

ЗВУКОИЗОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследуются звукоизоляционные свойства пластины, окруженной с двух сторон акустическими средами. Пластина имеет трехслойную структуру (несущие слои являются упругими изотропными, а наполнитель – анизотропным), ограничена по одной координате и находится под воздействием плоской гармонической волны. Рассматриваются два варианта граничных условий: шарнирное опирание и податливые опоры. Для решения искомых функций в тригонометрические ряды. Приведены примеры расчетов.

Введение. В настоящее время имеется большое количество публикаций по исследованию звукоизоляционных свойств различных элементов конструкций [2, 4]. Наиболее полно из них исследованы задачи, посвященные изучению свойств однородных звукопоглощающих препятствий [1, 3, 8–12]. В публикациях же для варианта трехслойных элементов, как правило, не учитываются поперечное обжатие и сдвиг слоев [13], что не позволяет достаточно полно отразить истинную картину их деформированного состояния. Кроме того, недостаточно полно исследовано влияние анизотропии свойств упругого наполнителя и практически совсем не изучено влияние геометрии набегающей волны на акустические свойства препятствия. Оценка влияния всех этих параметров на характер поведения упругой волны при прохождении ее через трехслойное препятствие с практической точки зрения является чрезвычайно актуальным. В настоящей работе предполагается, путем использования новых уточненных моделей трехслойных пластин, учесть влияние вышеназванных параметров.

Целью работы является разработка математической модели колебаний и определение коэффициента звукопоглощения трехслойной пластины в акустической среде, определение показателей поглощения колебаний пластиной в зависимости от частоты набегающей волны, а так же учет влияния на колебательный процесс податливости опор пластины.

1. Постановка задачи. Рассматривается пластина длиной l , окруженная с двух сторон акустическими средами «1» и «2» (рис. 1). Используется прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, при этом предполагается, что плоскость Oxy для пластины является срединной, а ось Oz направлена вглубь среды «2». Центр O системы координат располагаем на краю пластины.

На пластину набегают плоская гармоническая волна с амплитудой давления на фронте p_* и частотой ω . В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах возбуждаются давления с амплитудами p_1 и p_2 соответственно. Основной целью является вычисление коэффициента поглощения η и суммарного коэффициента звукопоглощения преграды:

$$\eta = \left| \frac{p_2}{p_*} \right|_{z=0}, \quad \eta_s = \left| \frac{p_2}{p_1} \right|_{z=0}, \quad p_1 = p_* + p_{1w}, \quad (1)$$

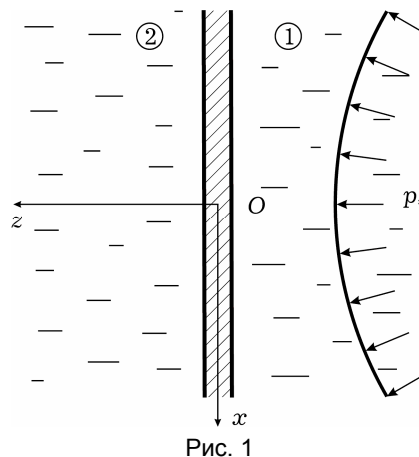


Рис. 1

где p_{1w} – амплитуда давления в отраженной волне на поверхности пластины.

Вместо коэффициентов (1) в приложениях обычно вводят показатель звукоизоляции R_p и суммарный показатель звукоизоляции R_s , измеряемые в децибелах (дБ):

$$R_p = 20 \cdot \lg \left| \frac{p_2}{p_*} \right|_{z=0} = -20 \cdot \lg \eta, \quad R_s = -20 \cdot \lg \eta_s. \quad (2)$$

Предполагается, что пластина является трехслойной и имеет симметричную структуру. Ее внешние (несущие) слои (их нумеруем цифрами 1 и 2) являются упругими изотропными с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и имеют толщину $2t$. Заполнитель толщиной $2h$ ортотропный с модулями обжатия E_3 и сдвига G_1 и G_2 соответственно в направлениях осей Ox и Oy . При этом читается, что ось Oz направлена от слоя номер 1 к слою с номером 2. В рассматриваемом далее частном случае трансверсально-мягкого заполнителя модули сдвига заполнителя равны между собой: $G_1 = G_2 = G$. Предполагаем дополнительно, что амплитуда давления в набегающей волне и, соответственно, все искомые функции зависят только от координаты x .

