

**КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ  
ВІНКЛЕРІВСЬКИХ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ**

*Здійснено еквівалентні варіаційні формулювання задачі про односторонній контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів у формі неквадратичної варіаційної нерівності та нелінійного варіаційного рівняння. Досліджено існування і єдиність розв'язку цих варіаційних задач. Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, що відповідає вихідній контактній задачі, запропоновано клас паралельних ітераційних методів декомпозиції області, які полягають у паралельному розв'язуванні на кожному кроці лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах, еквівалентних у слабкому розумінні задачам теорії пружності з умовами Робіна на зонах можливого контакту. Проведено числові дослідження ефективності отриманих методів з використанням скінченноелементних апроксимацій.*

**Вступ.** В інженерній практиці для покращення функціональних властивостей поверхонь деталей машин і елементів конструкцій (зміцнення, захисту, зміни коефіцієнта тертя тощо) часто застосовують тонкі покриття з інших матеріалів. Окрім цього, тонкі прошарки, наділені певними механічними властивостями, використовують для моделювання реальної мікроструктури поверхонь, клейових та адгезійних з'єднань [10, 11, 14, 15, 21, 22, 28, 37, 38, 49].

У працях [18, 29, 30] отримано умови теплового, механічного й термомеханічного контакту тіл через тонкі однорідні прошарки, які пізніше було узагальнено на випадок тонких прошарків, неоднорідних за товщиною [24, 25].

Дослідження контактних задач для пружних і в'язкопружних тіл з тонкими покриттями виконано у монографії [2]. На основі асимптотичного аналізу задачі теорії пружності для тонкого шару у цій роботі показано, що найпростішою моделлю пружного покриття є лінійна вінклерівська модель. Обґрунтовано застосовність цієї моделі до м'якого покриття, жорсткість якого співрозмірна або менша від жорсткості основного тіла. Для трансверсально-ізотропного шару асимптотичні коефіцієнти вінклерівської моделі отримано у роботі [32].

Математичні моделі та методи розв'язування контактних задач для багатошарових тонкостінних елементів конструкцій з міжфазовими прошарками, а також для тіл з тонкими пружними покриттями розвинуто в монографії [28].

Огляд подальших досліджень контактних задач для тіл з лінійно пружними і в'язкопружними покриттями наведено у роботі [19].

Асимптотичний аналіз задачі пружнопластичності для тонкого шару за моделями Генки та Прандтля – Рейса проведено у праці [49]. Одержано нелінійну вінклерівську модель у формі степеневі залежності між контактними напруженнями і стрибками переміщень через шар. Ця модель використовується для дослідження механічних з'єднань пружних тіл [39].

Для моделювання шорсткості поверхонь деталей у трибології широке застосування отримала модель нелінійного вінклерівського шару у формі степеневі залежності поперечного обтиснення від контактної тиску. Результати експериментальної перевірки цієї залежності для плоского і циліндричного контакту систематизовано в монографіях [14, 15, 21, 22, 38]. Вони підтвердили характер такої залежності та виявили вплив на неї властивостей матеріалу, методів і якості обробки поверхонь, інтенсивності та повторюваності навантаження.

Результати досліджень стосовно розв'язування контактних задач для тіл з нелінійним вінклерівським покриттям класичними методами інтегральних рівнянь підсумовано у працях [1, 2, 9–11, 26].

Числові методи розв'язування контактних задач для шорстких тіл на основі постановки у формі нелінійних граничних інтегральних рівнянь розвинуто у роботах [7, 8], де розглянуто як пружні, так і пластичні деформації мікронерівностей.

Задачі про контакт скінченних тіл за наявності покриття на основі варіаційного формулювання і методу скінченних елементів досліджувалися у працях [6, 17, 31, 33].

Низка сучасних публікацій, присвячених дослідженню задач про контакт тіл з нелінійними покриттями як з використанням класичного підходу на основі інтегральних рівнянь [3, 4, 20, 27], так і числових методів [5, 39, 43] свідчить про актуальність цієї проблеми. Зокрема, у роботах [39, 43] на основі двоїстого формулювання та алгоритму Удзави запропоновано метод декомпозиції області (МДО) для задач про ідеальний контакт двох пружних тіл, з'єднаних через нелінійний вінклерівський прошарок.

У пропонованій роботі розглянуто задачу про односторонній контакт кількох пружних тіл, які мають нелінійні поверхневі шари вінклерівського типу. Здійснено варіаційне формулювання цієї задачі у вигляді варіаційної нерівності, яка відповідає крайовій задачі з умовами у вигляді нерівностей на зонах можливого контакту. Також запропоновано еквівалентне формулювання задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння, що відповідає задачі теорії пружності з нелійними крайовими умовами на зонах можливого контакту. Сформульовано теорему про існування і єдиність розв'язку цих варіаційних задач.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, яке відповідає вихідній контактній задачі, запропоновано на континуальному рівні низку паралельних ітераційних методів декомпозиції області. На кожному кроці цих методів необхідно паралельно розв'язувати лінійні варіаційні рівняння в окремих тілах, що відповідають задачам теорії пружності з умовами Робіна на зонах можливого контакту. Ці МДО є узагальненням методів декомпозиції області, запропонованих авторами у працях [13, 16, 34–36, 40, 41, 46] для задач про контакт пружних тіл без поверхневих шарів.

За допомогою скінченноелементних апроксимацій проведено дослідження числової ефективності отриманих МДО для плоскої задачі про односторонній контакт двох пружних смуг за наявності періодичної системи виїмок і нелінійного прошарку між ними.

Огляд досліджень у галузі періодичних контактних задач теорії пружності наведено в працях [12, 44, 45].

**1. Постановка задачі.** Розглянемо задачу про односторонній контакт  $N$  пружних тіл  $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^3$  скінченних розмірів з кусково-гладкими межами  $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$  (рис. 1). Вважаємо, що поверхні можливого контакту тіл мають нелінійні вінклерівські покриття.

Позначимо  $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^N \Omega_\alpha$ .

