УДК 517.95

Б. Й. Пташник[1,2], С. М. Репетило[2]

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ – НЕЙМАНА У СМУЗІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено умови однозначної розв'язності у смузі задачі з умовами Діріхле – Неймана за часовою змінною та умовами періодичності або майже періодичності за просторовою координатою для лінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язки розглянутих задач побудовано у вигляді рядів за системами ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язків задач, використано метричний підхід.

Вступ. Крайові задачі з даними на всій границі області для гіперболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними у загальному випадку є некоректними, а їх розв'язність здебільшого пов'язана з проблемою малих знаменників (див., наприклад, [1, 8–12] та бібліографію в них).

У роботах [2, 3] досліджено крайові задачі у безмежному шарі для еволюційних рівнянь і систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами. За певних умов на поведінку розв'язку на безмежності (за просторовими координатами) для розглянутих задач встановлено класи єдиності та класи коректної розв'язності.

Встановлено [1, 9, 10, 12] умови існування єдиного періодичного чи майже періодичного за просторовими координатами розв'язку крайових задач для лінійних та слабко нелінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь високого порядку. Досліджено також питання існування періодичних за часовою змінною розв'язків крайових задач з умовами Діріхле [5, 16] та Діріхле – Неймана [7, 13, 14] для лінійних і нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку.

У цій статті, яка примикає до праць [1; 8 (гл. 3)], для лінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі досліджено однозначну розв'язність задачі з умовами Діріхле – Неймана за часовою змінною та умовами періодичності або майже періодичності за просторовою координатою, а також побудовано розв'язки у вигляді рядів за системами ортогональних функцій від просторової координати. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язків, використано метричний підхід.

1. Основні позначення та допоміжні відомості. Надалі використовуємо такі позначення: $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел; $s \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mu_k \in \mathbb{R}$; Ω^1 – коло одиничного радіуса; $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, x \in \mathbb{R}\}$; $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T,\ x \in \Omega^1\}$; $K_T = \{(t,\tau) : 0 \le t, \tau \le T\}$; $\mathcal{T}$ – простір скінченних тригонометричних поліномів $v(x) = \sum\limits_{|k| \le N} v_k \exp(ikx)$ з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність визначається таким чином: $v^n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}}{\to}} v(x)$, якщо, починаючи з деякого номера, степені всіх поліномів $v^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, не перевищують деякого фіксованого числа N і $v_k^n \underset{n\to\infty}{\to} v_k$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$; $\mathcal{T}'$ – простір усіх антилінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{T}$ зі слабкою збіжністю; зауважимо, що простір $\mathcal{T}'$ співпадає з простором формальних тригонометричних рядів [4]; $C^p([0,T],\mathscr{T})$ $(C^p([0,T],\mathscr{T}'))$ – простір функцій $v(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} v_k(t)\exp(ikx)$, $v_k(t) \in C^p([0,T])$, $k \in \mathbb{Z}$, таких, що при кожному фіксованому $t \in [0,T]$, $\dfrac{\partial^j v}{\partial t^j} \in \mathscr{T}$ $(\mathscr{T}')$, $j \in \{0,1,\dots,p\}$; $H_q(\Omega^1)$, $q \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathscr{T}$ за нормою $\|v; H_q(\Omega^1)\| := \sqrt{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^q |v_k|^2}$; $C^p([0,T], H_q(\Omega^1))$, $q \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, – банахів простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\dfrac{\partial^r v(t,x)}{\partial t^r}$, $r \in \{0,1,\dots,p\}$, належать простору $H_q(\Omega^1)$ і є неперервними за t у нормі цього простору; $\|v; C^p([0,T], H_q(\Omega^1))\| := \sum_{r=0}^{p} \max_{0\leq t\leq T} \left\| \dfrac{\partial^r v}{\partial t^r}; H_q(\Omega^1) \right\|$; c_j, $j = 1,2,\dots$, – додатні сталі, які не залежать від k та μ_k.

2. Рівняння, однорідні за порядком диференціювання. В області Q розглянемо задачу

$$L[u] := \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = f(t,x), \tag{1}$$

$$U_r[u] := \left. \frac{\partial^{2(r-1)} u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}} \right|_{t=0} = \varphi_r(x),$$

$$U_{n+r}[u] := \left. \frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}} \right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \tag{2}$$

де $r \in \{1,\dots,n\}$, $a_s \in \mathbb{R}$, $s \in \{0,1,\dots,n\}$, $a_0 = 1$. Припустимо, що рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським, тобто всі корені рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \lambda^{2(n-s)} = 0 \tag{3}$$

є дійсними та різними, а, отже, і відмінними від нуля.

Зауважимо, що задача (1), (2) (як і задача Діріхле) у смузі Q, взагалі, не буде коректною, якщо на її розв'язок не накласти певні додаткові обмеження (див. [8 (гл. 2; гл. 3), 9, 12]). Такими обмеженнями у цій роботі є умови періодичності та умови майже періодичності за змінною x.

2.1. Розв'язність у класі періодичних функцій. Розглянемо задачу (1), (2) в області D. Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за x на розв'язок $u(t,x)$ та функції $f(t,x)$ і $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$.

