УДК 539.3

А. И. Александров

МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

Предложен метод приближенного решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух линейно-упругих тел с учетом трения Кулона при неизвестной площадке контакта и наличии частичного проскальзывания и сцепления на этой площадке. Метод основан на сведении решаемой задачи к системе трех нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестной вектор-функции контактных напряжений. Он заключается в регуляризации этой системы уравнений, дискретизации регуляризированной системы и построении итерационного процесса для решения дискретного аналога регуляризированной системы.

Введение. В настоящее время для решения контактных задач о взаимодействии упругих тел с учетом кулонова трения используются точные и приближенные аналитические методы [11, 13, 16] а также различные численные методы, основанные на вариационной постановке задачи [9, 13, 15] и на ее сведении к различным операторным уравнениям относительно неизвестных вектор-функций контактных напряжений, возникающих на поверхности соприкасания тел [1, 4–7, 12, 14]. В отличие от аналитических методов, численные методы ориентированы на решение таких контактных задач, для которых площадка контакта а также зоны проскальзывания и сцепления заранее неизвестны и имеют достаточно сложную непрогнозируемую конфигурацию. При численной реализации вариационных методов решения таких сложных контактных задач часто возникают трудности, связанные с невыпуклостью минимизируемой функции энергии системы взаимодействующих тел и недифференцируемостью этой функции в искомой точке ее минимума. Эти трудности не позволяют применять градиентные методы и методы выпуклого анализа для минимизации функции энергии, вследствие чего численные процедуры отыскания точек минимума таких функций являются громоздкими в программной реализации и иногда не дают возможности получить решение контактной задачи с достаточной точностью. Однако отмеченные трудности не возникают при реализации методов [1, 4–7, 12], основанных на использовании нелинейных операторных уравнений для моделирования контактного взаимодействия тел. Использование таких уравнений позволяет применять современные достижения нелинейного функционального анализа, теории неподвижных точек непрерывных отображений, теории итерационных методов решения операторных уравнений как для доказательства теорем существования решений контактных задач, так и для разработки эффективных итерационных процедур приближенного отыскания этих решений.

Нелинейные интегральные уравнения, использованные в [1, 3] для моделирования контактного взаимодействия упругих тел, позволяют (в отличие от других аналогичных уравнений [4–7, 12]) учитывать наличие частичного проскальзывания и сцепления на поверхности соприкасания этих тел и могут быть основой для создания эффективного численного метода решения рассматриваемых контактных задач.

Постановка контактной задачи. Предположим, что каждое из двух линейно-упругих тел на некоторой части своей поверхности сцеплено с абсолютно твердым телом, которое будем называть жесткой опорой. Первоначально касаясь в точке, тела входят в контакт за счет того, что опора верхнего тела совершает заданное поступательное перемещение $\overline{\gamma}$ в некоторой внешней декартовой системе координат $Oxyz$, в то время как опора нижнего тела остается неподвижной (см. рис. 1). Будем полагать, что после установившегося равновесия поверхность соприкасания тел является плоской и содержится в ограниченной области Ω, принадлежащей общей для тел касательной плоскости Π, проходящей через точку их начального касания.

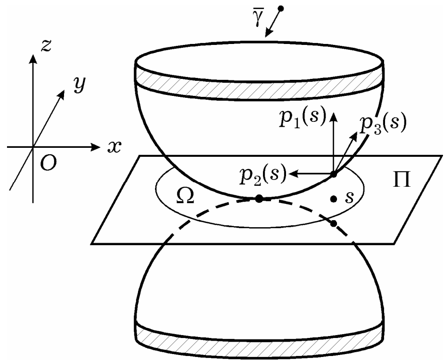

Рис. 1

Предположим, что при сжатии тел возникает трение, которое подчиняется закону, получающемуся из закона Кулона заменой в его формулировке скорости относительного проскальзывания тел на само относительное проскальзывание тел. Принятие такого закона трения заведомо вносит определенную погрешность в результат решения рассматриваемой контактной задачи, поскольку для этой задачи не выполняются условия [10], при которых такое искажение закона Кулона является оправданным (здесь погрешность понимается как отклонение от решения рассматриваемой контактной задачи, которое можно было бы получить, используя при ее постановке закон Кулона в чистом виде).

Для того чтобы сформулировать условия контактного взаимодействия тел, рассмотрим определенную на Ω вектор-функцию $p(s)=(p_1(s),p_2(s),$ $p_3(s))$, задающую распределение удельной контактной нагрузки, передаваемой от нижнего тела к верхнему через область Ω, и определенную на Ω вектор-функцию $v(s)=(v_1(s),v_2(s),v_3(s))$, задающую перемещения поверхностных точек верхнего тела относительно противолежащих поверхностных точек нижнего тела (здесь и ниже номера 1, 2 и 3 соответствуют направлениям осей z, x и y). При помощи этих вектор-функций можно выразить условия контактирования тел соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&p_1(s)\ge 0,\qquad v_1(s)\ge 0,\qquad p_1(s)\cdot v_1(s)=0\,,\\
&\sqrt{p_2^2(s)+p_3^2(s)}\le \mu\cdot p_1(s)\,,\\
&\sqrt{v_2^2(s)+v_3^2(s)}\cdot p_2(s)+\mu\cdot p_1(s)\cdot v_2(s)=0\,,\\
&\sqrt{v_2^2(s)+v_3^2(s)}\cdot p_3(s)+\mu\cdot p_1(s)\cdot v_3(s)=0,\qquad s\in\Omega\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где положительная константа μ − коэффициент трения. Первое из этих соотношений выражает знакопостоянство контактного давления, второе означает отсутствие взаимного проникания тел и третье означает отсутствие контактного давления за пределами площадки контакта. Последние три соотношения системы (1) выражают принятый закон трения. Из них следует, что при наличии проскальзывания в точке s площадки контакта (при $\sqrt{v_2^2(s)+v_3^2(s)}\ne 0$) в этой точке s выполняется равенство $\sqrt{p_2^2(s)+p_3^2(s)}=$ $=\mu\cdot p_1(s)$ и векторы $p_{\mathrm{F}}(s)=(p_2(s),p_3(s))$, $v_{\mathrm{F}}(s)=(v_2(s),v_3(s))$ имеют противоположные направления.