Движение такой пластины описывается следующими уточненными уравнениями относительно амплитуд тангенциальных перемещений $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$ вдоль осей Ox , Oy соответственно и прогиба $w^{(k)}$ в k -м несущем слое, а также амплитуд постоянных по толщине поперечных касательных напряжений в заполнителе q^1 и q^2 , направленных по осям Ox и Oy соответственно (наличие координаты после запятой соответствует дифференцированию по ней) [5–7]:

$$\begin{aligned} B u_{1,xx}^a + \omega^2 \rho_a u_1^a + 2q^1 &= 0, \\ -D w_{c,xxxx} + \omega^2 \rho_c w_c + 2k_1 q_{,x}^1 + p_1 - p_2 &= 0, \\ -D w_{a,xxxx} + (\omega^2 \rho_{aw} - 2c_3) w_a + p_1 + p_2 &= 0, \\ u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2 q_{,xx}^1 + k_3 q^1 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} u_i^c &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, & u_i^a &= u_i^{(1)} - u_i^{(2)}, & i &= 1, 2, \\ w_c &= w^{(1)} + w^{(2)}, & w_a &= w^{(1)} - w^{(2)}, \\ \rho_a &= 2\rho_b t, & \rho_c &= \rho_a + \rho h, & k_1 &= t + h, \\ B &= \frac{2Et}{1-\nu^2}, & D &= \frac{Bt^2}{3}, & \rho_{aw} &= \rho_a + \frac{\rho h}{3}, \\ c_3 &= \frac{E_3}{2h}, & k_2 &= \frac{h^2}{3c_3}, & k_3 &= \frac{2h}{G}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ρ и ρ_b – плотности материалов заполнителя и внешних слоев; B и D – жесткости несущих слоев на растяжение-сжатие и изгиб.

Для замыкания системы уравнений (3) необходимо определить давления $p_1 = p_* + p_{1w}$ и p_2 . Амплитуда давления в набегающей плоской волне имеет вид [7]

$$p_* = -i\omega\rho_1 A, \quad (5)$$

где A – амплитуда потенциала скоростей в этой волне; ρ_1 – плотность среды.

Амплитуды давлений p_{1w} и p_2 зависят от скорости изменения нормальных перемещений на границах пластины. Для их точного определения необходимо построить решение достаточно сложной задачи для акустической полуплоскости со смешанными граничными условиями. Поэтому далее будем пренебрегать дифракцией на концах пластины.

К уравнениям (3) необходимо добавить граничные условия. Далее рассмотрим два варианта опирания на концах пластины.

2. Пластина с шарнирно опертыми краями. В этом случае граничные условия записываются следующим образом [5, 6]:

$$\begin{aligned} w_c|_{x=0, \ell} = w_a|_{x=0, \ell} = 0, \quad u_{1,x}^a|_{x=0, \ell} = 0, \\ q_{1,x}^1|_{x=0, \ell} = 0, \quad w_{c,xx}|_{x=0, \ell} = w_{a,xx}|_{x=0, \ell} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Искомые функции представляем в виде тригонометрических рядов, удовлетворяющих условиям (6):

$$\begin{aligned} w_c = \sum_{n=1}^{\infty} w_{cn} \sin \lambda_n x, \quad w_a = \sum_{n=1}^{\infty} w_{an} \sin \lambda_n x, \\ u_1^a = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos \lambda_n x, \quad q^1 = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{\ell}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогичным образом записываем амплитуды p_* , p_{1w} и p_2 давлений:

$$p_* = \sum_{n=1}^{\infty} p_{*n} \sin \lambda_n x, \quad p_{1w} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{1n} \sin \lambda_n x, \quad p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} \sin \lambda_n x. \quad (8)$$

Коэффициенты этих рядов в случае одинаковых свойств акустических сред определяются с учетом (5) так:

$$p_{*n} = \frac{2p_*}{\ell} \int_0^{\ell} \sin \lambda_n x dx = -\frac{2p_*}{\pi n} \begin{cases} 0, & n = 2j + 2, \\ 2, & n = 2j + 1, \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$p_{1wn} = -\frac{1}{2}(w_{cn} + w_{an})\Gamma_n(k), \quad p_{2n} = \frac{1}{2}(w_{cn} + w_{an})\Gamma_n(k), \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (10)$$

