УДК 517.524

О. Є. Баран

ДЕЯКІ КРУГОВІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду встановлено кругові області збіжності, які є багатовимірними узагальненнями деяких відомих теорем (W. Leighton, H. S. Wall, W. J. Thron, L. J. Lange, J. Mc Laughlin, N. J. Wyshinski) про спарені області збіжності неперервних дробів. У випадку, коли гіллястий ланцюговий дріб перетворюється у неперервний $(N = 1)$*, при певних умовах на параметри отримані кругові області збіжності можуть бути ширшими, ніж деякі відомі спарені області збіжності неперервних дробів.*

Важливе місце в теорії неперервних дробів займають спарені області збіжності. Спареними областями збіжності називають такі пари областей $\langle E_1, E_2 \rangle$ комплексної площини, що умови $a_{2k-1} \in E_1$ і $a_{2k} \in E_2$, $k \ge 1$, гарантують збіжність дробу $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{1}$.

Перші спарені області збіжності отримали W. Leighton, H. S. Wall [11] – дріб $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{1}$ збігається, якщо $|a_{2k-1}| \le \dfrac{1}{4}$ і $|a_{2k}| \ge \dfrac{25}{4}$, $k \ge 1$. Покладаючи $a_k = c_k^2$, $k \ge 1$, W. J. Thron [7] встановив збіжність неперервного дробу $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k^2}{1}$, якщо $|c_{2k-1}| \le \rho$ і $|c_{2k} \pm i| \ge \rho$, $0 < \rho < 1$, $k \ge 1$. У [7] показано, що при $\rho = 1$ дріб $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k^2}{1}$ збігається, якщо $|c_{2k-1}| \le 1$, $|c_{2k} \pm i| \ge 1$, $k \ge 1$, і $|c_{2k}| > \varepsilon$, де ε – довільне додатне число. L. J. Lange [9] довів збіжність дробу $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k^2}{1}$, якщо $|c_{2k-1} \pm ia| \le \rho$ і $|c_{2k} \pm i(a+1)| \ge \rho$, $k \ge 1$, де $a \in \mathbb{C}$ та a і ρ задовольняють нерівність $|a| < \rho < |a+1|$. J. Mc Laughlin, N. J. Wyshinski [10] встановили, що дріб $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{1}$ збігається, якщо $|a_{2k-1}| \le c$ і $|a_{2k}| \ge 1 + 3c +$ $+ 2\sqrt{c}\,\sqrt{2c+1}$, $k \ge 1$, де $c > 0$. Спарені області збіжності неперервних дробів також досліджувалися у роботі L. Lorentzen [12] та інших.

Гіллясті ланцюгові дроби є багатовимірними узагальненнями неперервних дробів. Для ГЛД різних конструкцій спарені області збіжності досліджували Т. М. Антонова [1], Є. А. Болтарович [5], В. Р. Гладун [6]. Спарені області збіжності двовимірних неперервних дробів описано в роботах Т. М. Антонової і О. М. Сусь [2], Х. Й. Кучмінської [8].

Найпростішими за структурою, яка аналогічна структурі кратних степеневих рядів, є гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними

$$a_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1} = a_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)} z_{i_2}}{1 + \ddots}},$$

де $i(k) \in I$, $I = \{ i(k) : i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k,\ 1 \le i_p \le i_{p-1},\ p = 1, \ldots, k,\ k \ge 1,\ i_0 = N \}$,

N – максимальна кількість гілок розгалужень, $a_{i(k)}$ – комплексні числа, z_p – комплексні змінні, $p = 1,\ldots,N$. Деякі кругові області збіжності таких дробів досліджено в роботі [3]. У цій роботі встановлено кругові області збіжності числових дробів, які отримуються із ГЛД з нерівнозначними змінними при $z_p = 1$, $p = 1,\ldots,N$.

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де $i(k) \in I$, $a_{i(k)}$ – комплексні числа.