Предположим, что $p(s)$ и $v(s)$ являются элементами гильбертового пространства $L_2^3(\Omega)$ [1] вектор-функций, компоненты которых принадлежат пространству $L_2(\Omega)$ [8]. Тогда, если известны линейные ограниченные операторы $A_{ij}:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$, являющиеся операторами влияния поверхностных нагрузок на поверхностные перемещения для системы взаимодействующих тел $(i,j=1,2,3)$, то связь между $p(s)$ и $v(s)$ можно выразить равенствами

$$v_i(s) = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}(p_j)_s - f_i(s) = R_i(p, f_i)_s \qquad \forall\, i = 1,2,3\,, \tag{2}$$

где вектор-функция $f(s) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s))$ есть заданный элемент пространства $L_2^3(\Omega)$, характеризующий конфигурацию взаимодействующих тел и условия их нагружения.

Подставляя выражения $v_i(s)$ из равенств (2) в систему (1), получим соотношения:

$$\begin{aligned}
&p_1(s) \ge 0, \qquad R_1(p, f_1)_s \ge 0, \qquad p_1(s)\cdot R_1(p, f_1)_s = 0\,,\\
&\sqrt{p_2^2(s) + p_3^2(s)} \le \mu \cdot p_1(s)\,,\\
&\sqrt{R_2^2(p, f_2)_s + R_3^2(p, f_3)_s}\cdot p_2(s) + \mu\cdot p_1(s)\cdot R_2(p, f_2)_s = 0\,,\\
&\sqrt{R_2^2(p, f_2)_s + R_3^2(p, f_3)_s}\cdot p_3(s) + \mu\cdot p_1(s)\cdot R_3(p, f_3)_s = 0, \qquad s \in \Omega\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, рассматриваемая контактная задача заключается в отыскании неизвестной вектор-функции $p(s) \in L_2^3(\Omega)$, которая почти всюду на Ω удовлетворяет соотношениям (3). Если такая вектор-функция $p(s)$ найдена, то с ее помощью можно вычислить силы и моменты, приложенные к жесткой опоре верхнего тела, и найти площадку контакта Ω_0, зону сцепления Ω_{C} и зону проскальзывания Ω_{Sl} из следующих очевидных соотношений:

$$\begin{aligned}
&\Omega_0 = \{s \in \Omega \mid R_1(p, f_1)_s = 0\}\,,\\
&\Omega_{\mathrm{C}} = \{s \in \Omega_0 \mid R_2^2(p, f_2)_s + R_3^2(p, f_3)_s = 0\}\,,\\
&\Omega_{\mathrm{Sl}} = \{s \in \Omega_0 \mid R_2^2(p, f_2)_s + R_3^2(p, f_3)_s > 0\}\,.
\end{aligned}$$

Операторное уравнение контактной задачи. Для неизвестной вектор-функции $p(s) \in L_2^3(\Omega)$ система соотношений (3) эквивалентна нелинейному операторному уравнению [1]

$$p = G_\mu(p - E\cdot(A(p) - f))\,, \tag{4}$$

в котором E есть произвольная положительная константа и линейный ограниченный оператор влияния $A : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ определен соотношениями:

$$\begin{aligned}
&x = (x_1, x_2, x_3),\ \ y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega)\,,\\
&y = A(x), \qquad y_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}(x_j) \qquad \forall\, i = 1,2,3\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Непрерывный нелинейный оператор $G_\mu : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ задан равенствами

$$\begin{aligned}
&x = (x_1, x_2, x_3),\ \ y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega), \qquad y = G_\mu(x)\,,\\
&y_1(s) = h(x_1(s))\,,\\
&y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu\cdot h(x_1(s)))\,,\\
&y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu\cdot h(x_1(s))), \qquad s \in \Omega\,,
\end{aligned}$$

в которых функции h и q имеют вид

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \ge 0,\\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \sqrt{x^2 + y^2} \le z,\\ x\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

В большинстве важных для практики случаев входящие в (5) линейные ограниченные операторы $A_{ij} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ допускают интегральное представление и операторное уравнение (4) представляет собой систему трех нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$.

Условие единственности решения. Пусть μ есть фиксированное положительное число. Каждая совокупность измеримых по Лебегу на Ω функций $c_1(s)$, $c_2(s)$, $c_3(s)$, $a(s)$, $b(s)$, $\varphi(s)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \le c_i(s) \le 1, \quad i = 1,2,3, \quad 0 \le \varphi(s) \le 2\pi, \quad \sqrt{a^2(s) + b^2(s)} \le \mu,$$

$$c_3(s) \cdot (a^2(s) + b^2(s)) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad s \in \Omega,$$

порождает линейный ограниченный оператор $B : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ при помощи следующих соотношений:

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega),$$

$$y = B(x), \quad y_i(s) = \sum_{j=1}^{3} b_{ij}(s) \cdot x_j(s) \quad \forall\, i = 1,2,3,$$

$$b_{11}(s) = c_1(s), \quad b_{12}(s) = b_{13}(s) = 0, \quad b_{21}(s) = c_1(s) \cdot a(s),$$

$$b_{31}(s) = c_1(s) \cdot b(s), \quad b_{22}(s) = c_2(s) \cdot \cos^2(\varphi(s)) + c_3(s) \cdot \sin^2(\varphi(s)),$$

$$b_{23}(s) = (c_2(s) - c_3(s)) \cdot \cos(\varphi(s)) \cdot \sin(\varphi(s)), \quad b_{32}(s) = b_{23}(s),$$

$$b_{33}(s) = c_2(s) \cdot \sin^2(\varphi(s)) + c_3(s) \cdot \cos^2(\varphi(s)).$$

Класс всех заданных таким образом операторов B обозначим символом $\mathcal{A}_\mu$. Этот класс построен таким образом, что для любых элементов $x, y \in L_2^3(\Omega)$ существует зависящий от них оператор $B \in \mathcal{A}_\mu$, удовлетворяющий равенству

$$G_\mu(x) - G_\mu(y) = B(x - y).$$

Такой факт позволяет получить условие единственности решения уравнения (4) при помощи числового множества $US(A)$ [2], задав его для каждого линейного ограниченного оператора $A : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ следующим соотношением:

$$US(A) = \{\mu > 0 \mid \exists E > 0 : \mathrm{Ker}(B \cdot (I - E \cdot A) - I) = \{\theta\} \ \forall\, B \in \mathcal{A}_\mu\}.$$

В этом соотношении θ есть нулевой элемент $L_2^3(\Omega)$, $I : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ есть тождественный оператор, символ $\mathrm{Ker}(D)$ обозначает ядро оператора D [8].