У просторі  $\mathbb{R}^3$  введемо ортонормований базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Напружено-деформований стан у точці  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$  кожного з тіл  $\Omega_\alpha$  визначають вектор переміщень  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ , симетричні тензори деформацій  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  і напружень  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ . Ці величини задовольняють рівняння рівноваги, закон Гука та співвідношення Коші між деформаціями і переміщеннями:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (1)$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k, \ell=1}^3 C_{\alpha ijk\ell}(\mathbf{x}) \varepsilon_{\alpha k\ell}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (3)$$

де  $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$  – компоненти вектора об'ємних сил  $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ , що діють на тіло  $\Omega_\alpha$ , а  $C_{\alpha ijk\ell}(\mathbf{x})$  – симетричні пружні сталі з властивостями [42, с. 77]:

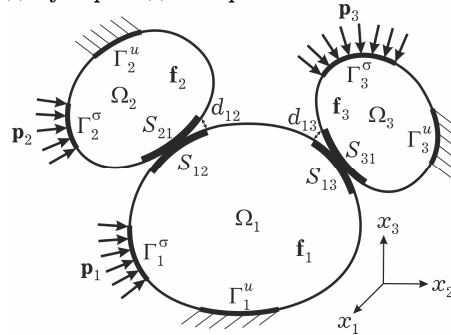


Рис. 1

$$\begin{aligned}
& (\exists b_\alpha, c_\alpha \in (0, \infty)) \quad (\forall \mathbf{x} \in \Omega_\alpha) \\
& b_\alpha \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{aij}^2 \leq \sum_{i,j,k,\ell=1}^3 C_{aijkl} \varepsilon_{aij} \varepsilon_{akl} \leq c_\alpha \sum_{k,\ell=1}^3 \varepsilon_{akl}^2. \quad (4)
\end{aligned}$$

На межі кожного з тіл  $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$  введемо локальний ортонормований базис  $\xi_\alpha, \eta_\alpha, \mathbf{n}_\alpha$ , де  $\xi_\alpha, \eta_\alpha$  – одиничні дотичні, а  $\mathbf{n}_\alpha$  – одинична зовнішня нормаль. Вектори переміщень і напружень на  $\Gamma_\alpha$  у цьому базисі запишемо так:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_\alpha &= u_{\alpha\xi} \xi_\alpha + u_{\alpha\eta} \eta_\alpha + u_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha, \\
\boldsymbol{\sigma}_\alpha &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\xi} \xi_\alpha + \sigma_{\alpha\eta} \eta_\alpha + \sigma_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha.
\end{aligned}$$

Припустимо, що поверхня  $\Gamma_\alpha$  складається з трьох частин:  $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma \cup \cup S_\alpha$ ,  $\Gamma_\alpha^u \cap \Gamma_\alpha^\sigma \cap S_\alpha = \emptyset$ ,  $\Gamma_\alpha^u \neq \emptyset$ ,  $S_\alpha \neq \emptyset$ . На частині  $\Gamma_\alpha^u$  поверхні  $\Gamma_\alpha$  задано кінематичні крайові умови (умови Діріхле), які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частині  $\Gamma_\alpha^\sigma$  – статичні крайові умови (умови Неймана):

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma, \quad (6)$$

де  $\mathbf{p}_\alpha$  – задані граничні зусилля. Поверхня  $S_\alpha$  відповідає зоні можливого одностороннього контакту тіла  $\Omega_\alpha$  з іншими тілами:  $S_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta}$ ,  $\bigcap_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta} = \emptyset$ .

Тут  $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$  – зона можливого контакту тіла  $\Omega_\alpha$  з тілом  $\Omega_\beta$ , а  $B_\alpha \subset \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $B_\alpha \neq \emptyset$  – множина індексів усіх тіл, які контактують з тілом  $\Omega_\alpha$ . Вважаємо, що поверхні  $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$  і  $S_{\beta\alpha} \subset \Gamma_\beta$  – достатньо близькі ( $S_{\alpha\beta} \approx S_{\beta\alpha}$ ), тому приймаємо, що їхні зовнішні нормалі відрізняються лише знаком:  $\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_\beta(\mathbf{x}')$ , де  $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$  – проекція точки  $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$  на поверхню  $S_{\beta\alpha}$ . Відстань по нормалі між тілами  $\Omega_\alpha$  і  $\Omega_\beta$  до деформації позначимо через

$d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \pm \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$ , де знак залежить від постановки конкретної задачі.

Поверхні можливого контакту  $S_{\alpha\beta}$  і  $S_{\beta\alpha}$  мають нелінійні покриття вінклерівського типу. Їхнє сумарне обтиснення  $w_{\alpha\beta}$  є відомою функцією нормального контактного напруження

$$w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x})) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\sigma_{\beta n}(\mathbf{x}')), \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}. \quad (7)$$

Обернену залежність запишемо так:

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = g_{\alpha\beta}(w_{\alpha\beta}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}. \quad (8)$$

Припустимо, що нелінійна функція  $g_{\alpha\beta}(z)$  є неперервною і задовольняє умови

$$g_{\alpha\beta}(0) = 0, \quad (\forall y, z \leq 0) \quad \{y < z \Rightarrow g_{\alpha\beta}(y) < g_{\alpha\beta}(z)\}, \quad (9)$$

$$(\exists \tilde{M}_{\alpha\beta} \in (0, \infty)) \quad (\forall y, z \leq 0) \quad \{|g_{\alpha\beta}(y) - g_{\alpha\beta}(z)| \leq \tilde{M}_{\alpha\beta} |y - z|\}. \quad (10)$$

На поверхнях  $S_{\alpha\beta}$  задаємо умови одностороннього контакту без тертя через нелінійний прошарок:

$$\sigma_{\alpha\xi}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\xi}(\mathbf{x}') = 0, \quad \sigma_{\alpha\eta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\eta}(\mathbf{x}') = 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = g_{\alpha\beta}(w_{\alpha\beta}(\mathbf{x})) \leq 0, \quad (12)$$

$$u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') + w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \leq d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad (13)$$

$$[u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') + w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - d_{\alpha\beta}(\mathbf{x})]\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (14)$$

де  $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$ ,  $\beta \in B_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ .

Зазначимо, що контактна задача (1)–(3), (5), (6), (11)–(14) є нелінійною, оскільки нелінійними є поверхневі шари та істинні зони контакту наперед невідомі.

**2. Варіаційні формулювання.** Здійснимо варіаційні формулювання розглянутої контактної задачі (1)–(3), (5), (6), (11)–(14) у формі нелінійної варіаційної нерівності та нелінійного варіаційного рівняння.

Для кожного з тіл  $\Omega_\alpha$  розглянемо простори Соболева  $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^3$  і введемо у них замкнуті підпростори  $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\}$  зі скалярним добутком  $(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\alpha} \left( u_{\alpha i} v_{\alpha i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j} \right) d\Omega$  і нормою  $\|\mathbf{u}\|_{V_\alpha^0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_\alpha^0}}$ .

Значення елементів просторів  $V_\alpha$  і  $V_\alpha^0$  на частинах межі області  $\Omega_\alpha$  будемо розуміти у сенсі слідів [23] і для простоти позначатимемо їх тими ж символами. Слід елемента  $\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha$  на межі  $\Gamma_\alpha^u$  належить класу  $[H^{1/2}(\Gamma_\alpha^u)]^3$ , а слід елемента  $\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0$  на межі  $\Xi_\alpha = \text{int}(\Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u)$  належить  $[H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)]^3$  [23]. Надалі будемо вважати, що  $\Gamma_\alpha^u = \bar{\Gamma}_\alpha^u$ . Тоді  $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$ ,  $\Gamma_\alpha^\sigma \subset \Xi_\alpha$ ,  $S_{\alpha\beta} \subset \Xi_\alpha \quad \forall \beta \in B_\alpha$ .