Здесь c – скорость звука; k – волновое число, а коэффициент Γ_n имеет вид

$$\Gamma_n(k) = \frac{\Gamma_{n0}(k)}{k_{n0}(k)},$$

где

$$k_{n0}(k) = \sqrt{|k^2 - \lambda_n^2|}, \quad \Gamma_{n0}(k) = \rho_1 \omega^2 \varepsilon(k, \lambda_n),$$

$$\varepsilon(k, q) = \begin{cases} i, & |q| < k, \\ -1, & |q| > k. \end{cases}$$

Подставляя теперь ряды (7) и (8) в (3), приходим к следующей системе алгебраических уравнений относительно u_n , w_{cn} , w_{an} и q_n :

$$\begin{aligned} 2q_n - P_1(\lambda_n^2, \omega^2)u_n &= 0, \\ [P_3(\lambda_n^2, \omega^2) + \Gamma_n(k)]w_{cn} + 2k_1\lambda_n q_n &= p_{*n}, \\ S_{1n}(\omega)w_{an} &= p_{*n}, \\ u_n - k_1\lambda_n w_{cn} + P_2(\lambda_n^2)q_n &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(q, \omega) &= Bq - \rho_a \omega, & P_2(q) &= k_2 q + k_3, & P_3(q, \omega) &= Dq^2 - \omega \rho_c, \\ S_{1n}(\omega) &= P_4(\lambda_n^2, \omega^2) + \Gamma_n(k), & P_4(q, \omega) &= Dq^2 - \omega \rho_{aw} + 2c_3. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$w_{an} = \frac{P_{*n}}{S_{1n}(\omega^2)}, \quad w_{cn} = \frac{P_5(\lambda_n^2, \omega^2)}{S_{2n}(\omega)} P_{*n}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} S_{2n}(\omega) &= P_5(\lambda_n^2, \omega^2) \Gamma_n(k) + P_6(\lambda_n^2, \omega^2), \\ P_5(q, \omega) &= 2 + P_1(q, \omega) P_2(q), \\ P_6(q, \omega) &= P_3(q, \omega) P_5(\omega, q) + 2k_1^2 q P_1(q, \omega). \end{aligned}$$

Теперь с использованием равенств (10) и (12), находим коэффициенты p_{2n} и p_{1wn} :

$$p_{2n} = -p_{1wn} = R_n(\omega) P_{*n}, \quad (13)$$

где

$$R_n(\omega) = \frac{P_5(\lambda_n^2, \omega^2) S_{1n}(\omega) - S_{2n}(\omega)}{2S_{1n}(\omega) S_{2n}(\omega)} \Gamma_n(k).$$

Последнюю формулу с целью устранения особенностей при $k = \lambda_n$ удобнее преобразовать следующим образом:

$$R_n(\omega) = \frac{\tilde{S}(\omega)}{2\tilde{S}_{1n}(\omega)\tilde{S}_{2n}(\omega)} k_{n0}(k) \Gamma_{n0}(k),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{1n}(\omega) &= k_{n0}(k) P_4(\lambda_n^2, \omega^2) + \Gamma_{n0}(k), \\ \tilde{S}_{2n}(\omega) &= P_5(\lambda_n^2, \omega^2) \Gamma_{n0}(k) + k_{n0}(k) P_6(\lambda_n^2, \omega^2), \\ \tilde{S}(\omega) &= P_7(\omega^2) P_5(\lambda_n^2, \omega^2) - 2k_1^2 \lambda_n^2 P_1(\lambda_n^2, \omega^2), \\ P_7(\omega) &= P_4(q, \omega) - P_3(q, \omega) = (\rho_c - \rho_{aw}) \omega + 2c_3. \end{aligned}$$

Подставляя теперь (13) в (8), из равенств (1) с учетом (9) получаем окончательные выражения для коэффициента поглощения η и суммарного коэффициента η_s звукопоглощения преграды:

$$\eta = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} R_{2n+1}(\omega) \sin \lambda_{2n+1} x \right|, \quad (14)$$

$$\eta_s = \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{2n+1}(\omega)}{2n+1} \sin \lambda_{2n+1} x}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{1,2n+1}(\omega)}{2n+1} \sin \lambda_{2n+1} x} \right|. \quad (15)$$