Если множество $US(A)$ непусто, то оно представляет собой промежуток на числовой прямой, крайней левой точкой которого является число ноль. Это множество $US(A)$ определено так, что если значение коэффициента трения μ принадлежит $US(A)$, то для любого фиксированного элемента $f \in L_2^3(\Omega)$ уравнение (4) не может иметь более одного решения в пространстве $L_2^3(\Omega)$. Последнее означает, что факт единственности решения рассматриваемой контактной задачи определяется исключительно упругими свойствами взаимодействующих тел независимо от их конфигурации и внешних условий нагружения.

Регуляризирующее уравнение. Полная непрерывность линейного оператора влияния $A : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, которая имеет место для многих контактных задач, приводит к чувствительности решения $p \in L_2^3(\Omega)$ уравнения (4) по отношению к искажению исходных данных $f \in L_2^3(\Omega)$. С целью устранения этого дефекта построим регуляризирующий аналог уравнения (4). Символ $(x, y)_k$ в дальнейшем будем использовать для обозначения скалярного произведения элементов x и y пространства $L_2^k(\Omega)$ при $k = 1,2,3$.

Для фиксированного числа $\varepsilon > 0$, фиксированного числа $\mu \in US(A)$ и фиксированной неотрицательной (почти всюду на Ω) функции $u(s) \in L_2(\Omega)$ рассмотрим операторное уравнение

$$p = G_\mu^u(p - E \cdot (\varepsilon \cdot p + A(p) - f)), \tag{6}$$

в котором $p = (p_1, p_2, p_3)$ есть неизвестный элемент, отыскиваемый в $L_2^3(\Omega)$, E есть произвольное положительное число и непрерывный нелинейный оператор $G_\mu^u : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ задан равенствами

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega), \qquad y = G_\mu^u(x),$$

$$y_1(s) = h_{u(s)}(x_1(s)),$$

$$y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu \cdot h_{u(s)}(x_1(s))),$$

$$y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu \cdot h_{u(s)}(x_1(s))), \qquad s \in \Omega,$$

в которых функция $h_{u(s)}(x_1(s))$ имеет вид

$$h_{u(s)}(x_1(s)) = \begin{cases} h(x_1(s)), & x_1(s) \le u(s), \\ u(s), & x_1(s) > u(s). \end{cases}$$

Множество решений уравнения (6) в пространстве $L_2^3(\Omega)$ так же, как и множество решений уравнения (4) в том же пространстве, не изменяется при изменении входящего в эти уравнения положительного параметра E [3]. Справедливо следующее утверждение об однозначной разрешимости уравнения (6).

Теорема 1. *Пусть* $\mu \in US(A)$ *и линейный оператор* $A : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ *является вполне непрерывным* [8]. *Тогда для любого фиксированного элемента* $f \in L_2^3(\Omega)$, *любой фиксированной неотрицательной* (*почти всюду на* Ω) *функции* $u(s) \in L_2(\Omega)$ *и любого фиксированного положительного числа* ε *уравнение* (6) *однозначно разрешимо в* $L_2^3(\Omega)$.

Доказательство. Положив в уравнении (6) $E = 1/\varepsilon$, запишем это уравнение в эквивалентной форме:

$$p = G_\mu^u\left(-\frac{1}{\varepsilon} \cdot (A(p) - f)\right). \tag{7}$$

Поскольку оператор $F_\varepsilon : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, для которого элемент $F_\varepsilon(p)$ совпадает с правой частью уравнения (7), вполне непрерывен на $L_2^3(\Omega)$ и преобразует ограниченное замкнутое выпуклое множество

$$\tilde{U} = \left\{(x_1, x_2, x_3,) \in L_2^3(\Omega) \mid 0 \le x_1(s) \le u(s), \sqrt{x_2^2(s) + x_3^2(s)} \le \mu \cdot x_1(s) \right.$$
$$\left. \text{почти всюду на } \Omega \right\}$$

пространства $L_2^3(\Omega)$ в $\tilde{U}$, то согласно теореме Шаудера [8] существует элемент $p^* \in \tilde{U}$, удовлетворяющий уравнению (7). Нетрудно убедиться в том, что p^* есть единственное на $L_2^3(\Omega)$ решение этого уравнения. Действительно, если предположить, что существует другое решение $p^{**} \in L_2^3(\Omega)$ уравнения (7), то из очевидных равенств

$$p^* = G_\mu^u(p^* - E \cdot (\varepsilon \cdot p^* + A(p^*) - f)),$$

$$p^{**} = G_\mu^u(p^{**} - E \cdot (\varepsilon \cdot p^{**} + A(p^{**}) - f)),$$

будет вытекать соотношение

$$(p^* - p^{**}) = B_E(I - E \cdot (\varepsilon \cdot I + A))(p^* - p^{**}),$$

в котором линейный ограниченный оператор $B_E : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, зависящий от E, принадлежит классу операторов $\mathscr{A}_\mu$. Поскольку при этом $p^* \neq \neq p^{**}$, то из определения множества $US(A)$ будет следовать условие $\mu \notin \notin US(\varepsilon \cdot I + A)$, которое в силу известного включения [2]

$$US(A) \subset US(\varepsilon \cdot I + A),$$

будет означать, что $\mu \notin US(A)$. Поскольку по условию доказываемой теоремы $\mu \in US(A)$, то существование двух различных решений уравнения (7) в пространстве $L_2^3(\Omega)$ невозможно. Теорема 1 доказана. ♦