Нехай $f(t,x) \in C([0,T],\mathscr{T}')$, $\varphi_j(x) \in \mathscr{T}'$ і

$$f(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(t) \exp(ikx),$$

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{jk} \exp(ikx), \qquad j \in \{1,\dots,2n\}. \tag{4}$$

Означення 1. Розв'язком задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T],\mathscr{T}')$ називатимемо функцію

$$u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)\exp(ikx) \tag{5}$$

таку, що кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, належить простору $C^{2n}([0,T])$ і задовольняє відповідно рівності

$$\sum_{s=0}^{n}a_s(ik)^{2s}\frac{d^{2(n-s)}u_k(t)}{dt^{2(n-s)}}=f_k(t), \qquad t\in(0,T), \tag{6}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0)=\varphi_{rk}, \qquad u_k^{(2r-1)}(T)=\varphi_{n+r,k}, \qquad r\in\{1,\dots,n\}. \tag{7}$$

Отже, розв'язок розглядуваної задачі шукаємо у вигляді ряду (5), де $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, є розв'язком задачі (6), (7).

Крім задач (1), (2) та (6), (7), розглядатимемо відповідні їм однорідні задачі

$$L[u]=0, \tag{1'}$$

$$U_r[u]=0, \qquad U_{n+r}[u]=0, \qquad r\in\{1,\dots,n\}, \tag{2'}$$

та

$$\sum_{s=0}^{n}a_s(ik)^{2s}\frac{\partial^{2(n-s)}u_k(t)}{\partial t^{2(n-s)}}=0, \tag{6'}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0)=0, \qquad u_k^{(2r-1)}(T)=0, \qquad r\in\{1,\dots,n\}. \tag{7'}$$

Якщо $k\neq 0$, то характеристичне рівняння $\sum_{s=0}^{n}a_s(ik)^{2s}\eta^{2(n-s)}=0$, що відповідає рівнянню (6′), має такі корені: $\eta_j=ik\lambda_j$, $\eta_{n+j}(k)=-ik\lambda_j$, $j\in\{1,\dots,n\}$, де $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – додатні корені рівняння (3). Фундаментальна система розв'язків рівняння (6′) має вигляд

$$\{u_{kj}(t)=\exp(ik\lambda_j t),\ u_{k,n+j}(t)=\exp(-ik\lambda_j t),\ j\in\{1,\dots,n\}\},$$

а характеристичний визначник [6] задачі (6), (7) є таким:

$$\Delta(k,T)=\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \eta_1^2 & \dots & \eta_n^2 & \eta_1^2 & \dots & \eta_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_1^{2(n-1)} & \dots & \eta_n^{2(n-1)} & \eta_1^{2(n-1)} & \dots & \eta_n^{2(n-1)} \\ \eta_1 e^{\eta_1 T} & \dots & \eta_n e^{\eta_n T} & -\eta_1 e^{-\eta_1 T} & \dots & -\eta_n e^{-\eta_n T} \\ \eta_1^3 e^{\eta_1 T} & \dots & \eta_n^3 e^{\eta_n T} & -\eta_1^3 e^{-\eta_1 T} & \dots & -\eta_n^3 e^{-\eta_n T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_1^{2n-1} e^{\eta_1 T} & \dots & \eta_n^{2n-1} e^{\eta_n T} & -\eta_1^{2n-1} e^{-\eta_1 T} & \dots & -\eta_n^{2n-1} e^{-\eta_n T} \end{vmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(k,T)=(-2i)^n k^{2n^2-n}\prod_{1\le s<t\le n}(\lambda_s^2-\lambda_t^2)^2\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j\cos(k\lambda_j T)). \tag{8}$$

При $k=0$ рівняння (6′) має вигляд $\frac{d^{2n}u_0(t)}{dt^{2n}}=0$, а його фундаментальна система розв'язків є такою: $\{u_{0j}(t)=t^{j-1},\ j\in\{1,\dots,2n\}\}$. Характеристичний визначник задачі (6), (7) при $k=0$ має вигляд

$$\Delta(0,T)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2T & \dots & nT^{n-1} & \dots & (2n-1)T^{2n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n(n-1)(n-2)T^{n-3} & \dots & (2n-1)(2n-2)(2n-3)T^{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \end{vmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(0,T) = 1!2!\dots(2n-1)!\,. \qquad (9)$$

Відомо [6], що задача (6), (7) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ не може мати двох різних розв'язків тоді й лише тоді, коли $\Delta(k,T) \neq 0$. Тому на підставі (8) і (9) отримуємо таке твердження.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathscr{T}')$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\quad \forall m \in \mathbb{Z}) \qquad \frac{\lambda_j T}{\pi} \neq \frac{2m+1}{2k}, \qquad j \in \{1,\dots,n\}. \qquad (10)$$

Д о в е д е н н я. *Н е о б х і д н і с т ь.* Припустимо, що одна з умов (10) (при $j = j_0$) порушується, тобто для деяких $k = k_0 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ та $m = m_0 \in \mathbb{Z}$ справджується рівність $\lambda_{j_0} T/\pi = (2m_0+1)/(2k_0)$. Тоді існує нетривіальний розв'язок $u^0(t,x) = \sin((2m_0+1)\pi t/(2T))\exp(ik_0 x)$ однорідної задачі (1′), (2′). Тому розв'язок задачі (1), (2), якщо він існує, не буде єдиним.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай задача (1), (2) має два різні розв'язки $u_1(t,x),\, u_2(t,x) \in C^{2n}([0,T],\mathscr{T}')$. Тоді функція $\bar u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, $\bar u(t,x) \in C^{2n}([0,T],\mathscr{T}')$, є нетривіальним розв'язком задачі (1′), (2′), і зображується рядом вигляду (5), у якому кожен коефіцієнт $\bar u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком задачі (6′), (7′), яка за умов (10) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ має лише тривіальний розв'язок. Отже, $\bar u_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Із єдиності розвинення функцій із простору $\mathscr{T}'$ у ряди Фур'є [4] випливає, що $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено. ♦