В формуле (15) использовано следующее обозначение:

$$R_{1n}(\omega) = 1 - \frac{P_5(\lambda_n^2, \omega^2) \tilde{S}_{1n}(\omega) + \tilde{S}_{2n}(\omega)}{2\tilde{S}_{1n}(\omega) \tilde{S}_{2n}(\omega)} \Gamma_{n0}(k).$$

3. Пластина с податливыми опорами. Предполагается, что обе опоры имеют вид, указанный на рис. 2, где B – ширина нижнего опорного элемента; H – высота опорного элемента; Δ – ширина соединяющей несущие слои диафрагмы. Их реакции в вертикальном направлении определяются моделью Винклера:

$$R_k = \beta_k w^{(k)}.$$

Здесь индекс $k = 1$ соответствует нижнему опорному элементу (нижнему несущему слою), $k = 2$ – диафрагме (верхнему несущему слою), а

$$\beta_1 = \frac{BE_1}{H}, \quad \beta_2 = \frac{\Delta E_2}{t}$$

– жесткости опорных элементов, где E_1 и E_2 – модули Юнга нижнего опорного элемента и диафрагмы.

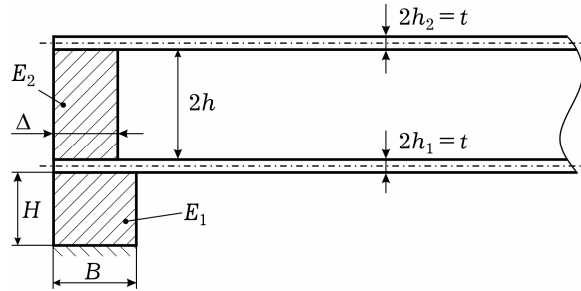


Рис. 2

Как показано в [8], из уравнений равновесия для всей опоры с формул для перерезывающих сил в пластине [5, 6] вытекают следующие граничные условия:

$$u_2^c \Big|_{x=0,\ell} = u_2^a \Big|_{x=0,\ell} = 0,$$

$$(u_{1,x}^c + \nu u_{2,y}^c) \Big|_{x=0,\ell} = (u_{1,x}^a + \nu u_{2,y}^a) \Big|_{x=0,\ell} = 0, \quad (q_{1,x}^1 + q_{1,y}^2) \Big|_{x=0,\ell} = 0,$$

$$[\nu \Delta w_c + (1 - \nu) w_{c,xx}] \Big|_{x=0,\ell} = [\nu \Delta w_a + (1 - \nu) w_{a,xx}] \Big|_{x=0,\ell} = 0, \quad (16)$$

$$\{\beta_+ w_c + \beta_- w_a + tq^1 - 2D[\nu \Delta w_c + (1 - \nu) w_{c,xx}]_x\} \Big|_{x=0,\ell} = 0,$$

$$\{\beta_- w_c + \beta_+ w_a - 2D[\nu \Delta w_a + (1 - \nu) w_{a,xx}]_x\} \Big|_{x=0,\ell} = 0, \quad (17)$$

где

$$\beta_+ = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_- = \beta_1 - \beta_2.$$

Дальнейший алгоритм решения аналогичен использованному в п. 2 подходу с той разницей, что система алгебраических уравнений для определения коэффициентов рядов (7), полученная с помощью граничных условий (16) и (17), в отличие от (11), значительно более громоздка, как и последующие формулы. Поэтому здесь они не приведены.