Скінченний дріб

$$f_n = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}$$

називають n-м підхідним дробом ГЛД (1).

Розглянемо послідовності непустих множин $\{V_{i(k)}\}$ і $\{E_{i(k)}\}$, $i(k) \in I$, де множини $V_{i(k)} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ задані, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, а $E_{i(k)} \subseteq \mathbb{C}$ визначаються співвідношеннями:

$$E_{i(k)} := \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{w}{1 + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}} \subseteq V_{i(k)} \right\}. \tag{2}$$

Послідовність множин $\{V_{i(k)}\}$ називають *послідовністю множин значень дробу* (1), а послідовність множин $\{E_{i(k)}\}$ – *послідовністю множин елементів дробу* (1), що відповідає $\{V_{i(k)}\}$, якщо $a_{i(k)} \in E_{i(k)}$, $i(k) \in I$.

Задамо відображення $\ell : I \to \mathbb{N}$ за таким правилом:

$$\ell = \ell(i(k)) = \sum_{s=1}^{k} \delta_{i_k}^{i_s}, \tag{3}$$

де $\delta_{i_k}^{i_s}$ – символ Кронекера. Залежно від значення величини ℓ та значення останнього індексу i_k в мультиіндексі $i(k)$ розіб'ємо множину всіх мультиіндексів I на підмножини:

$$I_1^p = \{i(k) : i(k) \in I,\ i_k = p,\ \ell = 1,\ k \geq 1\},$$

$$I_2^p = \{i(k) : i(k) \in I,\ i_k = p,\ \ell \text{ – парне},\ k \geq 2\},$$

$$I_3^p = \{i(k) : i(k) \in I,\ i_k = p,\ \ell \text{ – непарне},\ \ell > 1,\ k \geq 3\},\ p = 1,\ldots,N.$$

Нехай $I_j := \bigcup\limits_{p=1}^{N} I_j^p$, $j = 1,2,3$. Тоді отримаємо розбиття множини I на три підмножини $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, які попарно не перетинаються.

Для довільного мультиіндексу $i(k) \in I$ позначимо: $V_{i(k)} = V_j^{i_{k-1}}$, $E_{i(k)} = E_j^{i_{k-1}}$, де $j = 1$, якщо $\ell = 1$; $j = 2$, якщо ℓ – парне; $j = 3$, якщо ℓ – непарне і $\ell > 1$; ℓ визначається формулою (3). Тоді співвідношення (2) матиме вигляд

$$E_j^{i_{k-1}} := \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{w}{1 + (1 - \delta_1^N)(i_k - 1)V_1^{i_k} + V_{3-j \bmod 2}^{i_k}} \subseteq V_j^{i_{k-1}} \right\}. \tag{4}$$

Лема. *Нехай*

1°) $N > 1$ *і*

$$V_1^{i_k} := \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| \le \frac{\rho_1}{i_k - 1} \right\}, \tag{5}$$

$$V_3^{i_k} := \{ w \in \mathbb{C} : |w| \le \rho \}, \tag{6}$$

$$V_2^{i_k} := \{ w \in \mathbb{C} : |w| \ge 2 + \rho_1 \}, \tag{7}$$

$$E_1^{i_k} := \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| \le \frac{\rho_1}{i_k - 1} \right\}, \tag{8}$$

$$E_3^{i_k} := \{ w \in \mathbb{C} : |w| \le \rho \}, \tag{9}$$

$$E_2^{i_k} := \{ w \in \mathbb{C} : |w| \ge (2 + \rho_1)(1 + \rho_1 + \rho) \}, \tag{10}$$

2°) $N = 1$ *і* $V_1^{i_k} = V_3^{i_k}$, $V_2^{i_k}$, $E_1^{i_k} = E_3^{i_k}$, $E_2^{i_k}$ *визначаються формулами* (6), (7), (9), (10) *відповідно, де* $i(k) \in I$, $\rho_1 = 0$ *при* $N = 1$ і $\rho_1 > 0$ *при* $N > 1$, $\rho > 0$.