Наслідок 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathscr{T}')$ *достатньо, щоб числа* $\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\dots,n\}$, *були ірраціональними.*

Надалі будемо вважати, що справджуються умови (10). Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}$ задача (6), (7) має єдиний розв'язок, який зобразимо у вигляді суми

$$u_k(t) = v_k(t) + w_k(t)\,,$$

де $v_k(t)$ – розв'язок задачі (6), (7′), а $w_k(t)$ – розв'язок задачі (6′), (7), причому $w_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\,d\tau$, де $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, – функція Ґріна задачі (6), (7).

Розв'язок задачі (1), (2) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0}\left(v_k(t) + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\,d\tau\right)\exp(ik,x)\,, \qquad (11)$$

в якому

$$v_0(t) = \sum_{\ell,s=1}^{2n} (-1)^{\ell+s} \varphi_{\ell 0} \frac{\Delta_{\ell s}(0,T)}{\Delta(0,T)} t^{s-1},$$

$$G_0(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2n-1}(t-\tau)^{2n-1} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{2n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{s-1}}{1!2!\ldots(2n-2)!(2n-1)} \Bigg(\tau^{2n-2\ell+1} \frac{\Delta_{2\ell-1,s}(0,T)}{(2n-2\ell+1)!} +$$

$$+ (T-\tau)^{2n-2\ell} \frac{\Delta_{2\ell,s}(0,T)}{(2n-2\ell)!} \Bigg), \tag{12}$$

де $\Delta_{\ell s}(0,T)$ – алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині ℓ-го рядка та s-го стовпця у визначнику $\Delta(0,T)$;

$$v_k(t) = \sum_{q,j=1}^{n} S_{n-j}^{(q)} \frac{\varphi_{jk}\lambda_q k\cos(\lambda_q k(T-t)) + \varphi_{n+j,k}\sin(\lambda_q kt)}{(-1)^{n+j}\lambda_q k^{2n-1}\cos(k\lambda_q T)\prod\limits_{s=1,s\neq q}^{n}(\lambda_s^2-\lambda_q^2)},$$

$$k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{13}$$

$$G_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4}\sum_{q=1}^{n}\left(e^{i\lambda_q k(t-\tau)} + (-1)^n e^{-i\lambda_q k(t-\tau)}\right)\times$$

$$\times\left(i\lambda_q k^{2n-1}\prod_{s=1,s\neq q}^{n}(\lambda_s^2-\lambda_q^2)\right)^{-1} +$$

$$+\frac{1}{8}\sum_{s,r,q=1}^{n}(-1)^q iS_{n-r}^{(q)}\lambda_s^{2r-3}k^{2r-4n+1}\times$$

$$\times\left(\lambda_q\prod_{\ell=1,\ell\neq q}^{n}(\lambda_\ell^2-\lambda_q^2)\prod_{h=1,h\neq s}^{n}(\lambda_h^2-\lambda_s^2)\cos(k\lambda_q T)\right)^{-1}\times$$

$$\times\{\lambda_q((-1)^{n-1}e^{i\lambda_s k\tau} - e^{-i\lambda_s k\tau})(e^{i\lambda_q k(T-t)} +$$

$$+(-1)^n e^{-i\lambda_q k(T-t)}) + \lambda_s((-1)^n e^{i\lambda_q kt} - e^{-i\lambda_q kt})\times$$

$$\times(e^{i\lambda_s k(T-\tau)} + (-1)^{n-1}e^{-i\lambda_s k(T-\tau)})\},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{14}$$

де $S_\ell^{(q)}$, $\ell \in \{1,\ldots,n-1\}$, – сума всіх можливих добутків елементів $-(k\lambda_1)^2,\ldots,\ -(k\lambda_{q-1})^2$, $-(k\lambda_{q+1})^2,\ldots,\ -(k\lambda_n)^2$, узятих по ℓ штук у кожному добутку; $S_0^{(q)} \equiv 1$. Функції Ґріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, у квадраті K_T (крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$) визначені формулами (12) і (14). На стороні $\tau = 0$ квадрата K_T кожну з них доозначуємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau = T$ – за неперервністю зліва.

На підставі формул (11)–(14), теореми 1 і теореми 6.2 з [4, с. 111] (згідно з якою довільний тригонометричний ряд у просторі $\mathcal{T}'$ є збіжним), отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (10). *Якщо* $f \in C([0,T],\mathcal{T}')$, $\varphi_j \in \mathcal{T}'$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$.

Оскільки простір $\mathscr{T}$ неперервно вкладається у простір $\mathscr{T}'$, то з теореми 2 випливає

Наслідок 2. *Нехай справджуються умови* (10). *Якщо* $f \in C([0,T],\mathscr{T})$, $\varphi_j \in \mathscr{T}$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathscr{T})$.

