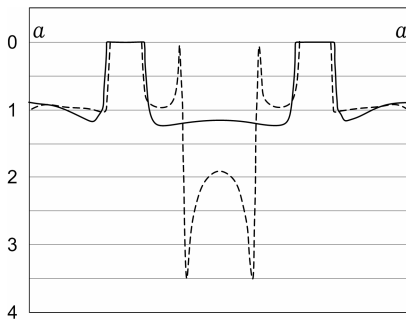


Рис. 4

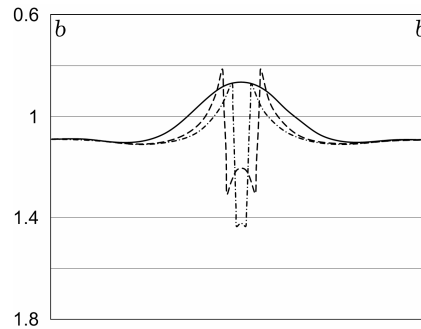


Рис. 5

На рис. 5 показано розподіл відносних напружень  $\sigma_{yy}/P_y$  у перерізі  $b-b$  для  $пл2$  і включень різних розмірів  $вк1$ . Суцільними, штриховими і штрихпунктирними лініями позначено відповідно дані для відносних розмірів включень  $f_1/f_2 = 1, 0.5, 0.25$ . Максимальні напруження виникають у пластині з включенням, що має найменші розміри (включення витягнуте у напрямку осі  $Oy$ ). Стрибок напружень спостерігається у кутових точках включення.

Розроблений алгоритм розв'язування задачі дає можливість здійснити розрахунки НДС для пластин з довільною кількістю включень та отворів різного розміру за одновісного чи двовісного навантаження. При врахуванні впливу деформування матеріалу за межами лінійної пружності чи у зоні пластичності слід застосовувати відомі схеми зведення таких задач до послідовності лінійних, наприклад, методи пружних розв'язків. У цьому випадку будують ітераційні схеми послідовних наближень, у кожному з них розв'язується задача неоднорідної теорії пружності з додатковими навантаженнями, деформаціями або зі змінними параметрами пружності. Розрахунки продовжуються до збіжності двох сусідніх наближень з заданою точністю [4, 9, 21].

Досліджено ефективність проекційно-ітераційного варіанту МСЕ (МСЕ1) і традиційного (на одній сітці) МСЕ (МСЕ2). Виходячи з нульового початкового наближення, що задається на сітці  $10 \times 10$ , розв'язок задачі про визначення НДС на основі МСЕ1 з використанням трикутних елементів одержано після 2400 ітерацій (57 с). При використанні МСЕ2 на одній останній сітці з нульовим початковим наближенням розв'язок було знайдено після 10437 ітерацій (8 хв. 32 с). З точки зору витрат комп'ютерного часу розрахунок МСЕ1 виявився майже у 9 разів ефективнішим від звичайного МСЕ2. Для інших значень геометричних параметрів пластин, отворів і включень, кількості неоднорідностей і властивостей включень така різниця може бути більшою (до 40 разів).

**Висновки.** Дослідження впливу кількості отворів на НДС пластини виявило, що зі збільшенням кількості отворів в пластині спостерігається зростання нормальних і дотичних напружень у пластині, особливо в околі кутових точок отворів та включення.

При дослідженні впливу включення маємо, що максимальні напруження спостерігаються в пластинах з включенням. Для розглянутих параметрів вони більші, ніж у пластинах без включення, майже в 2.5 рази; характер розподілу напружень в пластині з більш жорстким включенням подібний відповідному характеру розподілу в пластині з менш жорстким включенням (напруження зменшуються у 1.2 рази).

Застосування проекційно-ітераційних схем реалізації МСЕ для розв'язування задач пружної рівноваги пластин з отворами та включеннями має істотні переваги порівняно з традиційним МСЕ за часом комп'ютерного розрахунку.

Розроблені алгоритми розрахунку дають можливість досліджувати широкий спектр задач (різні форми і розміри отворів та включень, різні механічні характеристики матеріалу пластин та включень). Для врахування впливу нелінійно пружного чи пластичного деформування матеріалу можливим є поєднання проекційно-ітераційних схем з методом пружних розв'язків.

1. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. – Москва: Высш. шк., 1976. – 272 с.
2. *Гарт Э. Л.* Конечноэлементный анализ плоскодеформируемых сред с включениями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2011. – Вип. 15, т. 2. – С. 39–47.
3. *Гарт Э. Л.* Проекционно-итерационный вариант метода поточечной релаксации // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 70–79.  
Te same: *Hart E. L.* Projection-iterative version of the pointwise relaxation method // J. Math. Sci. – 2010. – 167, No. 1. – P. 76–88.
4. *Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Клименко Д. В., Рябоконт С. А.* Взаимное влияние вырезов на прочность оболочечных конструкций при пластическом деформировании // Проблемы прочности. – 2013. – № 1. – С. 5–16.  
Te same: *Hudramovich V. S., Hart E. L., Klimenko D. V., Ryabokon' S. A.* Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation // Strength Mater. – 2013. – 45, No. 1. – P. 1–9.
5. *Гарт Э. Л., Гудрамович В. С., Рябоконт С. А.* Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению задачи Кирша // Проблемы обчисл. механики і міцності конструкцій. – 2008. – Вип. 12. – С. 34–42.
6. *Гудрамович В. С., Гарт Э. Л.* Влияние формы скінченного элемента на обчислювальную эффективность проекційно-ітераційних методів при розв'язанні плоскої задачі теорії пружності // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 4. – С. 53–58.
7. *Гультяев В. И.* Закономерности пластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Тверь, 2012. – 44 с.
8. *Гультяев В. И., Зубчанинов В. Г., Зубчанинов Д. В.* Структурные изменения стали 45 в процессе деформирования // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Строит. материалы, конструкции и сооружения. – 2005. – Вып. 8. – С. 26–29.
9. *Ильюшин А. А.* Труды (1946–1966): В 4 т. – Т. 2. Пластичность. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 480 с.
10. *Кантор Б. Я., Стрельникова Е. А.* Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. – Харьков: Новое слово, 2005. – 254 с.
11. *Коваль Ю. Н., Лободюк В. А.* Деформационные и релаксационные явления при превращениях мартенситного типа. – Киев: Наук. думка, 2010. – 288 с.
12. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы – Москва: Наука, 1981. – 416 с.
13. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 891 с.
14. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.
15. *Солнцев Ю. П., Ермаков Б. С., Слепцов О. И.* Материалы для низких и криогенных температур. – Санкт-Петербург: Химиздат, 2008. – 768 с.
16. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
17. *Шайдунов В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. – Москва: Наука, 1989. – 288 с.
18. *Hackbusch W.* Multi-grid methods and applications. – Berlin–New York: Springer-Verlag, 2010. – 377 p.
19. *Hart E., Hudramovich V.* Applications of the projective-iterative versions of finite element method in problems of damage for engineering structures // Proc. 2th Int. Conf. «Maintenance-2012» (Zenica, Bosnia and Herzegovina). – Zenica: Univ. of Zenica, 2012. – P. 157–164.
20. *Hudramovich V. S.* Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, No. 12. – P. 1323–1355.  
Te same: *Гудрамович В. С.* Особенности нелинейного деформирования и кри-

- тические состояния оболочечных систем с геометрическими несовершенствами // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 12. – С. 3–38.
21. Hudramovich V., Hart E., Ryabokon' S. Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, No. 1. – P. 181–197.
  22. Luo J. C., Gao C. F. Faber series method for plane problems of an arbitrarily shaped inclusion // Acta Mech. – 2009. – **208**, No. 3–4. – P. 133–145.
  23. Mura T., Hirose Y., Shodja H. M. Inclusion problems // Appl. Mech. Rev. – 1996. – **49**, No. 10S. – P. S118–S127.
  24. Oden J. T. Finite elements of nonlinear continua. – New York: McGraw-Hill, 1972. – 432 p.
  25. Ouinas D., Boutabout B., Bouiadjra B. B., Megueni A. Numerical analysis of the effect of notch-inclusion interaction in a loaded plate // J. Mater. Sci. and Technol. (Bulgaria). – 2004. – **12**, No. 1. – P. 26–35.
  26. Zienkiewicz O. C., Morgan K. Finite elements and approximation. – New York: Wiley & Sons, 1983. – 328 p.

**ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИН  
С ОТВЕРСТИЯМИ И ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

*Разработаны проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов для решения вариационных задач для упругих тел с отверстиями и включениями. Изучается взаимовлияние отверстий и упругого остроугольного включения на примере решения плоской задачи теории упругости для изотропной прямоугольной пластины при сжатии. Исследована сходимость предложенных схем.*

**PROJECTIVE-ITERATIVE SCHEMES FOR THE FINITE ELEMENT  
METHOD REALIZATION IN THE PROBLEMS OF DEFORMATION FOR  
PLATES WITH HOLES AND INCLUSIONS**

*Projective-iterative schemes of the finite element method realization for solution of variational problems for elastic bodies with holes and inclusions are developed. Mutual influence of holes and acute-angled elastic inclusion on the example of a plane elasticity problem solution for isotropic rectangular plate under compression is studied. The convergence of proposed schemes is investigated.*

<sup>1</sup> Дніпропетр. нац. ун-т  
ім. О. Гончара, Дніпропетровськ,

<sup>2</sup> Ін-т техн. механіки НАН України  
і Нац. косм. агентства України, Дніпропетровськ

Одержано  
24.12.12