Для изучения вопроса о поведении решения $p_\varepsilon \in L_2^3(\Omega)$ уравнения (6) при стремлении к нулю параметра ε примем во внимание факт эквивалентности этого уравнения системе соотношений [3]

$$\left(\varepsilon \cdot p_1 + \sum_{j=1}^{3} A_{1j}(p_j) - f_1,\, p_1\right)_1 \le \left(\varepsilon \cdot p_1 + \sum_{j=1}^{3} A_{1j}(p_j) - f_1,\, x\right)_1 \quad \forall\, x \in U,$$

$$\left(\sqrt{\sum_{k=2}^{3}\left(\varepsilon \cdot p_k + \sum_{j=1}^{3} A_{kj}(p_j) - f_k\right)^2},\, \mu \cdot p_1\right)_1 + \\ + \sum_{k=2}^{3}\left(\varepsilon \cdot p_k + \sum_{j=1}^{3} A_{kj}(p_j) - f_k, p_k\right)_1 = 0,$$

$$p = (p_1, p_2, p_3) \in \tilde{U}, \tag{8}$$

где множество $\tilde{U}$ задано выше при доказательстве теоремы 1, а множество $U = \{x(s) \in L_2(\Omega) \mid 0 \le x(s) \le u(s) \text{ почти всюду на } \Omega\}$. Отметим, что эквивалентность соотношений (6) и (8) будет сохраняться и при $\varepsilon = 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\mu \in US(A)$, *линейный оператор* $A : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ *является вполне непрерывным и для некоторого фиксированного элемента* $f = (f_1, f_2, f_3) \in L_2^3(\Omega)$ *уравнение* (4) *имеет решение* $p^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*) \in \in L_2^3(\Omega)$. *Пусть заранее известна функция* $u(s) \in L_2(\Omega)$, *для которой* $p_1^*(s) \le u(s)$ *почти всюду на* Ω. *Тогда* $p_\varepsilon \mapsto p^*$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $p_\varepsilon \in L_2^3(\Omega)$ *есть решение уравнения* (6), *полученное при данном значении* ε, *данной функции* $u(s)$ *и данном элементе* f, *а знак* «$\mapsto$» *обозначает слабую сходимость в* $L_2^3(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ есть последовательность положительных чисел, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Обозначив символом $p_n = (p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})$ элемент $L_2^3(\Omega)$, являющийся решением уравнения (6) при $\varepsilon = \varepsilon_n$, докажем, что $p_n \mapsto p^*$ при $n \to \infty$.

Предположим противное. Пусть последовательность $\{p_n\}$ не сходится слабо к элементу p^*. Тогда для некоторого $y \in L_2^3(\Omega)$, некоторого числа $\delta > 0$ и некоторой подпоследовательности $\{p_{n_k}\}$ будет выполнено соотношение

$$\left|(y, p^*)_3 - (y, p_{n_k})_3\right| \geq \delta \qquad \forall\, n_k. \tag{9}$$

Извлечем из последовательности $\{p_{n_k}\}$ элементов слабо компактного множества $\tilde{U}$ подпоследовательность $\{p_{n_{k_j}}\}$, которая слабо сходится к некоторому элементу $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) \in \tilde{U}$. Так как каждый элемент $p_{n_{k_j}}$ удовлетворяет соотношениям (8) при $\varepsilon = \varepsilon_{n_{k_j}}$, то, осуществив в этих соотношениях, записанных для элемента $p_{n_{k_j}}$, предельный переход при $n_{k_j} \to \infty$, увидим, что элемент $\tilde{p}$ удовлетворяет этим же соотношениям (8) при $\varepsilon = 0$. Следовательно, элемент $\tilde{p}$ является решением операторного уравнения

$$p = G_\mu^u(p - E \cdot (A(p) - f)), \tag{10}$$

в котором $p \in L_2^3(\Omega)$ есть неизвестный элемент. Из условий доказываемой теоремы следует, что элемент p^* (так же, как и $\tilde{p}$) является решением уравнения (10). Используя формулу конечных приращений для нелинейного оператора $G_\mu^u : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, аналогичную той, которая была использована в работе [2] для оператора $G_\mu : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, можно убедиться в том, что условие $\mu \in US(A)$ гарантирует единственность решения уравнения (10) в пространстве $L_2^3(\Omega)$. Таким образом, элементы p^* и $\tilde{p}$ совпадают и последовательность $\{p_{n_{k_j}}\}$ слабо сходится к элементу p^*. Последнее означает, что $\lim\limits_{n_{k_j} \to \infty} (y, p_{n_{k_j}})_3 = (y, p^*)_3$ и неравенство

$$\left|(y, p^*)_3 - (y, p_{n_{k_j}})_3\right| < \delta$$

будет выполнено при некотором достаточно большом значении индекса n_{k_j}. Так как это неравенство противоречит условию (9), то полученное противоречие означает, что доказываемое утверждение верно.

Теорема 2 доказана. ♦

Если теперь для получения решения уравнения (6) при любом фиксированном положительном ε предложить эффективный и устойчивый численный алгоритм, то это уравнение (6) можно считать слабым регуляризирующим аналогом уравнения (4).

Дискретизация регуляризирующего уравнения. Наличие слагаемого $\varepsilon \cdot p$ в уравнении (6) позволяет построить устойчивый численный алгоритм приближенного решения этого уравнения. Такой алгоритм базируется на аппроксимационной теореме [1], в условиях которой символы $\|x\|_k$, $\|B\|_{*k}$, $(x, y)_k$ обозначают соответственно норму элемента $x \in L_2^k(\Omega)$, норму линейного ограниченного оператора $B : L_2^k(\Omega) \to L_2^k(\Omega)$ и скалярное произведение элементов $x, y \in L_2^k(\Omega)$. Приведем эту теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\mu \in US(A)$ *и линейный оператор* $A : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ *является вполне непрерывным, удовлетворяя при этом условиям самосопряженности и неотрицательности:*

$$(A(x), y)_3 = (x, A(y))_3 \qquad \forall\, x, y \in L_2^3(\Omega),$$

$$(A(x), x)_3 \geq 0 \qquad \forall\, x \in L_2^3(\Omega). \tag{11}$$

Пусть ε *есть произвольное фиксированное положительное число и последовательности* $\{A_n\}$ *линейных вполне непрерывных операторов, действующих из* $L_2^3(\Omega)$ *в* $L_2^3(\Omega)$, $\{f^{(n)}\}$ *элементов* $L_2^3(\Omega)$, *а также* $\{u_n\}$ *почти всюду на* Ω *неотрицательных функций пространства* $L_2(\Omega)$ *удовлетворяют условиям:*