Розглянемо рефлексивний банаховий простір  $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times \dots \times V_N^0 = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N)^\top : \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0\}$ , який є прямим добутком просторів  $V_\alpha^0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ . У просторі  $V_0$  означимо скалярний добуток  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$  і норму  $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$ . Крім цього, введемо простори  $W = \prod_{\{\alpha, \beta\} \in Q} H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha) = \{\mathbf{w} = (w_{\alpha\beta})_{\{\alpha, \beta\} \in Q}^\top : w_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha), \{\alpha, \beta\} \in Q\}$  та  $U_0 = V_0 \times W = \{\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})^\top : \mathbf{u} \in V_0, \mathbf{w} \in W\}$ , де  $Q = \{\{\alpha, \beta\} : \alpha \in \{1, 2, \dots, N\}, \beta \in B_\alpha\}$  – множина всеможливих непорядкованих пар індексів тіл, що контактують між собою. Розглянемо в просторі  $U_0$  опуклу замкнуту множину кінематично допустимих переміщень:

$$K = \{\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})^\top \in U_0 : u_{\alpha n} + u_{\beta n} + w_{\alpha\beta} \leq d_{\alpha\beta} \text{ на } S_{\alpha\beta}, \{\alpha, \beta\} \in Q\},$$

де  $u_{\alpha n} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$ ,  $w_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$ ,  $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$ .

Означимо білінійну форму  $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  таку, що  $A(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  відповідає сумарній енергії пружної деформації тіл:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) : \hat{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega,$$

лінійну форму  $L(\mathbf{u})$ , що дорівнює роботі заданих зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^N \ell_\alpha(\mathbf{u}_\alpha), \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad \ell_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha dS,$$

де  $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$ ,  $\mathbf{p}_\alpha \in [H_{00}^{-1/2}(\Xi_\alpha)]^3$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ , а також неквадратичний функціонал  $H(\mathbf{w})$ , що відповідає енергії деформації поверхневих шарів [33]:

$$H(\mathbf{w}) = \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \left[ \int_0^{w_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta}(z) dz \right] dS, \quad \mathbf{w} \in W.$$

**Лема 1.** Нехай межі тіл  $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ , є кусково-гладкими,  $\Gamma_\alpha^u \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$ ,  $\mathbf{p}_\alpha \in [H_{00}^{-1/2}(\Xi_\alpha)]^3$  і виконуються умови (4). Тоді білінійна форма  $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  є симетричною, коерцитивною і неперервною, а лінійна форма  $L(\mathbf{u})$  – неперервною у  $V_0$ :

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) & \quad \{A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{v}, \mathbf{u})\}, \\ (\exists B_A \in (0, \infty)) \quad (\forall \mathbf{u} \in V_0) & \quad \{A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq B_A \|\mathbf{u}\|_{V_0}^2\}, \\ (\exists M_A \in (0, \infty)) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) & \quad \{|A(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M_A \|\mathbf{u}\|_{V_0} \|\mathbf{v}\|_{V_0}\}, \\ (\exists T_L \in (0, \infty)) \quad (\forall \mathbf{u} \in V_0) & \quad \{|L(\mathbf{u})| \leq T_L \|\mathbf{u}\|_{V_0}\}. \end{aligned}$$

Розглянемо властивості неквадратичного функціонала  $H(\mathbf{w})$ . Цей функціонал є диференційовним за Гато [33]:

$$H'(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \sum_{\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{Q}} \int_{S_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta}(w_{\alpha\beta}) z_{\alpha\beta} dS, \quad \mathbf{w}, \mathbf{z} \in W.$$

Диференціал Гато  $H'(\mathbf{w}, \mathbf{z})$  функціонала  $H(\mathbf{w})$  є лінійним за  $\mathbf{z}$ , однак нелінійним за  $\mathbf{w}$ .

Сформулюємо такі твердження (доведення яких тут не наводимо).

**Теорема 1.** Вихідна контактна задача (1)–(3), (5), (6), (11)–(14) у слабкому розумінні еквівалентна задачі мінімізації неквадратичного функціонала на опуклій замкнутій множині  $K \subsetneq U_0$ :

$$F(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + H(\mathbf{w}) \rightarrow \min_{\mathbf{U} \in K}. \quad (15)$$

**Теорема 2.** Нехай виконуються умови лемми 1,  $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$ , а функції  $g_{\alpha\beta}$ ,  $\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{Q}$ , мають такі властивості:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(0) = 0, \quad (\forall y, z) \quad \{y < z \Rightarrow g_{\alpha\beta}(y) < g_{\alpha\beta}(z)\}, \\ (\exists M_{\alpha\beta}^1 \in (0, \infty)) \quad (\forall y, z) \quad \{|g_{\alpha\beta}(y) - g_{\alpha\beta}(z)| \leq M_{\alpha\beta}^1 |y - z|\}. \end{aligned}$$

Тоді задача (15) має єдиний розв'язок і її розв'язання еквівалентне розв'язанню на множині  $K$  такої неквадратичної варіаційної нерівності:

$$F'(\mathbf{U}, \mathbf{V} - \mathbf{U}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + H'(\mathbf{w}, \mathbf{z} - \mathbf{w}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{V} \in K, \quad (16)$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}, \mathbf{z})^\top \in K, \quad \mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})^\top \in K.$$

Тепер сформулюємо альтернативну варіаційну постановку цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння.

Розглянемо в просторі  $V_0$  невід'ємний неквадратичний функціонал [33]

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{Q}} \int_{S_{\alpha\beta}} \left[ \int_0^{d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}} g_{\alpha\beta}^-(z) dz \right] dS \geq 0, \quad \mathbf{u} \in V_0,$$

де  $g_{\alpha\beta}^-(z)$  – нелінійна функція, яка визначається так:

$$g_{\alpha\beta}^-(z) = \{0, z \geq 0\} \vee \{g_{\alpha\beta}(z), z < 0\}.$$

Функціонал  $J(\mathbf{u})$  є диференційовним за Гато:

$$J'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \sum_{\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{Q}} \int_{S_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}) [v_{\alpha n} + v_{\beta n}] dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0.$$

Диференціал Гато  $J'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  лінійний за  $\mathbf{v}$  і нелінійний за  $\mathbf{u}$ . Сформулюємо таке твердження про властивості функціонала  $J'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  (доведення якого тут не наводимо).

**Лема 2.** Нехай поверхні  $S_{\alpha\beta}$ ,  $\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{Q}$ , є кусково-гладкими,  $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$  і виконуються умови (9), (10). Тоді функціонал  $J'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  має такі властивості:

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0) \quad (\exists \tilde{R} \in (0, \infty)) \quad (\forall \mathbf{v} \in V_0) \quad \{|J'(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \tilde{R} \|\mathbf{v}\|_{V_0}\}, \quad (17)$$

$$(\exists \tilde{D} \in (0, \infty)) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0) \quad \{|J'(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) - J'(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \tilde{D} \|\mathbf{v}\|_{V_0} \|\mathbf{w}\|_{V_0}\}, \quad (18)$$

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \quad \{J'(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}) - J'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0\}. \quad (19)$$

На основі цієї лєми доведено таку теорему.