4. Пример. В качестве примера рассматриваем пластину длины $\ell = 1$ м со следующими параметрами:

– несущие слои выполнены из стали ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.28$; $\rho_b = 7700$ кг/м³) и имеют толщину $t = 1$ мм;

– наполнитель полутолщины $h = 15$ мм шестигранной сотовой структуры с толщиной $\delta = 0.04$ мм и шириной $d = 5$ мм стенки и углом между

гранями сот $\varphi = 60^\circ$ выполнен из алюминиевого сплава АМг2-Н (модуль Юнга $E_* = 6.9 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu_* = 0.3$; плотность $\rho_* = 2830$ кг/м³), что соответствует следующим осредненным параметрам [6]:

$$E_3 = \frac{4\delta E_*}{3(1 - \nu_*^2)d \sin \varphi} = 941 \text{ МПа},$$

$$G = G_* \frac{2\delta(1 + \cos^2 \varphi)}{3d \sin \varphi} = 101 \text{ МПа},$$

$$\rho = \frac{4\delta}{3d \sin \varphi} \rho_* = 3.47 \text{ кг/м}^3.$$

Эти характеристики соответствуют следующим значениям коэффициентов уравнений (3), определяемым равенствами (4):

$$B = 439 \text{ МПа}, \quad D = 0.145 \text{ кН}, \quad c_3 = 3.1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^3,$$

$$\rho_a = 15.4 \text{ кг/м}^2, \quad \rho_c = 15.45 \text{ кг/м}^2, \quad \rho_{aw} = 15.42 \text{ кг/м}^2,$$

$$k_1 = 0.016 \text{ м}, \quad k_2 = 0.24 \cdot 10^{-14} \text{ м}^5/\text{Н}, \quad k_3 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Н}.$$

Окружающие пластину среды – воздух с плотностью $\rho_0 = 1.204$ кг/м³ и скоростью звука $c = 343$ м/с.

Расчеты производились для диапазона частот набегающей волны от 20 Гц до 20 кГц, что соответствует слышимому диапазону.

На рис. 3 приведены графики зависимости показателей звукопоглощения, вычисленных по формулам (2) с учетом (14) и (15), для шарнирно опертой пластины от частоты в набегающей волне ω и координаты x . Рис. 3а соответствует показателю звукопоглощения R_p , а рис. 3б – суммарному показателю R_s .

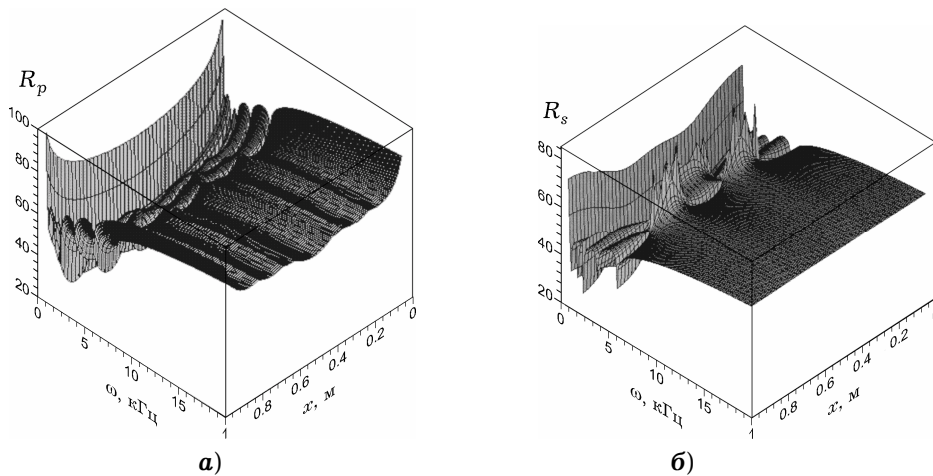


Рис. 3

При проведении расчетов для пластины с податливыми опорами дополнительно использованы следующие параметры: $B = 4$ мм, $H = 5$ мм, $\Delta = 5$ мм, $2h = 30$ мм, $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^4$ МПа (алюминий).

На рис. 4 изображены графики суммарных показателей R_s в зависимости от частоты в падающей волне ω для пластины с податливыми опорами (сплошная линия) и для шарнирно опертой пластины (пунктирная кривая). Здесь же штриховой линией обозначен соответствующий график

показателя R_p для пластины с податливыми опорами.

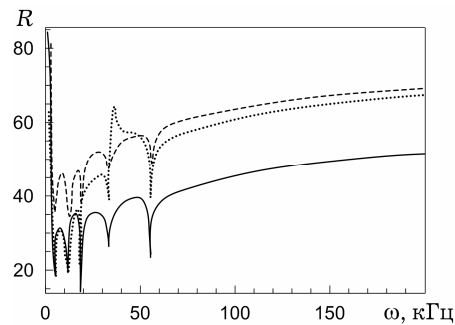


Рис. 4

Выводы. Таким образом, разработан алгоритм моделирования процесса гашения колебаний в звуковом диапазоне при различных параметрах пластины и различных условиях ее закрепления. Этот подход может быть распространен на двумерные преграды и использован в задачах по выбору оптимальных параметров трехслойного звукопоглотителя.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.2019 «Проблемы динамического состояния сложных сред и конструкций») и РФФИ (проект 12-08-90039).