Для інших просторів, зокрема для просторів $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$, $q \in \mathbb{R}$, існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, оскільки модулі виразів $\cos(k\lambda_j T)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, які входять знаменниками у вирази (13) і (14) і є відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості чисел $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Означення 2. Розв'язком задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$ називатимемо функцію $u(t,x)$ з цього простору, яка задовольняє такі умови:

$$\left\| L[u]-f; C([0,T],H_{q-2n}(\Omega^1)) \right\| = 0,$$

$$\left\| U_r[u]-\varphi_r; H_q(\Omega^1) \right\| = 0, \qquad r \in \{1,\ldots,2n\}.$$

Лема 1. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *оцінки*

$$\left|\cos(\lambda_j kT)\right| \ge 2|k|^{-\alpha_1}, \qquad \alpha_1 > 1, \qquad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{15}$$

виконуються для всіх (*крім скінченної кількості*) *значень* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи елементарну нерівність

$$\sin x \ge 2x/\pi, \qquad x \in [0,\pi/2], \tag{16}$$

отримуємо

$$\begin{aligned}\left|\cos(\lambda_j kT)\right| &= \left|\sin(\lambda_j kT - \pi/2)\right| = \left|\sin\left|\lambda_j kT - \pi/2 - m(k)\pi\right|\right| \ge \\ &\ge \frac{2}{\pi}\left|\lambda_j kT - \pi/2 - m(k)\pi\right| = \\ &= 2|k|\left|\lambda_j T/\pi - (2m(k)+1)/(2k)\right|, \qquad j \in \{1,\ldots,n\},\end{aligned} \tag{17}$$

де $m(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $\left|\lambda_j kT - \pi/2 - m(k)\pi\right| \le \pi/2$.

На підставі нерівності (17) і теореми 32 з [15, с. 87] отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, справджуються оцінки $\left|\cos(\lambda_j kT)\right| \ge 2|k|^{-(\gamma-1)}$, $\gamma > 2$, для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Лему доведено. ♦

Теорема 3. *Якщо* $f \in C([0,T],H_{q+2+\varepsilon}(\Omega^1))$, $\varphi_s \in H_{q+2n+1+\varepsilon}(\Omega^1)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q+2n+\varepsilon}(\Omega^1)$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, $\varepsilon > 0$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_s(x)$, $s \in \{1,\ldots,2n\}$.

Д о в е д е н н я. На підставі формул (11)–(14), леми 1 та означення норми у просторі $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$, $q \in \mathbb{R}$, отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, справджується оцінка

$$\left\| u; C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^1)) \right\| =$$

$$= \sum_{r=0}^{2n} \max_{0\le t\le T} \sqrt{2\pi \sum_{|k|>0} (1+k^2)^q \left| v_k^{(r)}(t) + \frac{d^r}{dt^r} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right|^2} \le$$

$$\le \sqrt{4\pi} \sum_{r=0}^{2n} \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^q \max_{0\le t\le T} \left| v_k^{(r)}(t) \right|^2} +$$

$$+ \sqrt{4\pi} \sum_{r=0}^{2n} \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^q \max_{0\le t\le T} \left| \frac{d^r}{dt^r} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right|^2} \le$$

$$\le c_2 \sqrt{4\pi} \sum_{r=0}^{2n} \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^q \sum_{j=1}^{n} \left(|\varphi_{jk}| |k|^{r+\alpha_1} + |\varphi_{n+j,k}| |k|^{r+\alpha_1-1} \right)^2} +$$

$$+ c_3 \sqrt{4\pi} \sum_{r=0}^{2n} \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^q |k|^{r-2n+1+\alpha_1}\, \overline{f}_k^2} \le$$

$$\le \sqrt{4\pi}\,(2n+1) \left(c_2 \sqrt{2} \left[\sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^{2n+\alpha_1+q} \left(\sum_{s=1}^{n} |\varphi_{sk}| \right)^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^{2n-1+\alpha_1+q} \left(\sum_{s=n+1}^{2n} |\varphi_{sk}| \right)^2} \right] +$$

$$\left. + c_3 \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^{1+\alpha_1+q}\, \overline{f}_k^2} \right) \le$$

$$\le c_4 \left(\sqrt{\sum_{s=1}^{n} 2\pi \sum_{|k|\ge 0} |\varphi_{sk}|^2 (1+k^2)^{2n+\alpha_1+q}} + \right.$$

$$+ \sqrt{\sum_{s=n+1}^{2n} 2\pi \sum_{|k|\ge 0} |\varphi_{sk}|^2 (1+k^2)^{2n-1+\alpha_1+q}} +$$

$$\left. + \left\| f; C([0,T], H_{1+\alpha_1+q}(\Omega^1)) \right\| \right) \le$$

$$\le c_4 \left(\sum_{s=1}^{n} \left\| \varphi_s; H_{\alpha_1+q+2n}(\Omega^1) \right\| + \sum_{s=n+1}^{2n} \left\| \varphi_s; H_{\alpha_1+q+2n-1}(\Omega^1) \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| f; C([0,T], H_{1+\alpha_1+q}(\Omega^1)) \right\| \right), \tag{18}$$

де $\overline{f}_k = \max_{t\in[0,T]} |f_k(t)|$, $k \in \mathbb{Z}$, $c_2 = c_2(n, T, a_0, \ldots, a_n)$, $c_3 = c_3(n, T, a_0, \ldots, a_n)$, $c_4 = (2n+1)\sqrt{2} \max\{c_2 \sqrt{2n}, c_3\}$.