**Теорема 3.** Контактна задача (1)–(3), (5), (6), (11)–(14) еквівалентна задачі (1)–(3), (5), (6) з такими нелінійними крайовими умовами на поверхнях  $S_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\xi}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\xi}(\mathbf{x}') = 0, \quad \sigma_{\alpha\eta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\eta}(\mathbf{x}') = 0, \\ \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u_{\alpha n}(\mathbf{x}) - u_{\beta n}(\mathbf{x}')), \\ \mathbf{x}' = P(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

а також еквівалентна в слабкому розумінні задачі мінімізації у просторі  $V_0$  неквадратичного функціонала

$$F_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + J(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in V_0} \quad (20)$$

з наступним знаходженням величин  $w_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$  за формулою

$$w_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}), \quad \sigma_{\alpha n} = g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}), \quad \{\alpha, \beta\} \in Q.$$

Доведення властивостей (17)–(19) дало змогу довести теорему про існування і єдиність розв'язку задачі (20) та її еквівалентність нелінійному варіаційному рівнянню.

**Теорема 4.** Нехай виконуються умови лєми 1 і лєми 2. Тоді задача (20) має єдиний розв'язок і її розв'язання еквівалентне розв'язанню у просторі  $V_0$  нелінійного за  $\mathbf{u}$  варіаційного рівняння

$$F'_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + J'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad \mathbf{u} \in V_0. \quad (21)$$

Таким чином, розв'язування вихідної контактної задачі зведено до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (21) у гільбертовому просторі.

Далі розглянемо деякі ітераційні методи для розв'язування таких варіаційних рівнянь.

**3. Нестационарний ітераційний метод для нелінійних варіаційних рівнянь.** У рефлексивному банаховому просторі  $V$  розглянемо абстрактне нелінійне варіаційне рівняння

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = Y(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \mathbf{u} \in V, \quad (22)$$

де  $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  – деякий функціонал, лінійний за  $\mathbf{v}$ , але нелінійний за  $\mathbf{u}$ , а  $Y : V \rightarrow \mathbb{R}$  – неперервна лінійна форма.

Для наближеного розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (22) застосуємо такий нестационарний ітераційний метод [34, 41]:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma^k [\Phi(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - Y(\mathbf{v})] \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

де  $G^k : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , – деякі білінійні форми, задані у просторі  $V$ ,  $\gamma^k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , – ітераційні параметри,  $\mathbf{u}^k \in V$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , –  $k$ -те наближення до точного розв'язку рівняння (22), а  $\mathbf{u}^0 \in V$  – початкове наближення. У праці [34] наведено таке твердження про збіжність цього ітераційного методу.

**Теорема 5** [34]. Нехай функціонал  $\Phi$  має такі властивості:

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{u} \in V) \quad (\exists R_\Phi \in (0, \infty)) \quad (\forall \mathbf{v} \in V) \quad \{|\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq R_\Phi \|\mathbf{v}\|_V\}, \\ (\exists D_\Phi \in (0, \infty)) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V) \quad \{|\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq D_\Phi \|\mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V\}, \\ (\exists B_\Phi \in (0, \infty)) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V) \quad \{\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq B_\Phi \|\mathbf{v}\|_V^2\}. \end{aligned}$$

Тоді існує єдиний розв'язок  $\bar{\mathbf{u}} \in V$  варіаційного рівняння (22).

Нехай, крім цього, білінійні форми  $G^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ , є симетричними, коерцитивними і неперервними:

$$\begin{aligned}
& (\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V) \quad \{G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{v}, \mathbf{u})\}, \\
& (\exists B_G^* \in (0, \infty)) \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad (\forall \mathbf{u} \in V) \quad \{G^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq B_G^* \|\mathbf{u}\|_V^2\}, \\
& (\exists M_G^* \in (0, \infty)) \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V) \quad \{|G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M_G^* \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V\},
\end{aligned}$$

та виконуються умови

$$(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0) \quad (\forall k \geq k_0) \quad (\forall \mathbf{u} \in V) \quad \{G^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq G^{k+1}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\}, \quad (24)$$

$$(\exists \varepsilon \in (0, \gamma^*), \gamma^* = B_\Phi B_G^* / D_\Phi^2) \quad (\exists k_1 \in \mathbb{N}_0) \quad (\forall k \geq k_1) \quad \{\gamma^k \in [\varepsilon, 2\gamma^* - \varepsilon]\}. \quad (25)$$

Тоді для будь-якого  $\mathbf{u}^k \in V$  задача, що розв'язується на кроці  $k \in \mathbb{N}_0$  ітераційного методу (23), має єдиний розв'язок  $\mathbf{u}^{k+1} \in V$ , а послідовність  $\{\mathbf{u}^k\}$ , отримана цим методом, збігається сильно у просторі  $V$  до точного розв'язку  $\bar{\mathbf{u}}$  задачі (22), тобто  $\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\|_V \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Д о в е д е н н я цієї теореми здійснюється подібно до доведення теореми 4 у роботі [41].

Зазначимо, що у випадку  $\gamma^k = \gamma$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , умову (25) у теоремі 5 слід замінити умовою  $\{\gamma \in (0, 2\gamma^*), \gamma^* = B_\Phi B_G^* / D_\Phi^2\}$ .

**4. Методи декомпозиції області.** Тепер застосуємо ітераційний метод, описаний вище, до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (21), яке відповідає задачі про контакт багатьох пружних тіл за наявності нелінійних прошарків. Це варіаційне рівняння можна записати у формі (22), де

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + J'(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad Y(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad V = V_0.$$

При цьому ітераційний метод (23) для розв'язування (21) набуде вигляду

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma^k [A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + J'(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})], \quad k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Однак у загальному випадку ітераційний метод (23), застосований до розв'язування варіаційного рівняння (21), не призводить до декомпозиції задачі по підобластях. Тому пропонуємо такі варіанти цього методу, які на кожному ітераційному кроці реалізують декомпозицію по підобластях, тобто розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (21) у всій області  $\Omega$  зводиться до розв'язування послідовності лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах  $\Omega_\alpha$ .

Надалі вважатимемо, що функції  $g_{\alpha\beta}(z)$  є диференційовними. Виберемо білінійні форми  $G^k$  у методі (26) таким чином [47]:

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \partial^2 F_1(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \partial^2 J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
& \partial^2 J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \\
& = \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \chi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)(u_{\alpha n} + u_{\beta n})(v_{\alpha n} + v_{\beta n}) dS, \quad (28)
\end{aligned}$$

де  $\partial^2 F_1(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  і  $\partial^2 J(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  – другі субдиференціали функціоналів  $F_1$  і  $J$  у точці  $\mathbf{u}^k \in V_0$  за напрямками  $\mathbf{u} \in V_0$  і  $\mathbf{v} \in V_0$ , а  $\chi_{\alpha\beta}^k$  – функції вигляду

$$\chi_{\alpha\beta}^k = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) = -[\text{sgn}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)]^- = \begin{cases} 0, & d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k \geq 0, \\ 1, & d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k < 0. \end{cases} \quad (29)$$

Ітераційний метод (26) з білінійними формами (27) при  $\gamma^k = 1$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , відповідає неявному напівгладкому методу Ньютонa для розв'язування варіаційного рівняння (21). Проте нестаціонарним ітераційним методом (26), (27) не отримуємо декомпозиції задачі по підобластях.

