УДК 539.3

Г. С. Кіт[1], В. А. Галазюк[2]

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТІЛА З ТОНКИМ ЖОРСТКИМ ДИСКОВИМ ТЕПЛОНЕПРОНИКНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Побудовано розв'язок задачі термопружності для тіла з тонким жорстким теплонепроникним включенням у класі функцій, що визначають напружено-деформований стан зі сталими нормальними до площини включення переміщеннями на нескінченності. Включення моделюється межовим шаром, математичним відповідником якого є пелена моментних диполів і сил, а стрибок радіальних переміщень і нормальних до площини включення напружень є його механічним проявом. Розв'язання рівнянь теплопровідності та термопружності при забезпеченні вимоги неперервної залежності розв'язків від крайових умов зведено до інтегральних рівнянь першого роду і здійснено за допомогою методу узагальнених рядів Неймана. Визначено стрибок нормальних напружень на поверхнях включення, який забезпечує ідеальний механічний контакт жорсткого включення з пружною матрицею.

Дослідженню плоских задач термопружності для тіл з жорсткими стрічковими включеннями методами теорії функцій комплексної змінної присвячена значна кількість робіт, огляд яких наведено у монографії [11].

Однак нечисленними є дослідження просторових задач термопружності для тіл з тонкими жорсткими плоскими включеннями. Задачі термопружності для тіла з включенням за відомих температурних переміщень і напружень в області його розміщення зводяться до задач пружності із відповідними умовами контактної взаємодії тонких жорстких дискових включень з пружною матрицею при силовому навантаженні [3, 9, 12, 13], які, у свою чергу, методами теорії потенціалу зводяться до розв'язання інтегральних рівнянь першого роду і їх розв'язок визначає сингулярний розподіл характеристик напружено-деформованого стану на краю включення.

Задачі термопружності для тіла з тепловидільним тонким жорстким дисковим включенням розв'язано у працях [4, 6]. У випадку теплонепроникного включення на його поверхнях виникає стрибок температури і дотичні напруження, що є наслідком неоднакового нагріву його поверхонь. При цьому за умов ідеального механічного контакту жорсткого включення з пружною матрицею на його поверхнях виникає стрибок нормальних напружень, які необхідно визначити [5].

У праці [1] запропоновано модель теплонепроникного включення як пелени розподілених у його площині теплових диполів з певною густиною і знайдено температурні переміщення і напруження, зумовлені ними.

Нижче цю модель застосовано до розв'язання задачі про взаємодію тонкого жорсткого дискового включення за умов його ідеального механічного контакту з пружною матрицею в класі функцій, що визначають нормальну складову вектора теплового потоку до площини включення і її нормальне переміщення зі сталим значенням на нескінченності.

1. Напружено-деформований стан тіла з плоскою пеленою теплових диполів. В однорідному ізотропному просторі введемо циліндричну систему координат $r = R\alpha$, $\beta, z = R\gamma$ з початком у площині $\gamma = 0$ (тут R – радіус включення). Стаціонарне температурне поле у просторі визначимо як розв'язок рівняння теплопровідності з пеленою теплових диполів:

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha T) + \partial_\gamma^2 T = \delta'(\gamma)D(\alpha,p) \equiv 2T_0\delta'(\gamma)\int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p)J_0(\eta\alpha)\,d\eta\,, \tag{1}$$

де T_0 – стала із розмірністю температури; $\delta'(\gamma)$ – похідна від дельта-функції Дірака; $H(\eta,p)$ – твірна функція з параметром $p > 0$. Розв'язок рівняння (1) подаємо інтегралом Ганкеля

$$T(\alpha,\gamma) = T_0 \operatorname{sgn}\gamma \int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\,d\eta\,. \tag{2}$$

Оскільки температурне поле (2) є осесиметричним відносно осі γ, то векторне рівняння квазістатичної термопружності [8]

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = \alpha_T(3\lambda+2\mu)\operatorname{grad}T$$

у циліндричній системі координат зводиться у компонентній формі до двох рівнянь із частинними похідними:

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = \alpha_T(3k^2-4)\partial_\alpha T\,,$$

$$k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = \alpha_T(3k^2-4)\partial_\gamma T \tag{3}$$

стосовно інваріантних величин

$$\theta(\alpha,\gamma) = \operatorname{div}\mathbf{u} = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma\,,$$

$$2\omega_\beta(\alpha,\gamma) = (\operatorname{rot}\mathbf{u})_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma\,. \tag{4}$$

Тут $k^2 = (\lambda+2\mu)/\mu = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, де λ і μ – сталі Ляме; ν – коефіцієнт Пуассона; α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення; Ru_α, Ru_γ – компоненти вектора пружного переміщення $\mathbf{u}$ в напрямку осей α і γ відповідно; ∂_α, ∂_γ – оператори диференціювання за змінними α, γ.

Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що температурне поле $T(\alpha,\gamma)$ (2) визначає такі розв'язки системи рівнянь (3):

$$\theta^T(\alpha,\gamma) = \beta_T T(\alpha,\gamma), \qquad \omega_\beta^T(\alpha,\gamma) = 0\,,$$

$$\beta_T = \alpha_T(3k^2-4) = 2\alpha_T(1+\nu)/(1-2\nu)\,. \tag{5}$$

Якщо виразами

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha P^T\,, \qquad u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = \partial_\gamma P^T\,, \tag{6}$$

ввести термопружний потенціал переміщень $P^T(\alpha,\gamma)$, то друге з рівнянь (4) виконується автоматично, а з першого одержимо рівняння

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha P^T) + \partial_\gamma^2 P^T = \beta_T T(\alpha,\gamma)$$

для визначення термопружного потенціалу переміщень. Розподіл температурного поля (2) дає можливість записати термопружний потенціал переміщень $P^T(\alpha,\gamma)$ так:

$$P^T(\alpha,\gamma) = -\frac{1}{2}\beta_T T_0 \gamma \int\limits_0^\infty H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\,d\eta + C^T\gamma\,, \tag{7}$$

де C^T – довільна стала.

За відомим термопружним потенціалом переміщень (7) і виразами (6) визначимо компоненти вектора переміщень:

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma) = \frac{1}{2}\beta_T T_0 \gamma \int\limits_0^\infty \eta H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_1(\eta\alpha)\,d\eta\,,$$

$$u_\gamma^T(\alpha,\gamma) = \frac{1}{2}\beta_T\left\{\gamma T(\alpha,\gamma) - T_0\int\limits_0^\infty H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\,d\eta\right\} + C^T\,, \tag{8}$$

зумовлені температурним полем (2).

За відомими компонентами $u_\alpha^T(\alpha,\gamma)$ і $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$ (8) та співвідношеннями Дюамеля − Неймана знайдемо усі характеристики напруженого стану у тілі, зумовлені пеленою теплових диполів у правій частині рівняння теплопровідності (1):

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -\beta_T T_0 \mu\gamma \int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta ,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\gamma) = -\beta_T \mu \left\{ 2T(\alpha,\gamma) - T_0\gamma \int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} [J_0(\eta\alpha) - J_1(\eta\alpha)\, d\eta] \right\},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\gamma) + \sigma_{\beta\beta}^T(\alpha,\gamma) + \sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\gamma) = -4\mu\beta_T T(\alpha,\gamma) ,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha,\gamma) = \mu\beta_T T_0 \int_0^\infty \eta H(\eta,p)(1-\eta|\gamma|) J_1(\eta\alpha)\, d\eta . \qquad (9)$$

Отже, пелена теплових диполів у площині $\gamma = 0$ зумовлює чистий згин площини $\gamma = 0$ за відсутності там нормальних напружень $\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha,\pm 0) = 0$. При цьому нормальні напруження $\sigma_{\alpha\alpha}^T(\alpha,\pm 0)$ і $\sigma_{\beta\beta}^T(\alpha,\pm 0)$ мають стрибок при переході площини $\gamma = 0$ уздовж нормалі, який зумовлений стрибком температури (2).

Відповідно до формул (2), (8) і (9) усі характеристики напружено-деформованого стану визначаються через твірну функцію $H(\eta,p)$, для знаходження якої слід сформулювати певну крайову задачу.

2. Температурні напруження у тілі за існування теплонепроникної дискової області в площині $\gamma = 0$. Відповідно до рівняння балансу $\operatorname{div}\mathbf{q} = 0$ теплового потоку у циліндричній системі координат:

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha q_\alpha^*) + \partial_\gamma q_\gamma^* = 0 ,$$

де $\mathbf{q}^* = R\mathbf{q}/\lambda T_0$ − безрозмірний вектор теплового потоку, його компоненти у напрямку осей α і γ є такими:

$$q_\alpha^*(\alpha,\gamma) = \operatorname{sgn}\gamma \int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_1(\eta\alpha)\, d\eta ,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha)\, d\eta + C^Q , \qquad (10)$$

причому стала C^Q визначає потік тепла вздовж нормалі γ на нескінченності.