З нерівності (18) випливає доведення теореми. ♦

2.2. Розв'язність у класі майже періодичних функцій. Розглянемо задачу (1), (2) в області Q. Дослідимо питання її однозначної розв'язності у класі функцій, майже періодичних за змінною x, із заданим спектром

$$M = \{\mu_k \in \mathbb{R}: \mu_{-k} = -\mu_k,\ \mu_0 = 0,\ d_1 |k|^\sigma \le |\mu_k| \le d_2 |k|^\sigma,$$
$$\sigma > 0,\ d_2 \ge d_1 > 0,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Введемо такі позначення для функцій, майже періодичних за змінною x: $\mathcal{T}_M$ − простір тригонометричних поліномів $v(x)=\sum_{|k|\le N} v_k \exp(i\mu_k x)$, $N\in\mathbb{Z}_+$, $\mu_k\in M$; $\mathcal{T}'_M$ − простір антилінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{T}_M$; послідовність $g_q\in\mathcal{T}'_M$ збігається до $g\in\mathcal{T}'_M$, якщо $\langle g_q, v\rangle \underset{q\to\infty}{\to} \langle g, v\rangle$ для довільного $v\in\mathcal{T}_M$, де $\langle g, v\rangle$ позначає дію функціонала $g\in\mathcal{T}'_M$ на елемент $v\in\mathcal{T}_M$; простір $\mathcal{T}_M$ неперервно вкладається у $\mathcal{T}'_M$ таким чином: якщо $v\in\mathcal{T}_M$, то елемент $g_v\in\mathcal{T}'_M$, який відповідає елементу v, визначається як $\langle g_v, z\rangle = \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h v(x)\overline{z(x)}\,dx$ для довільного $z\in\mathcal{T}_M$; для довільної функції $g\in\mathcal{T}'_M$ нерівність $\langle g, \exp(i\mu_k x)\rangle\ne 0$ справджується не більше ніж для зліченної кількості значень $\mu_k\in M$; ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\exp(i\mu_k x)$, де $g_k=\langle g,\exp(i\mu_k x)\rangle$, називається рядом Фур'є функції $g\in\mathcal{T}'_M$; $C^p([0,T],\mathcal{T}'_M)$ − простір функцій $v(t,x)=\sum_{|k|\ge 0} v_k(t)\exp(i\mu_k x)$, $\mu_k\in M$, $v_k(t)\in C^p([0,T])$, таких, що $\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\in\mathcal{T}'_M$, $j\in\{0,1,\dots,p\}$, при кожному фіксованому $t\in[0,T]$; $H_q^M(\mathbb{R})$, $q\in\mathbb{R}$, − простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_M$ за нормою $\|v; H_q^M(\mathbb{R})\| := \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+\mu_k^2)^q |v_k|^2}$; $C^p([0,T],H_q^M(\mathbb{R}))$, $q\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{Z}_+$, − простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ функції $\frac{\partial^r v(t,x)}{\partial t^r}$, $r\in\{0,1,\dots,p\}$, належать простору $H_q^M(\mathbb{R})$ і є неперервними за t у нормі $H_q^M(\mathbb{R})$, $\|v; C^p([0,T],H_q^M(\mathbb{R})\| := \sum_{r=0}^{p}\max_{0\le t\le T}\left\|\frac{\partial^r v}{\partial t^r}; H_q^M(\mathbb{R})\right\|$.

Нехай

$$\varphi_j(x)\in\mathcal{T}'_M, \qquad f(t,x)\in C([0,T],\mathcal{T}'_M),$$

$$f(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(t)\exp(i\mu_k x),$$

$$\varphi_j(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_{jk}\exp(i\mu_k x), \qquad j\in\{1,\dots,2n\}, \tag{19}$$

де

$$f_k(t)=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h f(t,x)\exp(-i\mu_k x)\,dx,$$

$$\varphi_{jk}=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h \varphi_j(x)\exp(-i\mu_k x)\,dx, \qquad j\in\{1,\dots,2n\}.$$

Означення розв'язків задачі (1), (2) з просторів $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ і $C^{2n}([0,T],H_q^M(\mathbb{R}))$ є аналогічними відповідно до означень 1 та 2.

Майже періодичний за x зі спектром M розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)\exp(i\mu_k x). \tag{20}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, у (20) є розв'язком крайової задачі з умовами (7) для рівняння

$$\sum_{s=0}^{n}a_s(i\mu_k)^{2s}\frac{\partial^{2(n-s)}u_k(t)}{\partial t^{2(n-s)}}=f_k(t). \tag{21}$$

Характеристичний визначник задачі (21), (7) для кожного $\mu_k\in M\setminus\{0\}$ обчислюється за формулою

$$\Delta(\mu_k,T)=(-2)^n\prod_{1\le s<t\le n}\mu_k^4(\lambda_s^2-\lambda_t^2)^2\prod_{j=1}^{n}((i\mu_k\lambda_j)\cos(\mu_k\lambda_j T)), \tag{22}$$

а $\Delta(0,T)$ визначається формулою (9).

Задача (21), (7) для кожного $\mu_k\in M$ не може мати двох різних розв'язків тоді й лише тоді, коли $\Delta(\mu_k,T)\ne 0$. На підставі (9) і (22) отримуємо таке твердження.