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\|_{*3} = \lim_{n\to\infty} \left\|f - f^{(n)}\right\|_3 = \lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_1 = 0. \tag{12}$$

Тогда для каждого натурального n *уравнение*

$$p = G_\mu^{u_n}(p - E \cdot (\varepsilon \cdot p + A_n(p) - f^{(n)})) \tag{13}$$

имеет хотя бы одно решение $g_n = (p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}) \in L_2^3(\Omega)$ *и* $\lim_{n\to\infty} \|p_\varepsilon - g_n\|_3 = 0$, *где* p_ε *есть решение уравнения* (6) *в пространстве* $L_2^3(\Omega)$, *а* g_n *есть любое из решений уравнения* (13) *в пространстве* $L_2^3(\Omega)$, *полученное при данном натуральном значении* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в уравнении (13) значение $E = 1/\varepsilon$, запишем это уравнение в эквивалентной форме

$$p = G_\mu^{u_n}\left(-\frac{1}{\varepsilon} \cdot (A_n(p) - f^{(n)})\right). \tag{14}$$

Поскольку оператор $F_\varepsilon^n : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, для которого элемент $F_\varepsilon^n(p)$ совпадает с правой частью уравнения (14), является вполне непрерывным на $L_2^3(\Omega)$ и преобразует ограниченное замкнутое выпуклое множество $\tilde{U}_n$ вида

$$\tilde{U}_n = \{(x_1, x_2, x_3,) \in L_2^3(\Omega) \mid 0 \leq x_1(s) \leq u_n(s),\ \sqrt{x_2^2(s) + x_3^2(s)} \leq \mu \cdot x_1(s) \text{ почти всюду на } \Omega\}$$

в $\tilde{U}_n$, то согласно теореме Шаудера [8] существует элемент $g_n = (p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}) \in \tilde{U}_n$, который удовлетворяет уравнению (14) и, следовательно, уравнению (13). Таким образом, при любом натуральном n уравнение (13) разрешимо в $L_2^3(\Omega)$ и все члены последовательности $\{g_n\}$, составленной из решений уравнения (13), полученных для различных значений индекса n, содержатся в некотором ограниченном множестве пространства $L_2^3(\Omega)$.

Покажем, что из любой подпоследовательности $\{g_{n_k}\}$ последовательности $\{g_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{g_{n_{k_j}}\}$, которая сильно в $L_2^3(\Omega)$ сходится к p_ε. Это будет означать, что $\lim_{n\to\infty} \|p_\varepsilon - g_n\|_3 = 0$.

Пусть $\{g_{n_k}\}$ есть произвольно выбранная подпоследовательность последовательности $\{g_n\}$. Так как последовательность $\{g_{n_k}\}$ является ограниченной в $L_2^3(\Omega)$, то существует подпоследовательность $\{g_{n_{k_j}}\}$, слабо сходящаяся в $L_2^3(\Omega)$ к некоторому элементу $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$. Покажем, что $\{g_{n_{k_j}}\}$ сильно в $L_2^3(\Omega)$ сходится к $\tilde{p}$ и $\tilde{p} = p_\varepsilon$. Для этого вначале запишем уравнение (6) в виде системы двух уравнений

$$p_1 = GN(p_1, p_T),$$
$$p_T = GT(p_T, p_1), \qquad (15)$$

где $p_T = (p_2, p_3) \in L_2^2(\Omega)$ и отображения $GN : L_2(\Omega) \times L_2^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $GT : L_2^2(\Omega) \times L_2(\Omega) \to L_2^2(\Omega)$ заданы соотношениями

$$x_1, y_1 \in L_2(\Omega), \qquad x_T = (x_2, x_3),\ y_T = (y_2, y_3) \in L_2^2(\Omega),$$
$$y_1 = GN(x_1, x_T), \qquad y_T = GT(x_T, x_1),$$
$$y_1(s) = h_{u(s)}\left(x_1(s) - E \cdot \left(\varepsilon \cdot x_1(s) + \sum_{j=1}^{3} A_{1j}(x_j)_s - f_1(s)\right)\right),$$
$$y_2(s) = q\left(x_2(s) - E \cdot \left(\varepsilon \cdot x_2(s) + \sum_{j=1}^{3} A_{2j}(x_j)_s - f_2(s)\right),\ x_3(s) -\right.$$
$$\left. - E \cdot \left(\varepsilon \cdot x_3(s) + \sum_{j=1}^{3} A_{3j}(x_j)_s - f_3(s)\right),\ \mu \cdot h_{u(s)}(x_1(s))\right),$$
$$y_3(s) = q\left(x_3(s) - E \cdot \left(\varepsilon \cdot x_3(s) + \sum_{j=1}^{3} A_{3j}(x_j)_s - f_3(s)\right),\ x_2(s) -\right.$$
$$\left. - E \cdot \left(\varepsilon \cdot x_2(s) + \sum_{j=1}^{3} A_{2j}(x_j)_s - f_2(s)\right),\ \mu \cdot h_{u(s)}(x_1(s))\right),\ s \in \Omega.$$

Используя условия (11), выберем входящее в уравнения (15) число E так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|I_1 - E \cdot (\varepsilon \cdot I_1 + A_{11})\|_{*1} < 1,$$
$$\left\|I_2 - E \cdot (\varepsilon \cdot I_2 + \tilde{A})\right\|_{*2} < 1,$$

в которых I_1, I_2 есть тождественные операторы, действующие в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2^2(\Omega)$ соответственно, и линейный ограниченный оператор $\tilde{A} : L_2^2(\Omega) \to L_2^2(\Omega)$ задан соотношениями:

$$x_T = (x_2, x_3),\ y_T = (y_2, y_3) \in L_2^2(\Omega),$$
$$y_T = \tilde{A}(x_T), \qquad y_i = \sum_{k=2}^{3} A_{ik}(x_k), \qquad i = 2, 3.$$

Тогда для сжимающего оператора $F_1 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, задаваемого соотношениями

$$F_1(x) = GN(x, \tilde{p}_T) \qquad \forall x \in L_2(\Omega),$$
$$\tilde{p}_T = (\tilde{p}_2, \tilde{p}_3),$$