Тоді множини V_j^p *і* E_j^p, $j = 1,2,3$, $p = 1,\dots,N$, *є множинами значень і множинами елементів дробу* (1).

Д о в е д е н н я. ***1°***). Нехай $i(k) \in I$ – довільний мультиіндекс. Позначимо

$$G_{3-j \bmod 2}^{i_k} := \left(1 + (1 - \delta_1^N)(i_k - 1)V_1^{i_k} + V_{3-j \bmod 2}^{i_k}\right), \qquad j = 1,2,3. \tag{11}$$

Із співвідношення (4) маємо, що

$$E_j^{i_{k-1}} \subseteq V_j^{i_{k-1}} G_{3-j \bmod 2}^{i_k}$$

і

$$E_j^{i_{k-1}} = \bigcap_{g_{3-j \bmod 2} \in G_{3-j \bmod 2}^{i_k}} V_j^{i_{k-1}} g_{3-j \bmod 2}, \qquad j = 1,2,3.$$

Покажемо, що при заданих множинах значень (5)–(7) відповідні їм множини елементів дробу (1) мають вигляд (8)–(10).

Нехай $j = 1,3$. Зі співвідношення (11) випливає, що

$$G_2^{i_k} = 1 + (i_k - 1)V_1^{i_k} + V_2^{i_k} = \{ w \in \mathbb{C} : |w - 1| \ge 2 \}.$$

Нехай g_2, g_2' – дві точки множини $G_2^{i_k}$ такі, що $\arg(g_2') = \arg(g_2)$, $|g_2'| < |g_2|$ і $g_2' \in \partial G_2^{i_k}$, де $\partial G_2^{i_k}$ – межа множини $G_2^{i_k}$. Звідси маємо, що

$$V_j^{i_{k-1}} g_2' \subset V_j^{i_{k-1}} g_2, \qquad j = 1,3,$$

і тому

$$E_j^{i_{k-1}} = \bigcap_{g_2 \in G_2^{i_k}} V_j^{i_{k-1}} g_2 = \bigcap_{g_2' \in \partial G_2^{i_k}} V_j^{i_{k-1}} g_2', \qquad j = 1,3.$$

Оскільки $\min\limits_{g_2' \in \partial G_2^{i_k}} |g_2'| = 1$, то множини $E_j^{i_{k-1}} = V_j^{i_{k-1}}$, $j = 1, 3$, тобто мають вигляд (8), (9) відповідно.

Нехай $j = 2$. Зі співвідношення (11) випливає, що

$$G_3^{i_k} = 1 + (i_k - 1)V_1^{i_k} + V_3^{i_k} = \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| \le \rho_1 + \rho\}.$$

Нехай g_3, g_3' – дві точки множини $G_3^{i_k}$ такі, що $\arg(g_3') = \arg(g_3)$, $|g_3'| > |g_3|$ і $g_3' \in \partial G_3^{i_k}$. Звідси маємо, що

$$V_2^{i_{k-1}} g_3' \subset V_2^{i_{k-1}} g_3,$$

і тому

$$E_2^{i_{k-1}} = \bigcap_{g_3 \in G_3^{i_k}} V_2^{i_{k-1}} g_3 = \bigcap_{g_3' \in \partial G_3^{i_k}} V_2^{i_{k-1}} g_3'.$$

Оскільки $\max\limits_{g_3' \in \partial G_3^{i_k}} |g_3'| = 1 + \rho_1 + \rho$, то множина $E_2^{i_{k-1}}$ має вигляд (10).

2°). Випадок $N = 1$ доводимо аналогічно, як ***1°***, враховуючи, що $\rho_1 = 0$.