Тепер білінійні форми  $G^k$  у методі (26) виберемо так:

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (30)$$

де  $X^k : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  – такі білінійні форми [47]:

$$\begin{aligned} X^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}^k} g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) u_{\alpha n} v_{\alpha n} dS = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}^k} \Psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) u_{\alpha n} v_{\alpha n} dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0. \end{aligned} \quad (31)$$

Тут  $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$  – деякі задані підмножини зон можливого контакту  $S_{\alpha\beta}$ , а  $\Psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^k\}$  – функції, які визначають ці підмножини. Зокрема, функції  $\Psi_{\alpha\beta}^k$  можна задати у вигляді (29), тобто  $\Psi_{\alpha\beta}^k = \chi_{\alpha\beta}^k = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k)$ .

Покажемо, що внаслідок такого вибору форм  $G^k$  отримуємо декомпозицію задачі по підобластях. Перепишемо ітераційний метод (26) з білінійними формами (30) у наступному еквівалентному вигляді:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) + X^k(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - J'(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad (32)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (33)$$

Наведемо розширений запис ітераційного методу (32), (33):

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}^k} \Psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n} dS = \\ = \sum_{\alpha=1}^N \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}^k} \Psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) u_{\alpha n}^k v_{\alpha n} dS + \\ + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}^k} g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) v_{\alpha n} dS \\ \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)^\top \in V_0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots \quad (35)$$

Оскільки спільні величини для підобластей є відомими з попередньої ітерації, то варіаційне рівняння (34) розпадається на  $N$  незалежних варіаційних рівнянь у підобластях  $\Omega_\alpha$ , і метод (34), (35) еквівалентний такому ітераційному процесу [47]:

$$\begin{aligned} a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}^k} \Psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n} dS = \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \\ + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}^k} \Psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) u_{\alpha n}^k v_{\alpha n} dS + \\ + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}^k} g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) v_{\alpha n} dS, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots \quad (37)$$

На кожній ітерації  $k$  методу (36), (37) потрібно паралельно розв'язувати  $N$  незалежних лінійних варіаційних рівнянь (36) в окремих тілах  $\Omega_\alpha$ , які відповідають задачам теорії пружності з крайовими умовами Робіна (Пуанкаре) на зонах можливого контакту  $S_{\alpha\beta}$ :

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{k+1} + \phi_{\alpha\beta}^k \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} = g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) + \phi_{\alpha\beta}^k u_{\alpha n}^k, \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \quad (38)$$

де  $\phi_{\alpha\beta}^k = \Psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)$ , а  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{k+1}$  – невідомі нормальні напруження на поверхнях  $S_{\alpha\beta}$ . Тому ітераційний метод (36), (37) належить до **паралельних схем Робіна (Пуанкаре) декомпозиції області** [34, 40, 41, 46].



Вибираючи різні характеристичні функції  $\psi_{\alpha\beta}^k = \psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$ ,  $\beta \in B_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ , у білінійній формі (31), тобто різні підмножини  $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$ , отримаємо різні варіанти методу декомпозиції області (36), (37). Так, покладаючи  $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 0$ , тобто  $S_{\alpha\beta}^k = \emptyset \quad \forall \alpha, \beta, \forall k$ , отримаємо **паралельну схему Неймана**, на кожному кроці якої необхідно паралельно розв'язувати варіаційні рівняння, що відповідають задачам теорії пружності з умовами Неймана на зонах  $S_{\alpha\beta}$ . Інший граничний випадок відповідає вибору  $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$ , тобто  $S_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta, \forall k$ . Таку схему декомпозиції області назвемо **повною паралельною схемою Робіна**.

Тепер виберемо функції  $\psi_{\alpha\beta}^k$  у вигляді (29), тобто

$$\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \chi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \chi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{u}^k(\mathbf{x})) \quad \forall \alpha, \beta, \quad \forall k.$$

У результаті одержимо таку схему декомпозиції області:

$$\begin{aligned} a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \chi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n} dS = \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \\ + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \chi_{\alpha\beta}^k [g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) u_{\alpha n}^k + g_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - \\ - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)] v_{\alpha n} dS \quad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Проведені числові експерименти показали, що швидкість збіжності схеми декомпозиції області (39), (40) є вищою, ніж швидкість збіжності паралельної схеми Неймана ( $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 0$ ) і повної паралельної схеми Робіна ( $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$ ).

**5. Числові результати.** Дослідження числової ефективності запропонованих методів декомпозиції області (36), (37) здійснимо для плоскої задачі про гладкий контакт двох безмежних ізотропних смуг  $\Omega_1^*$  і  $\Omega_2^*$  однакової висоти  $h$  (рис. 2).

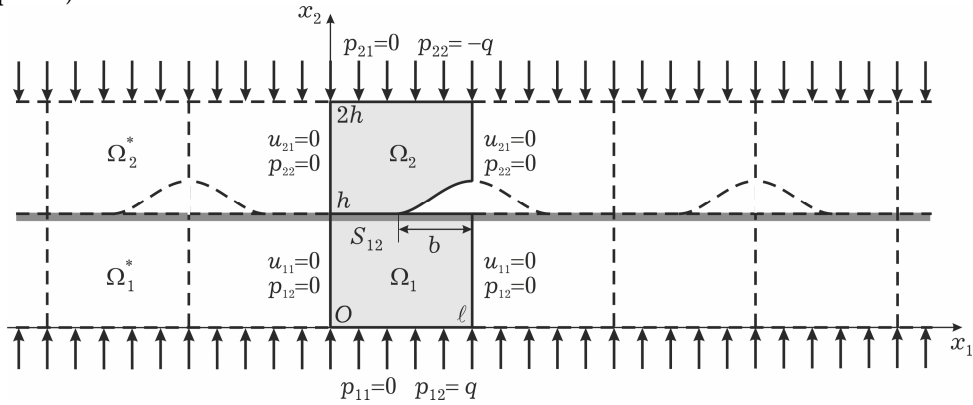


Рис. 2

Нижня грань смуги  $\Omega_2^*$  має регулярний рельєф, утворений розташованими з періодом  $2\ell$  однаковими виїмками довжини  $2b$  ( $b \leq \ell$ ), форма яких описується функцією  $r(x_1)$  ( $r(x_1 + 2i\ell) = r(x_1)$ ,  $x_1 \in [\ell - b, \ell + b]$ ,  $i = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), а верхню грань смуги  $\Omega_1^*$  покриває нелінійний вінклерівський шар. Смуги контактують під дією прикладеного до їхніх зовнішніх граней нормального стискального навантаження сталої інтенсивності  $q$ . Модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона матеріалів смуг є однаковими:  $E_1 = E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ .

Внаслідок періодичності сформульована задача еквівалентна задачі про контакт двох скінченних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  довжини  $\ell$ , які виділені на рис. 2 сірим кольором, за виконання умов симетрії на правій і лівій бічних гранях цих тіл. Зона можливого контакту тіл дорівнює  $S_{12} = \{\mathbf{x} : x_1 \in [0, \ell], x_2 = h\}$ . Відстань між тілами до деформації дорівнює  $d_{12}(\mathbf{x}) = \text{sgn}[(x_1 - \ell + b)^+]r(x_1)$ ,  $\mathbf{x} \in S_{12}$ , де  $z^+ = \max\{0, z\}$ .

Нелінійні функції  $\tilde{g}_{12}$  і  $g_{12}$ , які описують зв'язок між нормальними напруженнями і переміщеннями вінклерівського шару, вибрали у вигляді

$$\tilde{g}_{12}(\sigma_{1n}(\mathbf{x})) = B \text{sgn}(\sigma_{1n}(\mathbf{x})) |\sigma_{1n}(\mathbf{x})|^a, \quad \mathbf{x} \in S_{12},$$

$$g_{12}(w_{12}(\mathbf{x})) = B^{-1/a} \text{sgn}(w_{12}(\mathbf{x})) |w_{12}(\mathbf{x})|^{1/a}, \quad \mathbf{x} \in S_{12}.$$

Задачу розв'язували паралельним методом декомпозиції області (39), (40) за зовнішнього навантаження інтенсивності  $q = 10$  МПа для таких геометричних і фізичних параметрів тіл: товщина смуг  $h = 2$  см, модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона матеріалів смуг  $E_1 = E_2 = 2.1 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ , півдовжина виїмок  $b = 1$  см, форма виїмок  $r(x_1) = r_0[1 - (x_1 - \ell)^2/b^2]^{3/2}$ , максимальна висота виїмок  $r_0 = r(\ell) = 0.0005$  см, півперіод розташування виїмок  $\ell = 4$  см, параметри нелінійного прошарку  $B \in [10^{-6} \text{ см}/(\text{МПа})^a, 2 \cdot 10^{-4} \text{ см}/(\text{МПа})^a]$ ,  $a \in (0, 1]$ . Зазначимо, що при такому виборі параметра  $a$  нелінійний вінклерівський шар моделює мікронерівності на верхній поверхні нижнього тіла [38].

Для числового розв'язування лінійних задач теорії пружності в окремих тілах на кожній ітерації застосовано метод скінченних елементів з лінійними трикутними елементами. Для кожного тіла використовували розбиття на 8192 скінченні елементи. Початкові наближення для переміщень задавали у вигляді  $u_{\alpha n}^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-4}$  см,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\mathbf{x} \in S_{12}$ . Для зупинки ітераційного процесу застосовували критерій  $\|u_{\alpha n}^{k+1} - u_{\alpha n}^k\|_2 / \|u_{\alpha n}^{k+1}\|_2 \leq \varepsilon_u$ ,  $\alpha = 1, 2$ , де  $\|u_{\alpha n}\|_2 = \sqrt{\sum_j [u_{\alpha n}(\mathbf{x}^j)]^2}$  – дискретна норма,  $\mathbf{x}^j \in S_{12}$  – вузли скінченноелементного розбиття поверхні  $S_{12}$ , а  $\varepsilon_u > 0$  – відносна точність для переміщень. Ітераційні параметри  $\gamma^k$  у методі (39), (40) задавали однаковими на кожній ітерації:  $\gamma^k = \gamma$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Досліджено вплив вибору ітераційного параметра  $\gamma$  на швидкість збіжності схеми декомпозиції області (39), (40). На рис. 3 зображено залежність загальної кількості ітерацій  $m$  методу (39), (40) від ітераційного параметра  $\gamma$  за параметрів вінклерівського шару  $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}/(\text{МПа})^a$ ,  $a = 0.5$  і відносної точності для переміщень  $\varepsilon_u = 10^{-3}$ . Звідси бачимо, що якщо параметр  $\gamma$  вибрати з інтервалу  $[0.2, 0.8]$ , то схема декомпозиції області (39), (40) досягає зазначеної точності за  $7 \div 22$  ітерації. Найкращу швидкість збіжності одержуємо при  $\gamma = 0.6$  (7 ітерацій).

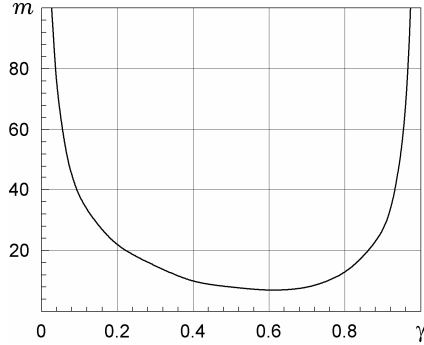


Рис. 3

Проведено дослідження впливу параметрів  $B$  та  $a$  нелінійного вінклерівського шару на числовий розв'язок. На рис. 4 зображено графіки нормального контактного напруження  $\sigma_n = \sigma_{1n} = \sigma_{2n}$ , отриманого методом декомпозиції області (39), (40) при параметрі  $a = 0.5$  за різних значень коефіцієнта  $B$ , а на

рис. 5 – графіки цього напруження при коефіцієнті  $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}/(\text{МПа})^a$  за різних значень параметра  $a$ . Криві 1–5 на рис. 4 відповідають числовим розв’язкам для  $B = 10^{-6}, 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}$  та  $2 \cdot 10^{-4} \text{ см}/(\text{МПа})^{0.5}$ , а криві 1–6 на рис. 5 – числовим розв’язкам для  $a = 0.05, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  та  $1.0$ . Штриховою кривою на рис. 4 і рис. 5 позначено аналітичний розв’язок, отриманий методом інтегральних рівнянь у роботі [48] для випадку контакту двох півпросторів, один з яких має поверхневу виїмку, за відсутності нелінійного поверхневого шару вздовж зони можливого контакту.