1. Алумяэ Н. А. Теория упругих оболочек и пластинок // Механика в СССР за 50 лет: В 4 т. / Под ред. Л. И. Седова. – Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – Москва: Наука, 1972. – С. 227–266.
2. Акишев Н. И., Закиров И. И., Паймушин В. Н., Шишов М. А. Теоретико-экспериментальный метод определения осредненных упругих и прочностных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций // Механика композит. материалов. – 2011. – 47, № 4 – С. 543–556.
То же: Akishev N. I., Zakirov I. I., Paimushin V. N., Shishov M. A. Theoretical-experimental method for determining the averaged elastic and strength characteristics of a honeycomb core of sandwich designs // Mech. Compos. Mater. – 2011. – 47, No. 4. – P. 377–386.
3. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
4. Горшков А. Г., Пожуев В. И. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1992. – 224 с.
5. Иванов В. А., Паймушин В. Н. Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем и численно-аналитический метод их решения // Прикл. механика и техн. физика. – 1995. – 36, № 4. – С. 137–151.
6. Иванов В. А., Паймушин В. Н. Уточнение уравнений динамики многослойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 3. – С. 142–152.
7. Локтева Н. А., Паймушин В. Н., Тарлаковский Д. В. Определение показателей звукоизоляции для одномерной трехслойной пластины // Проблеми обчислюв. механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 223–231.
8. Park J., Mongeau L. Vibration and sound radiation of viscoelastically supported Mindlin plates // J. Sound Vib. – 2008. – 318, No. 4-5. – P. 1230–1249.
9. Picó R., Gautier F. The vibroacoustics of slightly distorted cylindrical shells: A model of the acoustic input impedance // J. Sound Vib. – 2007. – 302, No. 1-2. – P. 18–38.
10. Plaut R. H., Cotton S. A. Two-dimensional vibrations of air-filled geomembrane tubes resting on rigid or deformable foundations // J. Sound Vib. – 2005. – 282, No. 1-2. – P. 265–276.
11. Rdzaneek W. P. (Jr.), Rdzaneek W. J., Engel Z. Theoretical analysis of sound radiation of an elastically supported circular plate // J. Sound Vib. – 2003. – 265, No. 1. – P. 155–174.
12. Ruzzene M. Vibration and sound radiation of sandwich beams with honeycomb truss core // J. Sound Vib. – 2004. – 277, No. 4-5. – P. 741–763.

13. Stamm K., Witte H. Sandwichkonstruktionen. Berechnung, Fertigung, Ausführung. – Wien–New York: Springer-Verlag, 1974. – 337 S.

ЗВУКОІЗОЛЯЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОВІМІРНОЇ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ

Досліджуються звукоізоляційні властивості пластини, оточеної з двох сторін акустичними середовищами. Пластина має тришарову структуру (несучі шари є пружними ізотропними, а заповнювач – анізотропним), обмежена за однією координатою і перебуває під дією плоскої гармонічної хвилі. Розглядаються два варіанти граничних умов: шарнірне опирання і податливі опори. Для розв'язання задачі використано розвинення шуканих функцій у тригонометричні ряди. Наведено приклади розрахунків.

SOUND INSULATION PROPERTIES OF ONE-DIMENSIONAL THREE-LAYERED PLATE

The sound insulation properties of the plate, surrounded on two sides by acoustic environments, are investigated. The plate has a three-layered structure (bearing layers are elastically isotropic, and the filler is anisotropic). The plate is bounded by one coordinate and is under the action of plane harmonic wave. Two types of conditions are considered: hinged support and yielding supports. To solve the problem the expansion of unknown functions into trigonometric series are used. Examples of calculations are presented.

Моск. авиац. ин-т
(нац. исслед. ун-т), Москва, Россия

Получено
29.11.12