условия (12) будут гарантировать выполнение равенства $\lim\limits_{n_{k_j} \to \infty} \left\| p_{1n_{k_j}} - F_1(p_{1n_{k_j}}) \right\|_1 = 0$. Это равенство означает, что последовательность $\{p_{1n_{k_j}}\}$ сильно в $L_2(\Omega)$ сходится к неподвижной точке $x^* \in L_2(\Omega)$ оператора F_1. Но так как $\{p_{1n_{k_j}}\}$ слабо в $L_2(\Omega)$ сходится к $\tilde{p}_1$, то $\tilde{p}_1 = x^*$,

$\lim\limits_{n_{k_j}\to\infty}\left\|p_{1n_{k_j}}-\tilde{p}_1\right\|_1=0$ и справедливо равенство $\tilde{p}_1=F_1(\tilde{p}_1)$, которое можно записать в виде:

$$\tilde{p}_1=GN(\tilde{p}_1,\tilde{p}_T). \tag{16}$$

Очевидно также, что для сжимающего оператора $F_2:L_2^2(\Omega)\to L_2^2(\Omega)$, задаваемого соотношением

$$F_2(x_T)=GT(x_T,\tilde{p}_1)\qquad \forall\, x_T=(x_2,x_3)\in L_2^2(\Omega),$$

условия (12) будут гарантировать выполнение равенства $\lim\limits_{n_{k_j}\to\infty}\left\|p_{Tn_{k_j}}-F_2(p_{Tn_{k_j}})\right\|_2=0$, в котором $p_{Tn_{k_j}}=(p_{2n_{k_j}},p_{3n_{k_j}})$. Это равенство означает, что последовательность $\{p_{Tn_{k_j}}\}$ сильно в $L_2^2(\Omega)$ сходится к неподвижной точке $x_T^*\in L_2^2(\Omega)$ оператора F_2. Но так как $\{p_{Tn_{k_j}}\}$ слабо в $L_2^2(\Omega)$ сходится к $\tilde{p}_T=(\tilde{p}_2,\tilde{p}_3)$, то $\tilde{p}_T=x_T^*$, $\lim\limits_{n_{k_j}\to\infty}\left\|p_{Tn_{k_j}}-\tilde{p}_T\right\|_2=0$ и справедливо равенство $\tilde{p}_T=F_2(\tilde{p}_T)$, которое можно записать в виде

$$\tilde{p}_T=GT(\tilde{p}_T,\tilde{p}_1). \tag{17}$$

Равенства (16) и (17) означают, что элементы $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_T$ удовлетворяют системе уравнений (15). Следовательно, элемент $\tilde{p}=(\tilde{p}_1,\tilde{p}_T)=(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2,\tilde{p}_3)\in$ $\in L_2^3(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (6). Но так как уравнение (6) при выполнении условий доказываемой теоремы имеет единственное решение в $L_2^3(\Omega)$ (см. теорему 1), то $\tilde{p}=p_\varepsilon$ и последовательность $\{g_{n_{k_j}}\}$ сильно в $L_2^3(\Omega)$ сходится к p_ε.

Теорема 3 доказана. ♦

Построим такие удовлетворяющие условиям теоремы 3 аппроксимирующие последовательности $\{A_n\}$, $\{f^{(n)}\}$ и $\{u_n\}$, для которых операторное уравнение (13) можно решить численно с любой степенью точности. Для этого зададим область Ω в виде открытого квадрата, ограниченного отрезками прямых, параллельных координатным осям некоторой декартовой системы координат, введенной на общей для взаимодействующих тел касательной плоскости. Для каждого натурального числа n разобьем Ω на n^2 непересекающихся квадратных областей $\omega_1^n,\omega_2^n,\ldots,\omega_{n^2}^n$ равной площади, ориентированных подобно квадрату Ω. Полагая, что в выражениях (5) линейные операторы $A_{ij}:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ являются вполне непрерывными и допускают интегральное представление

$$A_{ij}(x)_t=\int\limits_\Omega K_{ij}(t,s)\cdot x(s)\,ds,\qquad t\in\Omega,\qquad i,j=1,2,3,$$

зададим линейный вполне непрерывный оператор $A_n:L_2^3(\Omega)\to L_2^3(\Omega)$ в виде

$$x=(x_1,x_2,x_3),\ \ y=(y_1,y_2,y_3)\in L_2^3(\Omega),$$

$$y=A_n(x),\qquad\qquad y_i=\sum_{j=1}^{3}A_{ij}^{(n)}(x_j),\qquad i=1,2,3,$$

$$A_{ij}^{(n)}(x_j)_t=\int\limits_\Omega K_{ij}^{(n)}(t,s)x_j(s)\,ds,\quad t\in\Omega,\quad i,j=1,2,3. \tag{18}$$

В выражениях (18) функции $K_{ij}^{(n)}(t,s)$ определяются из соотношений

$$K_{ij}^{(n)}(t,s) = \frac{1}{\mathrm{mes}(\omega_\ell^n)\cdot \mathrm{mes}(\omega_k^n)} \int\limits_{\omega_\ell^n}\left(\int\limits_{\omega_k^n} K_{ij}(t,s)\,ds\right)dt\,,$$

$$t \in \omega_\ell^n, \qquad s \in \omega_k^n, \qquad k,\ell = 1,\ldots,n^2, \qquad i,j = 1,2,3\,, \qquad (19)$$

в которых символ $\mathrm{mes}(\omega_\ell^n)$ обозначает площадь квадрата ω_ℓ^n.