Лему доведено. ♦

Теорема 1. *ГЛД* (1) *збігається, якщо виконуються умови*:

1°) $N > 1$ *і елементи* $a_{i(k)}$ *належать областям*

$$|a_{i(k)}| \le \frac{\rho_1 - \varepsilon_1}{i_{k-1} - 1}, \qquad \text{якщо } i(k) \in I_1^{i_k}, \tag{12}$$

$$|a_{i(k)}| \le \rho - \varepsilon_3, \qquad \text{якщо } i(k) \in I_3^{i_k}, \tag{13}$$

$$|a_{i(k)}| \ge (2 + \rho_1)(1 + \rho_1 + \rho + \varepsilon_2), \qquad \text{якщо } i(k) \in I_2^{i_k}, \tag{14}$$

або

2°) $N = 1$ *і елементи* $a_{i(k)}$ *належать областям* (13), *якщо* $i(k) \in I_1^{i_k} \cup I_3^{i_k}$, *або* (14), *якщо* $i(k) \in I_2^{i_k}$.

Тут $\rho_1 = 0$ *при* $N = 1$ *і* $\rho_1 > 0$ *при* $N > 1$, $\rho > 0$, $0 < \varepsilon_1 < \rho_1$, $0 < \varepsilon_3 < \rho$, $\varepsilon_2 > 0$.

Д о в е д е н н я. ***1°***). Розглянемо ГЛД вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}(z)}{1}, \tag{15}$$

де $c_{i(k)}(z) = a_{i(k)} z$, якщо $i(k) \in I_1^{i_k} \cup I_3^{i_k}$, $c_{i(k)}(z) = a_{i(k)}/z$, якщо $i(k) \in I_2^{i_k}$, z – комплексна змінна. При $z = 1$ дріб (15) зводиться до дробу (1).

За умов (12) теореми при $|z| \le 1 + \mu_1$, де $\mu_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\rho_1 - \varepsilon_1}$, маємо, що $|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)} z| \le \dfrac{\rho_1}{i_{k-1} - 1}$ для всіх $i(k) \in I_1^{i_k}$. Аналогічно, за умов (13) теореми при $|z| \le 1 + \mu_3$, де $\mu_3 = \dfrac{\varepsilon_3}{\rho - \varepsilon_3}$, маємо, що $|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)} z| \le \rho$ для всіх $i(k) \in I_3^{i_k}$. Також за умов (14) при $0 < |z| \le 1 + \mu_2$, де $\mu_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{1 + \rho_1 + \rho}$, маємо, що $|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}/z| \ge (2 + \rho_1)(1 + \rho_1 + \rho)$ для всіх $i(k) \in I_2^{i_k}$.

Нехай $\mu = \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Тоді в області $D := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1 + \mu\}$ для дробу (15) виконуються умови леми, а тому всі підхідні дроби, які є раціональними функціями, є рівномірно обмеженими і належать області

$$1 + NV_1^N = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w - 1| \le \frac{N\rho_1}{N-1} \right\}.$$

За теоремою Монтеля (P. Montel) [4] послідовність підхідних дробів ГЛД (15) утворює нормальну сім'ю голоморфних функцій в області D.

Нехай

$$h = \min\left\{ \frac{r_1}{\rho_1 - \varepsilon_1}, \frac{r}{\rho - \varepsilon_3}, \frac{(2+\rho_1)(1+\rho_1+\rho+\varepsilon_2)}{(2+r_1)(1+r_1+r)} \right\},$$

де $0 < r < \frac{1}{3}$, $0 < r_1 < \frac{1-3r}{1+r}$. Тоді, враховуючи, що $I_j^{i_k} \subseteq I_j$, $j = 1, 2, 3$, для $0 < |z| \le h$ елементи дробу (15) задовольняють умови теореми 3 з [3]:

$$|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}z| \le \frac{r_1}{i_{k-1} - 1}, \qquad i(k) \in I_1^{i_k},$$

$$|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}z| \le r, \qquad i(k) \in I_3^{i_k},$$

$$|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}/z| \ge (2 + r_1)(1 + r_1 + r), \qquad i(k) \in I_2^{i_k}.$$

Отже, ГЛД (15) збігається в області, яка є перетином областей $0 < |z| \le$ $\le h$ і D. За теоремою Стілтьєса – Віталі [4] дріб (15) збігається рівномірно на кожному компакті області D, зокрема в точці $z = 1$.