Теорема 4. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall\mu_k\in M\setminus\{0\},\ \forall m\in\mathbb{Z})\quad \frac{\lambda_j T}{\pi}\ne\frac{2m+1}{2\mu_k},\qquad j\in\{1,\dots,n\}. \tag{23}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 1. ♦

Надалі будемо вважати, що справджується умова (23). Тоді розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ зображується формулою

$$u(t,x)=\sum_{|k|\ge 0}\left(v_k(t)+\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right)\exp(i\mu_k,x),$$

у якій $v_0(t)$ і $G_0(t,\tau)$ визначаються формулами (12), а

$$v_k(t)=\sum_{q,j=1}^{n}S_{n-j}^{(q)}\frac{\varphi_{jk}\lambda_q\mu_k\cos(\lambda_q\mu_k(T-t))+\varphi_{n+j,k}\sin(\lambda_q\mu_k t)}{2(-1)^{n+j}\lambda_q\mu_k^{2n-1}\cos(\mu_k\lambda_j T)\prod\limits_{s=1,s\ne q}^{n}(\lambda_s^2-\lambda_q^2)},\ \ k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

$$\begin{aligned}G_k(t,\tau)={}&\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4}\sum_{q=1}^{n}\left(e^{i\lambda_q\mu_k(t-\tau)}+(-1)^n e^{-i\lambda_q\mu_k(t-\tau)}\right)\times\\
&\times\left(i\lambda_q\mu_k^{2n-1}\prod_{s=1,s\ne q}^{n}(\lambda_s^2-\lambda_q^2)\right)^{-1}+\\
&+\frac{1}{8}\sum_{r,q,s=1}^{n}(-1)^q iS_{n-r}^{(q)}\lambda_s^{2r-3}\mu_k^{2r-2n+1}\times\\
&\times\left(\lambda_q\prod_{\ell=1,\ell\ne q}^{n}(\lambda_\ell^2-\lambda_q^2)\prod_{h=1,h\ne s}^{n}(\lambda_h^2-\lambda_s^2)\cos(\mu_k\lambda_q T)\right)^{-1}\times\\
&\times\{\lambda_q((-1)^{n-1}e^{i\lambda_s\mu_k\tau}-e^{-i\lambda_s\mu_k\tau})(e^{i\lambda_q\mu_k(T-t)}+\\
&+(-1)^n e^{-i\lambda_q\mu_k(T-t)})+\lambda_s((-1)^n e^{i\lambda_q\mu_k t}-e^{-i\lambda_q\mu_k t})\times\\
&\times(e^{i\lambda_s\mu_k(T-\tau)}+(-1)^{n-1}e^{-i\lambda_s\mu_k(T-\tau)})\},\qquad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

Аналогічно, як у **п.** ***2.1***, доводимо наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай справджуються умови* (23). *Якщо* $f \in C([0,T],\mathscr{T}_M')$ $(C([0,T],\mathscr{T}_M))$, $\varphi_j \in \mathscr{T}_M'$ $(\mathscr{T}_M)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathscr{T}_M')$ $(C^{2n}([0,T],\mathscr{T}_M))$.

Лема 2. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $\lambda_j T/\pi$, $j \in \in \{1,\ldots,n\}$, *оцінки* $|\cos(\lambda_j\mu_k T)| \ge c_5 |k|^{-\alpha_2}$, *де* $\alpha_2 > 1$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *виконуються для всіх* (*крім скінченної кількості*) *значень* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи елементарну нерівність (16), отримуємо

$$|\cos(\lambda_j\mu_k T)| = |\sin(\lambda_j\mu_k T + \pi/2)| = |\sin|\lambda_j\mu_k T + \pi/2 - m_j(k)\pi|| \ge$$

$$\ge \frac{2}{\pi}|\lambda_j\mu_k T + \pi/2 - m_j(k)\pi| =$$

$$= \frac{2}{\pi}|k|^\sigma T\lambda_j \left|\frac{\mu_k + \pi/(2T\lambda_j)}{|k|^\sigma} - \frac{m_j(k)\pi/(\lambda_j T)}{|k|^\sigma}\right|, \qquad (24)$$

$j \in \{1,\ldots,n\}$, а $m_j(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $|\lambda_j\mu_k T + \pi/2 - m_j(k)\pi| \le \pi/2$.

Із асимптотики спектра M, оцінок (24), леми 2 з [11, с. 19] і неперервності функції $y(T) = 1/T$ при $T > 0$ випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, нерівності

$$|\cos(\lambda_j\mu_k T)| \ge \frac{c_5}{|k|^{1+\varepsilon}}, \qquad c_5 = \frac{2\lambda_j T}{\pi}, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

справджуються для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Лему доведено. ♦

Теорема 6. *Якщо* $f \in C([0,T],H^M_{q+1+(1+\varepsilon)/\sigma}(\mathbb{R}))$, $\varphi_s \in H^M_{q+2n+(1+\varepsilon)/\sigma}(\mathbb{R})$, $\varphi_{n+s} \in H^M_{q+2n-1+(1+\varepsilon)/\sigma}(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H^M_q(\mathbb{R}))$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_s(x)$, $s \in \{1,\ldots,2n\}$.

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 3. ♦

Результати **п. 2** можна поширити на випадок, коли рівняння (1) є нестрого гіперболічним за Петровським, тобто, коли додатні корені $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ $(q < n)$ рівняння (3) мають, відповідно, кратності $m_1,\ldots,m_q$, $m_1 + \ldots + m_q = n$. Тоді характеристичний визначник $\Delta_1(k,T)$, $k \in \mathbb{Z}$, задачі (6), (7) для кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ обчислюється за формулою

$$\Delta_1(k,T) = \prod_{1\le s<t\le q} (k^2(\lambda_s^2 - \lambda_t^2))^{2m_s m_t} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{q}\left(2^{m_j}(ik\lambda_j)^{m_j^2}(\cos(k\lambda_j T))^{m_j}\prod_{s=1}^{m_j} 2^{2s-2}(s-1)!^2\right),$$

а для $k = 0$ визначається формулою (9).