Элементы $f^{(n)}$ и u_n зададим в виде

$$f^{(n)} = (P_n(f_1), P_n(f_2), P_n(f_3)), \qquad u_n = P_n(u)\,,$$

где оператор $P_n : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ определяется соотношением

$$P_n(x)_t = \frac{1}{\mathrm{mes}(\omega_k^n)} \int\limits_{\omega_k^n} x(s)\,ds, \qquad t \in \omega_k^n, \qquad k = 1,\ldots,n^2.$$

Очевидно, что построенные аппроксимирующие последовательности $\{A_n\}$, $\{f^{(n)}\}$, $\{u_n\}$ заданы так, что оператор $F_n : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, определенный правой частью уравнения (13), отображает конечномерное подпространство $H_n = P_n(L_2(\Omega)) \times P_n(L_2(\Omega)) \times P_n(L_2(\Omega))$ пространства $L_2^3(\Omega)$ в H_n. Следовательно, каждое решение $g_n \in L_2^3(\Omega)$ уравнения (13), содержащееся в H_n, удовлетворяет следующей системе $3k$ скалярных уравнений с $3k$ неизвестными ($k = n^2$):

$$x_{3i-2} = h_{\sigma_i}\left(x_{3i-2} - E\cdot\left(\sum_{j=1}^{3k} a_{3i-2,j}x_j - b_{3i-2}\right)\right),$$

$$x_{3i-1} = q\left(x_{3i-1} - E\cdot\left(\sum_{j=1}^{3k} a_{3i-1,j}x_j - b_{3i-1}\right),\ x_{3i} - E\cdot\left(\sum_{j=1}^{3k} a_{3i,j}x_j - b_{3i}\right),\right.$$
$$\left.\mu\cdot h_{\sigma_i}(x_{3i-2})\right),$$

$$x_{3i} = q\left(x_{3i} - E\cdot\left(\sum_{j=1}^{3k} a_{3i,j}x_j - b_{3i}\right),\ x_{3i-1} - E\cdot\left(\sum_{j=1}^{3k} a_{3i-1,j}x_j - b_{3i-1}\right),\right.$$
$$\left.\mu\cdot h_{\sigma_i}(x_{3i-2})\right), \qquad i = 1,\ldots,k. \qquad (20)$$

Связь между неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_{3k}$ этой системы и вектор-функцией $g_n = (p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}) \in H_n$, удовлетворяющей уравнению (13), такова, что $p_{1n}(s) = x_{3i-2}$, $p_{2n}(s) = x_{3i-1}$, $p_{3n}(s) = x_{3i}$ для всех $s \in \omega_i^n$ (для всех $i = 1,\ldots,k$). Входящие в систему (20) параметры a_{ij}, b_i, σ_i определяются из очевидных соотношений, полученных с учетом (18) и (19):

$$b_{3i-\ell} = \frac{1}{\mathrm{mes}(\omega_i^n)} \int\limits_{\omega_i^n} f_{3-\ell}(s)\,ds, \qquad \sigma_i = \frac{1}{\mathrm{mes}(\omega_i^n)} \int\limits_{\omega_i^n} u(s)\,ds\,,$$

$$a_{3i-m,3j-\ell} = \frac{1}{\mathrm{mes}(\omega_i^n)} \int\limits_{\omega_i^n}\left(\int\limits_{\omega_j^n} K_{3-m,3-\ell}(t,s)\,ds\right)dt + \varepsilon\cdot\delta_{i-m,j-\ell}\,,$$

$$i,j = 1,\ldots,k, \qquad m,\ell = 0,1,2. \qquad (21)$$

В этих соотношениях $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$.

Как следует из теоремы Брауэра [8], система уравнений (20) всегда совместна. Это означает, что одно из решений уравнения (13) в пространстве $L_2^3(\Omega)$ (при использовании аппроксимирующих последовательностей $\{A_n\}$, $\{f^{(n)}\}$, $\{u_n\}$ рассмотренного типа) всегда может быть найдено из решения системы уравнений (20).

Отметим, что для случая аппроксимации взаимодействующих тел упругими полупространствами при построении аппроксимирующей последовательности $\{A_n\}$ вида (18) можно вместо формул (19) использовать более простые соотношения [1]:

$$K_{m\ell}^{(n)}(t,s) = K_{m\ell}(s_i^n, s_j^n), \qquad t \in \omega_i^n, \qquad s \in \omega_j^n, \qquad i \neq j,$$

$$K_{m\ell}^{(n)}(t,s) = \frac{1}{\operatorname{mes}(\omega_i^n)} \int\limits_{\omega_i^n} K_{m\ell}(s_i^n, s)\,ds, \qquad t,s \in \omega_i^n, \qquad i,j = 1,\ldots,k,$$

$$m,\ \ell = 1,2,3. \tag{22}$$

В соотношениях (22) точка s_i^n есть центр квадрата ω_i^n.

Таким образом, при решении задачи о контакте двух упругих полупространств в системе уравнений (20) коэффициенты a_{ij} можно вычислять без использования соотношений (21) следующим упрощенным способом:

$$a_{3i-\ell,3i-\ell} = \varepsilon + \int\limits_{\omega_i^n} K_{3-\ell,3-\ell}(s_i^n, s)\,ds \qquad \forall\, \ell = 0,1,2,$$

$$a_{3i-2,3i-1} = a_{3i-2,3i} = a_{3i-1,3i-2} = a_{3i-1,3i} = a_{3i,3i-2} = a_{3i,3i-1} = 0$$

$$\forall\, i = 1,\ldots,k,$$

$$a_{3i-m,3j-\ell} = \operatorname{mes}(\omega_j^n)\cdot K_{3-m,3-\ell}(s_i^n, s_j^n) \quad \forall\, i,\ j = 1,\ldots,k, \quad i \neq j,$$

$$m,\ell = 0,1,2.$$

Итерационный процесс для решения дискретного аналога уравнения. Приближенное решение операторного уравнения (4) сводится к решению системы скалярных уравнений (20) при достаточно малом положительном ε и достаточно большом натуральном k. Полагая в каждом i-ом уравнении этой системы значение входящей в него положительной константы E равным E_i, зададим все значения E_i следующим образом:

$$E_{3i-2} = \frac{1}{a_{3i-2,3i-2}}, \quad E_{3i-1} = \frac{1}{a_{3i-1,3i-1}}, \quad E_{3i} = \frac{1}{a_{3i,3i}} \quad \forall\, i = 1,\ldots,k.$$

Тогда в правой части каждого i-го уравнения системы (20) будет отсутствовать неизвестное x_i и для решения этой системы можно предложить итерационный процесс

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{3k}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{3k},$$

$$x_{3i-2}^{(m+1)} = h_{\sigma_i}(\gamma_i^{(m)}),$$

$$x_{3i-1}^{(m+1)} = q(\alpha_i^{(m)}, \beta_i^{(m)}, \mu\cdot h_{\sigma_i}(x_{3i-2}^{(m)})),$$

$$x_{3i}^{(m+1)} = q(\beta_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)}, \mu\cdot h_{\sigma_i}(x_{3i-2}^{(m)})), \quad i = 1,\ldots,3k, \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{23}$$