2°). Позначимо $c_{\underbrace{11\ldots1}_{k}}(z) = c_k(z)$. Тоді дріб (15) матиме вигляд

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(z)}{1}, \tag{16}$$

де $c_{2k-1}(z) = a_{2k-1}z$, $c_{2k}(z) = a_{2k}/z$, $k \ge 1$, z – комплексна змінна.

За умов (13) теореми при $|z| \le 1 + \mu_3$, де $\mu_3 = \frac{\varepsilon_3}{\rho - \varepsilon_3}$, маємо, що $|c_{2k-1}(z)| = |a_{2k-1}z| \le \rho$, $k \ge 1$. Також за умов (14) при $0 < |z| \le 1 + \mu_2$, де $\mu_2 = \frac{\varepsilon_2}{1+\rho}$, маємо, що $|c_{2k}(z)| = |a_{2k}/z| \ge 2(1+\rho)$, $k \ge 1$.

Нехай $\mu = \min(\mu_2, \mu_3)$. Тоді в області $D := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1 + \mu\}$ для дробу (16) виконуються умови леми, а тому всі підхідні дроби, які є раціональними функціями, є рівномірно обмеженими і належать області

$$1 + V_1^1 = \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| \le \rho\}.$$

За теоремою Монтеля послідовність підхідних дробів неперервного дробу (16) утворює нормальну сім'ю голоморфних функцій в області D.

Нехай $h = \min\left\{ \frac{1}{4(\rho - \varepsilon_3)}, \frac{8(1+\rho+\varepsilon_2)}{25} \right\}$. Тоді для $0 < |z| \le h$ елементи дробу (16) задовольняють умови теореми Leighton – Wall [11]:

$$|c_{2k-1}(z)| = |a_{2k-1}z| \le \frac{1}{4},$$

$$|c_{2k}(z)| = \left|\frac{a_{2k}}{z}\right| \ge \frac{25}{4}, \qquad k \ge 1.$$

Отже, дріб (16) збігається в області, яка є перетином областей $0 < |z| \le$ $\le h$ і D. За теоремою Стілтьєса – Віталі дріб (16) збігається рівномірно на кожному компакті області D, зокрема в точці $z = 1$.

Теорему доведено. ♦

Результат J. Mc Laughlin, N. J. Wyshinski [10] про те, що неперервний дріб $\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\frac{a_k}{1}$ збігається до скінченного значення, якщо

$$|a_{2k-1}| \le c, \qquad |a_{2k}| \ge 1 + 3c + 2\sqrt{c}\,\sqrt{2c+1}, \qquad k \ge 1\,, \tag{17}$$

де $c > 0$, встановлює ширші області збіжності, ніж відома ознака збіжності Leighton – Wall [11]. При $c = \rho - \varepsilon_3$ і $c > \dfrac{-3 - 2\varepsilon + 4\sqrt{1 + 2.5\varepsilon + 2\varepsilon^2}}{7}$, $\varepsilon = \varepsilon_3 + \varepsilon_2$, з теореми 2 при $N = 1$ випливає, що області (13), (14) є ширшими, ніж області (17).

Нехай у дробі (1) $a_{i(k)} = c_{i(k)}^2$, $i(k) \in I$. Отримаємо ГЛД вигляду

$$1 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}^2}{1}\,, \tag{18}$$

де $c_{i(k)}$ – комплексні числа, $i(k) \in I$.