3. Рівняння з молодшими членами. Наявність у рівнянні молодших членів може покращити природу задачі з умовами (2). Покажемо це на прикладі рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\lambda_j\frac{\partial}{\partial x}+b_j\right)^2\right]u(t,x)=f(t,x),\qquad (t,x)\in D\,, \tag{25}$$

де $b_j\in\mathbb{R}$, $\lambda_j>0$, $\lambda_j\neq\lambda_\ell$, $j\neq\ell$, $j,\ell\in\{1,\ldots,n\}$, а функції $f(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, визначаються формулами (4).

Означення розв'язків задачі (25), (2) з просторів $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ та $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$ аналогічні до означень розв'язків задачі (1), (2) з цих просторів.

Розв'язок задачі (25), (2) з простору $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ шукаємо у вигляді ряду (5), де кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, є розв'язком крайової задачі з умовами (7) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(b_j+ik\lambda_j)^2\right]u_k(t)=f_k(t)\,. \tag{26}$$

Розв'язавши для кожного $k\in\mathbb{Z}$ задачу (26), (7), для розв'язку задачі (25), (2) з простору $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ отримуємо таку формулу:

$$\begin{aligned}u(t,x)=v_0(t)+\int_0^T G_0(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau+\sum_{|k|>0}\Bigg(\sum_{q,j=1}^{n}(-1)^{n+j}S^{(q)}_{n-j}\times\\ \times\left(\varphi_{jk}\gamma_q(e^{\gamma_q(T-t)}+e^{-\gamma_q(T-t)})+\varphi_{n+j,k}(e^{\gamma_q t}-e^{-\gamma_q t})\right)\times\\ \times\left(\gamma_q(e^{\gamma_q T}+e^{-\gamma_q T})\prod_{s=1,s\neq q}^{n}(\gamma_q^2-\gamma_s^2)^{-1}\right)+\\ +\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\Bigg)\exp(ik,x)\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Тут $v_0(t)$ і $G_0(t,\tau)$ визначаються формулами (12), а

$$\begin{aligned}G_k(t,\tau)=\frac{\mathrm{sgn}\,(t-\tau)}{4}\sum_{q=1}^{n}(e^{\gamma_q(t-\tau)}+(-1)^n e^{-\gamma_q(t-\tau)})\left(\gamma_q\prod_{s=1,s\neq q}^{n}(\gamma_q^2-\gamma_s^2)\right)^{-1}+\\ +\frac{1}{4}\sum_{s,r,q=1}^{n}(-1)^{r+q}S^{(q)}_{n-r}\gamma_s^{2r-3}\Bigg(\gamma_q\prod_{\ell=1,\ell\neq q}^{n}(\gamma_q^2-\gamma_\ell^2)\times\\ \times\prod_{h=1,h\neq s}^{n}(\gamma_s^2-\gamma_h^2)(e^{\gamma_q T}+e^{-\gamma_q T})\Bigg)^{-1}\times\\ \times\left(\gamma_q((-1)^{n-1}e^{\gamma_s\tau}-e^{-\gamma_s\tau})(e^{\gamma_q(T-t)}+(-1)^n e^{-\gamma_q(T-t)})+\right.\\ \left.+\gamma_s((-1)^n e^{\gamma_q t}-e^{-\gamma_q t})(e^{\gamma_s(T-\tau)}+(-1)^{n-1}e^{-\gamma_s(T-\tau)})\right),\\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\end{aligned} \tag{28}$$

$\gamma_j:=\gamma_j(k)=b_j+ik\lambda_j$, $j\in\{1,\ldots,n\}$; $S^{(q)}_\ell$, $\ell\in\{1,\ldots,n-1\}$, − сума всіх можливих добутків елементів $\gamma_1^2,\ldots,\ \gamma_{q-1}^2,\gamma_{q+1}^2,\ldots,\gamma_n^2$, узятих по ℓ штук у кожному добутку; $S^{(q)}_0\equiv 1$.

Теорема 7. *Для єдиності розв'язку задачі* (25), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}) \quad (b_j + ik\lambda_j)T \neq i\pi(m + 1/2), \quad j \in \{1,\dots,n\}.$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 1. ♦

Наслідок 4. *Якщо у рівнянні* (25) *всі числа* b_j, $j \in \{1,\dots,n\}$, *відмінні від нуля, то для довільних* T, λ_j, $j \in \{1,\dots,n\}$, *задача* (25), (2) *не може мати двох різних розв'язків з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$. *Якщо ж* $b_j = 0$, $j \in \{j_1,\dots,j_r\} \subset \{1,\dots,n\}$, *то для єдиності розв'язку задачі* (25), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}) \quad \frac{\lambda_j T}{\pi} \neq \frac{2m+1}{2k}, \qquad j \in \{j_1,\dots,j_r\}. \tag{29}$$

Теорема 8. *Нехай у рівнянні* (25) *всі числа* b_j, $j \in \{1,\dots,n\}$, *відмінні від нуля. Якщо* $f \in C([0,T],\mathcal{T}')$ $(C([0,T],\mathcal{T}))$, $\varphi_s \in \mathcal{T}'$ $(\mathcal{T})$, $s \in \{1,\dots,2n\}$, *то для довільних* T, λ_j, $j \in \{1,\dots,n\}$, *існує єдиний розв'язок задачі* (25), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ $(C^{2n}([0,T],\mathcal{T}))$.