где $\mathbb{R}^{3k}$ есть $3k$-мерное евклидово пространство [8] и величины $\gamma_i^{(m)}$, $\alpha_i^{(m)}$,

$\beta_i^{(m)}$ определяются равенствами

$$\gamma_i^{(m)} = \frac{1}{a_{3i-2,3i-2}}\left(-\sum_{j=1}^{3i-3} a_{3i-2,j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i-1}^{3k} a_{3i-2,j} x_j^{(m)} + b_{3i-2} \right),$$

$$\alpha_i^{(m)} = \frac{1}{a_{3i-1,3i-1}}\left(-\sum_{j=1}^{3i-2} a_{3i-1,j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i}^{3k} a_{3i-1,j} x_j^{(m)} + b_{3i-1} \right),$$

$$\beta_i^{(m)} = \frac{1}{a_{3i,3i}}\left(-\sum_{j=1}^{3i-1} a_{3i,j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i+1}^{3k} a_{3i,j} x_j^{(m)} + b_{3i} \right). \tag{24}$$

Очевидно, что итерационный процесс (23), (24), который построен по аналогии с процессом Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений, может сходиться в пространстве $\mathbb{R}^{3k}$ лишь к такому элементу этого пространства, который является решением системы уравнений (20). Хотя обосновать сходимость этого процесса весьма сложно, но при многократном его использовании для решения различных контактных задач [1] не выявлено случаев, в которых бы не удалось получить приближенное решение с достаточной степенью точности.

В заключение отметим, что апробация предложенного метода, представленная в работе [1], свидетельствует о его корректности.

Выводы. Разработан метод приближенного решения пространственных контактных задач о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними. Применимость этого метода к решению задач указанного класса, которую можно ожидать благодаря строгому математическому обоснованию основных этапов его реализации, дают возможность пытаться использовать его в сложных случаях контакта тел, когда конфигурации площадки контакта, зоны проскальзывания, зоны сцепления заранее неизвестны и определить контактные давления невозможно независимо от определения касательных контактных напряжений.

1. *Александров А. И.* Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения пространственных контактных задач о взаимодействии упругих тел при наличии трения // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – 2010. – Вип. 5, т. 18. – С. 26–38.
2. *Александров А. И.* О единственности решения задачи контактного взаимодействия упругих тел при наличии кулонова трения // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – 2009. – Вип. 5, т. 17. – С. 3–11.
3. *Александров А. И.* Регуляризирующий алгоритм для нелинейных интегральных уравнений контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения // Вісн. Запорізьк. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2009. – 1. – С. 5–9.
4. *Александров В. М., Kalker J. J., Пожарский Д. А.* Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 51–55.
5. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, № 3. – С. 516–527.
6. *Галанов Б. А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // Прикл. математика и механика. – 1985. – **49**, № 5. – С. 827–835.
7. *Галанов Б. А.* О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 5. – С. 61–67.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1984. – 752 с.
9. *Кравчук А. С.* Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития // Прикл. математика и механика. – 2009. – **73**, № 3. – С. 492–502.

   То же: *Kravchuk A. S.* The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development // J. Appl. Math. Mech. – 2009. – **73**, No. 3. – P. 351–357.

10. *Кравчук А. С.* К постановке краевых задач теории упругости с трением на границе // Механика деформируемого твёрдого тела. – Куйбышев: Изд-во Куйбыш. ун-та, 1976. – Вып. 2. – С. 102–105.
11. *Острик В. И.* Контактное взаимодействие кругового штампа с упругим полупространством при наличии трения и сцепления // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – Вып. 2(48). – С. 22–28.
12. *Чебаков М. И.* Трехмерная контактная задача для слоя с учетом сил трения в области контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 6. – С. 59–68.
   То же: *Chebakov M. I.* 3D contact problem with friction for a layer // Mech. Solids. – 2002. – **37**, No. 6. – P. 48–56.
13. *Kalker J. J.* A survey of the mechanics of contact between solid bodies // Z. Angew. Math. Mech. – 1977. – **57**, No. 5. – P. T3–T42.
14. *Narayan Sundaram, Farris T. N.* Mechanics of advancing pin-loaded contacts with friction // J. Mech. Phys. Solids. – 2010. – **58**, No. 11. – P. 1819–1833.
15. *Reina S., Dini D., Hills D. A., Lida Y.* A quadratic programming formulation for the solution of layered elastic contact problems: Example applications and experimental validation // Eur. J. Mech. **A**-Solids. – 2011. – **30**, No. 3. – P. 236–247.
16. *Zhupanska O. I.* Axisymmetric contact with friction of a rigid sphere with an elastic half-space // Proc. R. Soc. **A**: Math., Phys., Eng. Sci. – 2009. – **465**, No. 2108. – P. 2565–2588.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ ДВОХ ПРУЖНИХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ ТЕРТЯ МІЖ НИМИ

Запропоновано метод наближеного розв'язання просторової контактної задачі про взаємодію двох лінійно-пружних тіл з урахуванням тертя Кулона при невідомій площинці контакту та наявності часткового проковзування і зчеплення на цій площинці. Метод базується на зведенні розв'язуваної задачі до системи трьох нелінійних інтегральних рівнянь відносно невідомої вектор-функції контактних напружень. Метод полягає у регуляризації цієї системи рівнянь, дискретизації регуляризованої системи та побудові ітераційного процесу для розв'язування дискретного аналога регуляризованої системи.

METHOD OF SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL CONTACT PROBLEM ON INTERACTION OF TWO ELASTIC BODIES IN THE PRESENCE OF FRICTION BETWEEN THEM

The method of approximate solution of three-dimensional contact problem on the interaction of two linearly elastic bodies, taking into account Coulomb friction, the partial slipping and coupling on the unknown contact area is offered. The method is based on reduction of the problem to a system of three non-linear integral equations in the unknown vector-function of contact stresses. This method consists in the regularization of this system of equations, discretization of the regularized system and the construction of the iteration process for solution of discrete analogue of the regularized system.

Запорож. нац. ун-т, Запорожье
Получено
18.03.13