Теорема 2. *ГЛД* (18) *збігається, якщо виконуються умови*:

1°) $N > 1$ *і елементи* $c_{i(k)}$ *належать областям*

$$\left|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{1,i_k}\right| \le \xi_{1,i_k}, \quad (\xi_{1,i_k} + \left|\Gamma_{1,i_k}\right|)^2 \le \frac{\rho_1 - \varepsilon_1}{i_{k-1} - 1}, \quad \text{якщо } i(k) \in I_1\,, \tag{19}$$

$$\left|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{3,i_k}\right| \le \xi_{3,i_k}, \quad (\zeta_{3,i_k} + \left|\Gamma_{3,i_k}\right|)^2 \le \rho - \varepsilon_3\,, \quad \text{якщо } i(k) \in I_3\,, \tag{20}$$

$$\left|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{2,i_k}\right| \ge \xi_{2,i_k}, \quad (\xi_{2,i_k} - \left|\Gamma_{2,i_k}\right|)^2 \ge (2 + \rho_1)(1 + \rho_1 + \rho + \varepsilon_2)\,, \quad \text{якщо } i(k) \in I_2\,, \tag{21}$$

або

2°) $N = 1$ *і елементи* $c_{i(k)}$ *належать областям* (20), *якщо* $i(k) \in I_1 \cup I_3$, *або* (21), *якщо* $i(k) \in I_2$.

Тут $\rho_1 = 0$ *при* $N = 1$ *і* $\rho_1 > 0$ *при* $N > 1$, $\rho > 0$, $0 < \varepsilon_1 < \rho_1$, $0 < \varepsilon_3 < \rho$, $\varepsilon_2 > 0$, $\Gamma_{j,s} \in \mathbb{C}$, $\xi_{j,s} > 0$, $j = 1,2,3$, $s = 1,\ldots,N$.

Д о в е д е н н я. ***1°***). Очевидними є такі оцінки:

$$\left|c_{i(k)}^2\right| \le (\xi_{j,i_k} + \left|\Gamma_{j,i_k}\right|)^2, \qquad i(k) \in I_1 \cup I_3, \qquad j = 1,3\,,$$

$$\left|c_{i(k)}^2\right| \ge (\xi_{2,i_k} - \left|\Gamma_{2,i_k}\right|)^2, \qquad i(k) \in I_2\,.$$

Враховуючи умови (19)–(21), маємо

$$\left|c_{i(k)}^2\right| \le \frac{\rho_1 - \varepsilon_1}{i_{k-1} - 1}, \qquad i(k) \in I_1\,,$$

$$\left|c_{i(k)}^2\right| \le \rho - \varepsilon_3, \qquad i(k) \in I_3\,,$$

$$\left|c_{i(k)}^2\right| \ge (2 + \rho_1)(1 + \rho_1 + \rho + \varepsilon_2), \qquad i(k) \in I_2\,.$$

Отже, для ГЛД (18) виконуються умови теореми 1, тому дріб збігається.

2°). Випадок $N = 1$ доводимо аналогічно.

Теорему доведено. ♦

Якщо у теоремі 2 у випадку $N = 1$ певним чином вибирати параметри $\Gamma_j = \Gamma_{j,1}$, $j = 1, 2$, то отримаємо деякі окремі випадки відомих ознак збіжності неперервного дробу

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{1}. \tag{22}$$

Наслідок. *Неперервний дріб* (22) *збігається, якщо елементи* c_k *дробу є комплексними числами, які задовольняють хоча б одну із умов*:

1°) $|c_{2k-1}| \le \sqrt{\rho - \varepsilon_3}$, $\quad |c_{2k}| \ge \sqrt{2(1 + \rho + \varepsilon_2)}$,

2°) $|c_{2k-1}| \le \sqrt{\rho - \varepsilon_3}$, $\quad |c_{2k} \pm i| \ge \sqrt{2(1 + \rho + \varepsilon_2)} + 1$,

3°) $|c_{2k-1} \pm ia| \le \xi_1$, $\quad (\xi_1 + |a|)^2 \le \rho - \varepsilon_3$,

$|c_{2k} \pm i(a + 1)| \ge \xi_2$, $\quad (\xi_2 - |a + 1|)^2 \ge 2(1 + \rho + \varepsilon_2)$,

де $k \ge 1$, $\rho > 0$, $0 < \varepsilon_3 < \rho$, $\varepsilon_2 > 0$, $a \in \mathbb{C}$, $\xi_j > 0$, $j = 1, 2$.