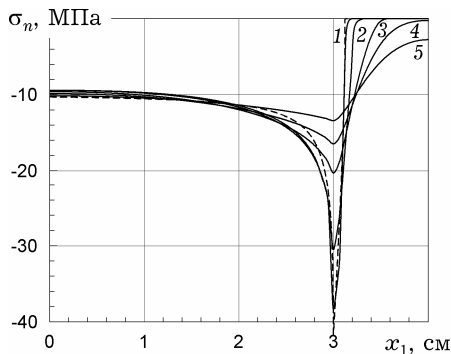


Рис. 4

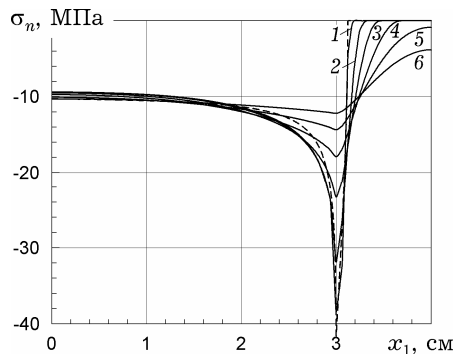


Рис. 5

Отримані результати показують, що при малих значеннях параметрів  $a$  і  $B$  вплив вінклерівського шару на контактну поведінку тіл є незначним, і числові результати є близькими до аналітичного розв’язку, отриманого за відсутності шару. Однак зростання значень цих параметрів зумовлює збільшення мінімуму нормального контактного напруження  $\sigma_n$ , зменшення довжини міжконтактного зазору і збільшення ділянки контакту тіл. При  $a = 0.5$ ,  $B = 10^{-4} \text{ см}/(\text{МПа})^{0.5}$  (крива 4 на рис. 4) і  $a = 0.8$ ,  $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}/(\text{МПа})^{0.8}$  (крива 5 на рис. 5) вплив шару настільки значний, що відбувається повне закриття зазору. Що більші значення параметрів  $B$  та  $a$ , то більш рівномірним стає розподіл нормального контактного напруження. Проте варто зазначити, що наявність поверхневого шару не впливає на місце знаходження точки мінімуму нормального контактного напруження, який завжди досягається на краях виїмки.

Вивчено вплив зміни відстані між виїмками на контактні напруження. На рис. 6 зображено графіки нормального контактного напруження  $\sigma_n$ , що отримане МДО (39), (40) для різних значень відстані між центрами виїмок  $2\ell$  і фіксованих параметрів вінклерівського шару  $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}/(\text{МПа})^a$ ,  $a = 0.5$ . Криві 1–7 на цьому рисунку відповідають числовим розв’язкам для  $\ell = 3b, 2b, 1.5b, 1.3b, 1.2b, 1.1b$  та  $b$ . Зазначимо, що крива 7 відповідає випадку, коли краї виїмок змикаються.

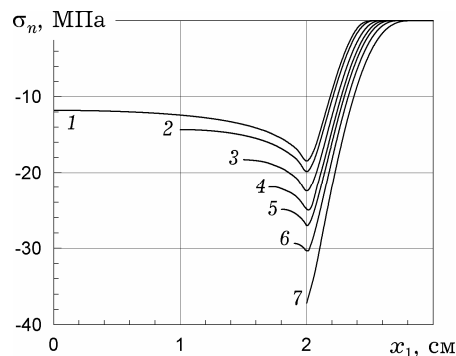


Рис. 6

На рис. 6 бачимо, що при зближенні виїмок відбувається збільшення ділянки контакту в межах виїмки, а також зменшення мінімуму нормальних контактних напружень. У випадку, коли виїмки змикаються (крива 7), довжина міжконтактного зазору та мінімум нормального контактного напруження стають найменшими.

Зауважимо, що контактні задачі для тіл з поодинокими або періодично розташованими виїмками за відсутності поверхневих шарів розв’язано у працях [12, 44, 45], використовуючи аналітичні або аналітично-числові методи.

**Висновки.** Розглянуто задачу про односторонній контакт декількох пружних тіл скінченних розмірів за наявності нелінійних поверхневих вінклерівських шарів. Здійснено варіаційні формулювання цієї задачі у формі неквадратичної варіаційної нерівності на опуклій замкнутій множині та нелінійного варіаційного рівняння у рефлексивному банаховому просторі. Сформульовано теореми про існування і єдиність розв'язку цих варіаційних задач.

Розглянуто нестационарний ітераційний метод для розв'язування абстрактних нелінійних варіаційних рівнянь. Встановлено умови його збіжності.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, яке відповідає вихідній контактній задачі, запропоновано на континуальному рівні низку паралельних ітераційних методів декомпозиції області. На кожному кроці цих методів необхідно паралельно розв'язувати лінійні варіаційні рівняння в окремих тілах, що відповідають задачам теорії пружності з умовами Робіна на зонах можливого контакту.

Числове дослідження ефективності запропонованих методів декомпозиції області проведено для плоскої задачі про односторонній контакт двох ізотропних пружних смуг з періодичною системою виїмок за наявності нелінійного поверхневого шару, використовуючи скінченноелементні апроксимації. Вивчено проблему вибору ітераційних параметрів. Проаналізовано вплив параметрів нелінійного шару та відстаней між виїмками на нормальне контактне напруження.

Робота виконана за часткової підтримки гранту 23-08-12 Національної Академії наук України.

1. Александров В. М., Кудин И. И. Асимптотический анализ плоской и осесимметричной контактных задач при учёте поверхностной структуры взаимодействующих тел // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1979. – № 1. – С. 58–70.
2. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и с прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
3. Александров В. М., Пожарский Д. А. Трёхмерные контактные задачи для упругого клина с покрытием // Прикл. математика и механика. – 2008. – 72, № 1. – С. 103–109.
4. Александров В. М., Пожарский Д. А. Трёхмерные контактные задачи при учёте трения и нелинейной шероховатости // Прикл. математика и механика. – 2004. – 68, № 3. – С. 516–527.
5. Бабин А. П., Зернин М. В. Конечноеэлементное моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики контактной псевдосреды // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2009. – № 4. – С. 84–107.
6. Блох М. В., Орбинский А. В. О модификации метода конечных элементов для решения двумерных упругих и пластических контактных задач // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 24–27.
7. Галанов Б. А. О нелинейных граничных уравнениях механики контакта упругих шероховатых тел // Прикл. математика и механика. – 1986. – 50, № 3. – С. 470–474.
8. Галанов Б. А. Пространственные контактные задачи для упругих шероховатых тел при упруго-пластических деформациях неровностей // Прикл. математика и механика. – 1984. – 48, № 6. – С. 1020–1029.
9. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
10. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. – Москва: Наука, 2001. – 478 с.
11. Горячева И. Г., Добычин И. Н. Контактные задачи в трибологии. – Москва: Машиностроение, 1988. – 256 с.
12. Горячева И. Г., Мартыняк Р. М. Периодические контактные задачи с трением и изнашиванием поверхностей // Развитие идей Л. А. Галина в механике. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаот. динамика», 2012. – С. 314–344.
13. Григоренко А. Я., Дыяк И. И., Матысяк С. И., Прокопышин И. И. Методы декомпозиции области для решения задач контакта без трения многослойных упругих тел // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 4. – С. 25–37.  
Te same: Grigorenko A. Ya., Dyayak I. I., Matysyak S. I., Prokopyshyn I. I. Domain decomposition methods applied to solve frictionless-contact problems for multilayer elastic bodies // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, No. 4. – P. 388–399.
14. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. – Москва: Наука, 1970. – 227 с.
15. Демкин Н. Б., Рыжов Э. В. Качество поверхности и контакт деталей машин. – Москва: Машиностроение, 1981. – 244 с.