Якщо $f \in C([0,T],H_{1+q}(\Omega^1))$, $\varphi_s \in H_{2n+q}(\Omega^1)$, $\varphi_{n+s} \in H_{2n-1+q}(\Omega^1)$, $s \in \{1,\dots,n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (25), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_s(x)$, $s \in \{1,\dots,2n\}$.

Теорема 9. *Нехай у рівнянні* (25) $b_j = 0$, $j \in \{j_1,\dots,j_r\} \subset \{1,\dots,n\}$, *і виконуються умови* (29). *Якщо функції* $f \in C([0,T],\mathcal{T}')$ $(C([0,T],\mathcal{T}))$, $\varphi_s \in \mathcal{T}'$ $(\mathcal{T})$, $s \in \{1,\dots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (25), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ $(C^{2n}([0,T],\mathcal{T}))$.

Якщо $f \in C([0,T],H_{2+q+\varepsilon}(\Omega^1))$, $\varphi_s \in H_{2n+1+q+\varepsilon}(\Omega^1)$, $\varphi_{n+s} \in H_{2n+q+\varepsilon}(\Omega^1)$, $s \in \{1,\dots,n\}$, $\varepsilon > 0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $\lambda_j T/\pi$, $j \in \{j_1,\dots,j_r\}$, *існує єдиний розв'язок задачі* (25), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_s(x)$, $s \in \{1,\dots,2n\}$.

Д о в е д е н н я теорем 8 і 9 є подібними до доведень теорем 2 і 3. ♦

Подібно досліджуємо задачу (25), (2) в області Q, коли її розв'язок шукаємо у класі функцій, майже періодичних за змінною x, зі спектром M, а вихідні дані $f(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, задано формулами (19). При цьому розв'язок задачі (25), (2) з простору $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ зображується формулами (27), (28), у яких $\gamma_j := \gamma_j(\mu_k) = b_j + i\mu_k\lambda_j$, $j \in \{1,\dots,n\}$.

Теорема 10. *Для єдиності розв'язку задачі* (25), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall \mu_k \in M \setminus \{0\}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}) \quad (b_j + i\mu_k\lambda_j)T \neq i\pi(m + 1/2), \quad j \in \{1,\dots,n\}.$$

Теореми існування розв'язку задачі (25), (2) у просторах $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ та $C^{2n}([0,T],H_q^M(\mathbb{R}))$ формулюються аналогічно до теорем 8 і 9.

Результати роботи можна поширити на гіперболічні рівняння з багатьма просторовими координатами, а також на безтипні рівняння.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект № 54.1/027).

1. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Задача з умовами типу умов Діріхле для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь // Вісн. Прикарпат. ун-ту. Математика. Фізика. Хімія. – 1999. – Вип. 1. – С. 22–32.
2. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат. сб. – 1969. – **79**, № 2(6). – С. 293–304.
3. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // Докл. АН СССР. – 1968. – **183**, № 5. – С. 995–998.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
5. *Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г.* Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912–921.
   Те саме: *Mitropol'skii Yu. A., Khoma-Mohyl's'ka S. H.* Conditions for the existence of solutions of a periodic boundary-value problem for an inhomogeneous linear hyperbolic equation of the second order. I // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, No. 7. – P. 1077–1088.
6. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
7. *Павленко В. Н., Петраш Т. А.* Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 2. – С. 199–204.
8. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. *Пташник Б. И., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. –1986. – **22**, № 4. – С. 669–678.
10. *Пташник Б. Й.* Періодична крайова задача для гіперболічного оператора, що розпадається на лінійні множники першого порядку // Доп. АН УРСР. Сер А. – 1973. – № 11. – С. 985–989.
11. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кмiть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
12. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле–Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 7–14.
13. *Рудаков И. А.* Нетривиальные периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 10. – С. 1392–1399.
    Те саме: *Rudakov I. A.* A nontrivial periodic solution of the nonlinear wave equation with homogeneous boundary conditions // Differ. Equat. – 2005. – **41**, No. 10. – P. 1467–1475.
14. *Рудаков И. А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 2. – С. 46–55.
    Те саме: *Rudakov I. A.* Periodic solutions of a nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions // Russian Math. – 2007. – **51**, No. 2. – P. 44–52.
15. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – Москва: Наука, 1978. – 112 с.
16. *Gentile G., Mastropietro V., Procesi M.* Periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions // Commun. Math. Phys. – 2005. – **256**, No. 2. – P. 437–490.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ – НЕЙМАНА В ПОЛОСЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Исследованы условия однозначной разрешимости в полосе задачи с условиями Дирихле – Неймана по временной переменной и условиями периодичности или почти периодичности по пространственной координате для линейных гиперболических уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами. Решения рассмотренных задач построены в виде рядов по системам ортогональных функций. Для оценок снизу малых знаменателей, возникающих при построении решений задач, использован метрический подход.

THE DIRICHLET – NEUMANN PROBLEM IN A STRIP FOR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

We investigate the conditions for the unique solvability in a strip of the problem with Dirichlet – Neumann conditions with respect to time variable and the conditions of periodicity or almost periodicity with respect to spatial coordinate for linear hyperbolic equations of higher order with constant coefficients. The solutions of the considered problems in the form of series according to the system of orthogonal functions are constructed. For estimations from below of small denominators that appeared during construction of solution of the problem the metric approach is used.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
09.09.13