Умови *1*°) наслідку є узагальненням теореми Leighton – Wall для неперервного дробу вигляду (22). Ці умови дають ширші області збіжності, ніж теорема Leighton – Wall [11]. Умови *2*°) є окремим випадком теореми Трона [7]. При $0 < \rho - \varepsilon_3 \le 1$ умови *2*°) наслідку визначають вужчі області збіжності, ніж теорема Трона, але ці умови гарантують збіжність дробу при $\rho - \varepsilon_3 > 1$. Умови *3*°) подібні до областей збіжності у теоремі L. J. Lange [9].

Отримані області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду є багатовимірними узагальненнями відомих теорем Leighton – Wall, Thron, Lange, Wyshinski – Mc Laughlin про спарені області збіжності неперервних дробів. У випадку $N = 1$ гіллястий ланцюговий дріб перетворюється у неперервний, і при певному виборі параметрів встановлені області збіжності можуть бути ширшими, ніж відомі спарені області збіжності неперервних дробів.

1. *Антонова Т. М.* Збіжність гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами та їх парних частин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 7–15.
2. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 3. – С. 94–101.
3. *Баран О. Є.* Парні кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 73–80.
   Те саме: *Baran O. E.* Twin circular domains of convergence of branched continued fractions with inequivalent variables // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 2. – P. 209–218.
4. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
5. *Болтарович Е. А.* Аналог признака сходимости Лейтона – Уолла для ветвящихся цепных дробей // Методы исследования дифференц. и интегр. операторов. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 32–36.
6. *Гладун В. Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 16–26.
7. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – xxii + 428 p. – Encyclopedia of Mathematics and its Applications / Ed. G.-C. Rota. – Vol. 11.

8. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.
9. *Lange L. J.* On a family of twin convergence regions for continued fractions // Illinois J. Math. – 1966. – **10**. – P. 97–108.
10. *Mc Laughlin J., Wyshinski N. J.* A convergence theorem for continued fractions of the form $K_{n=1}^{\infty} a_n/1$ // J. Comp. Appl. Math. – 2005. – **179**, No. 1-2. – P. 255–262.
11. *Leighton W., Wall H. S.* On the transformation and convergence of continued fractions // Am. J. Math. – 1936. – **58**. – P. 267–281.
12. *Lorentzen L.* Continued fractions with circular twin value sets // Trans. Amer. Math. Soc. – 2008. – **360**, No. 8. – P. 4287–4304.

НЕКОТОРЫЕ КРУГОВЫЕ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Для ветвящихся цепных дробей специального вида установлены круговые области сходимости, которые являются многовымерными обобщениями некоторых известных теорем (W. Leighton, H. S. Wall, W. J. Thron, L. J. Lange, J. Mc Laughlin, N. J. Wyshinski) о парных областях сходимости непрерывных дробей. В случае, когда ветвящаяся цепная дробь преобразуется в непрерывную $(N=1)$, *при некоторых условиях на параметры полученные круговые области сходимости могут быть шире, чем некоторые известные парные области сходимости непрерывных дробей.*

SOME CIRCULAR CONVERGENCE REGIONS OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF SPECIAL FORM

For branched continued fractions of special form circular convergence regions were established, which are multidimensional generalizations of some well known theorems (W. Leighton, H. S. Wall, W. J. Thron, L. J. Lange, J. McLaughlin, N. J. Wyshinski) about twin convergence regions of continued fractions. In case when branched continued fraction is transformed into continued fraction $(N=1)$, *under certain conditions on the parameters obtained circular convergence regions can be wider than some famous twin convergence regions of continued fractions.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.01.13