16. Дьяк І. І., Прокопишин І. І. Збіжність паралельної схеми Неймана методу декомпозиції області для задач контакту без тертя декількох пружних тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 3. – С. 78–89.  
Te same: *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I. Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies* // *J. Math. Sci.* – 2010. – **171**, No. 4. – P. 516–533.
17. Зайцев В. И., Цавелин В. М. Метод решения контактных задач с учетом реальных свойств шероховатых поверхностей взаимодействующих тел // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1989. – № 1. – С. 88–94.
18. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 288 с.
19. Коваленко Е. В. Контактные задачи для тел с покрытиями // *Механика контактных взаимодействий* / Под. ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – С. 459–475.
20. Кравчук А. С. Нелокальный контакт шероховатых тел по эллиптической области // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2005. – № 3. – С. 42–52.
21. Крагельский И. В., Добычин И. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. – Москва: Машиностроение, 1977. – 526 с.
22. Левина З. М., Решетов Д. Н. Контактная жесткость машин. – Москва: Машиностроение, 1971. – 264 с.
23. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
24. Мартиняк Р. М., Швець Р. М. Математична модель механічного контакту тіл через тонкий неоднорідний прошарок // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1997. – **40**, № 2. – С. 107–109.  
Te same: *Martinyak R. M., Shvets' R. M. A mathematical model of mechanical contact of bodies across a thin inhomogeneous layer* // *J. Math. Sci.* – 1998. – **90**, No. 2. – P. 2000–2002.
25. Мартиняк Р. М., Швець Р. М. Умови теплового контакту тіл через тонкі неоднорідні за товщиною прошарки // *Доп. НАН України.* – 1996. – № 9. – С. 74–76.
26. *Механика контактных взаимодействий* / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.
27. Мхитарян С. М., Шемян А. Л., Шемян Л. А. Вдавливание круглого штампа в упругое шероховатое полупространство // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2009. – № 5. – С. 90–98.
28. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
29. Підстригач Я. С. Умови стрибка напружень і переміщень на тонкостінному пружному включенні в суцільному середовищі // *Доп. АН УРСР.* – 1982. – № 12. – С. 29–31.
30. Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл // *Доп. АН УРСР.* – 1963. – № 7. – С. 872–874.
31. Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Киркач Б. Н., Матюхин Ю. И., Хавин Г. Л. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с.
32. Прокопишин І. А., Хлебников Д. Г. Асимптотический анализ решения теории упругости для трансверсально-изотропного слоя и построение уточненных теорий пластин для контактных задач // *Исследования по теории пластин и оболочек.* – Казань, 1992. – Вып. 24. – С. 108–113.
33. Прокопишин І. А., Хлебников Д. Г. Эквивалентные вариационные постановки односторонних контактных задач для упругих тел при наличии нелинейного поверхностного слоя // *Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела: Тез. докл. респ. н.-т. конф.* – Харьков, ХИСИ, 1989. – С. 83–85.
34. Прокопишин І. Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2012. – Вип. 15. – С. 75–87.
35. Прокопишин І. Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика.* – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
36. Прокопишин І. І., Дьяк І. І., Мартиняк Р. М. Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2013. – **49**, № 1. – С. 46–55.  
Te same: *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martinyak R. M. Numerical analysis of the problems of contact of three elastic bodies by the domain decomposition methods* // *Mater. Sci.* – 2013. – **49**, No. 1. – P. 45–58.
37. Рабинович А. Л. Введение в механику армированных полимеров. – Москва: Наука, 1979. – 482 с.
38. Рыжов Э. В., Суслов А. Г., Федоров В. П. Технологическое обеспечение эксплуатационных свойств деталей машин. – Москва: Машиностроение, 1979. – 176 с.

39. Bresch D., Koko J. An optimization-based domain decomposition method for nonlinear wall laws in coupled systems // *Math. Models Methods Appl. Sci.* – 2004. – **14**, No. 7. – P. 1085–1101.
40. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I. Domain decomposition schemes for frictionless multibody contact problems of elasticity // *Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009: Proc. ENUMATH 2009 (The 8th Eur. Conf. Numer. Math. Adv. Appl., Uppsala, July 2009)*. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – P. 297–305.
41. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // <http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf>. – 2012. – 32 p.
42. Kikuchi N., Oden J. T. Contact problem in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. – Philadelphia: SIAM, 1988. – xiii + 495 p.
43. Koko J. Convergence analysis of optimization-based domain decomposition methods for a bonded structure // *Appl. Numer. Math.* – 2008. – **58**, No. 1. – P. 69–87.
44. Malanchuk N. I., Martynyak R. M. Contact interaction of two solids with surface groove under proportional loading // *Int. J. Solids Struct.* – 2012. – **49**, No. 23–24. – P. 3422–3431.
45. Martynyak R., Chumak K. Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermo-elastic contact of solids // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2012. – **55**, No. 4. – P. 1170–1178.
46. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* – 2013. – **91**. – P. 647–654.
47. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers // *Proc. 21st Int. Conf. Domain Decompos. Meth., INRIA Rennes-Bretagne-Atlantique, June 2012*. – 8 p. – <http://arxiv.org/pdf/1211.7151.pdf>.
48. Shvets R. M., Martynyak R. M., Kryshchak A. A. Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and a rigid base with disturbed surface // *Int. J. Eng. Sci.* – 1996. – **34**, No. 2. – P. 183–200.
49. Suquet P. M. Discontinuities and plasticity // *In: Nonsmooth mechanics and applications* / Ed. by J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos. – Springer: Wien–New York, 1988. – P. 279–340. – *CISM Courses and Lectures*. – No. 302.

#### КОНТАКТ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВИНКЛЕРОВСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ

Осуществлены эквивалентные вариационные формулировки задачи об одностороннем контакте упругих тел при наличии нелинейных винклеровских поверхностных слоев в форме неквадратичного вариационного неравенства и нелинейного вариационного уравнения. Исследованы существование и единственность решения этих вариационных задач. Для нахождения решения нелинейного вариационного уравнения, соответствующего исходной контактной задаче, предложен класс параллельных итерационных методов декомпозиции области, которые заключаются в параллельном решении на каждом шаге линейных вариационных уравнений в отдельных телах, эквивалентных в слабом понимании задачам теории упругости с условиями Робина на зонах возможного контакта. Проведены численные исследования эффективности предложенных методов с использованием конечно-элементных аппроксимаций.

#### CONTACT BETWEEN ELASTIC BODIES WITH NONLINEAR WINKLER SURFACE LAYERS

We have given variational formulations of the problem of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers in the form of nonquadratic variational inequality and nonlinear variational equation. We have investigated the existence and uniqueness of a solution of these variational problems. For solving the nonlinear variational equation, which corresponds to original contact problem we have proposed a class of parallel iterative domain decomposition methods. At each iterative step of these methods we have to solve in a parallel way linear variational equations in separate bodies, which are equivalent in a weak sense to linear elasticity problems with Robin boundary conditions on possible contact zones. We have provided the numerical investigations of proposed methods using finite element approximations.

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

<sup>2</sup> Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано

07.09.12