Нехай у площині $\gamma = 0$ задано нормальну складову вектора теплового потоку із довільним розподілом $f(\alpha^2)$. Тоді за наявності у цій площині теплонепроникного включення слід сформувати там пелену диполів, які забезпечували би в області включення нульовий сумарний тепловий потік в напрямку осі γ. Тому відповідно до подання (10) маємо

$$\int_0^\infty \eta^2 H(\eta,p) J_0(\eta\alpha)\, d\eta + C^Q + f(\alpha^2) = 0, \qquad 0 \le \alpha \le 1 . \qquad (11)$$

Якщо рівність (11) продиференціювати за змінною α, то для твірної функції $H(\eta,p)$ отримаємо таке інтегральне рівняння першого роду:

$$\int_0^\infty \eta^3 H(\eta,p) J_1(\eta\alpha)\, d\eta = f'(\alpha^2), \qquad 0 \le \alpha \le 1. \tag{12}$$

Згідно з методом рядів Неймана [7] функцію $H(\eta, p)$ подамо у вигляді ряду Неймана з ваговою функцією η^{-p}:

$$\eta^3 H(\eta,p) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{J_{2n-p}(\eta)}{\eta^p} \tag{13}$$

з параметром $p > -1$.

Оскільки співвідношення (11) повинно виконуватися при всіх значеннях $0 \le \alpha \le 1$, то для сталої C^Q отримаємо вираз

$$C^Q = -f(0) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\infty \frac{J_{2n-p}(\eta)}{\eta^{p+1}} d\eta, \tag{14}$$

тобто C^Q залежить від параметра p.

Щоб визначити коефіцієнти a_n ряду (13), підставимо рівність (13) в інтегральне рівняння (12) та обчислимо інтеграл Вебера – Шафхейтліна [10]. В результаті отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+1)\alpha F(n-p+1; -n+1; 2; \alpha^2)}{2^p \Gamma(n)} = -f'(\alpha^2), \;\; 0 \le \alpha \le 1, \tag{15}$$

де $\Gamma(x)$ – ґамма-функція. Оскільки гіпергеометричні функції Ґаусса $(n+1)F(n-p+1; -n+1; 2; \alpha^2) = P_n^{(1,-p)}(1-2\alpha^2)$ є поліномами Якобі, які утворюють повну та ортогональну систему функцій на проміжку $[0,1]$, то коефіцієнти a_n ряду (15) для довільної неперервної правої частини $f'(\alpha^2)$ знаходимо за умовами ортогональності.

Згідно з поданнями (2) і (10) та відомою твірною функцією (13) визначимо характеристики температурного поля і теплових потоків:

$$T(\alpha,\gamma) = T_0 \operatorname{sgn}\gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\alpha) J_{2n-p}(\eta)}{\eta^{p+2}} e^{-\eta|\gamma|} d\eta,$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\gamma) = \operatorname{sgn}\gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\infty \frac{J_1(\eta\alpha) J_{2n-p}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|} d\eta,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\alpha) J_{2n-p}(\eta)}{\eta^{p+1}} e^{-\eta|\gamma|} d\eta + C^Q. \tag{16}$$

Інтеграли у виразах (16) можуть бути знайдені числовими методами, проте у площині $\gamma = 0$ вони стають розривними інтегралами Вебера – Шафхейтліна і обчислюються точно. Тому матимемо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$T(\alpha,\pm 0) = \pm T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p-0.5) F(n-p-0.5; -n-0.5; 1; \alpha^2)}{2^{p+2}\Gamma(n+1.5)},$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = \pm \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+0.5)\alpha F(n-p+0.5; -n+0.5; 2; \alpha^2)}{2^{p+1}\Gamma(n+0.5)},$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p) F(n-p; -n; 1; \alpha^2)}{2^{p+1}\Gamma(n+1)} + C^Q, \tag{17}$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$

$$T(\alpha, \pm 0) =$$

$$= \pm T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p-0.5) F(n-p-0.5;\; n-p-0.5;\; 2n-p+1;\; \alpha^{-2})}{2^{p+2} \Gamma(2n-p+1) \Gamma(-n+p+1.5) \alpha^{2n-2p-1}},$$

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) =$$

$$= \pm \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p+0.5) F(n-p+0.5;\; n-p-0.5;\; 2n-p+1;\; \alpha^{-2})}{2^{p+1} \Gamma(2n-p+1) \Gamma(-n+p+1.5) \alpha^{2n-2p}},$$

$$q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p) F(n-p;\; n-p;\; 2n-p+1;\; \alpha^{-2})}{2^{p+1} \Gamma(2n-p+1) \Gamma(-n+p+1) \alpha^{2n-2p}} + C^Q. \qquad (18)$$

Відповідно до фізики явища характеристики (17) і (18) температурного поля повинні бути неперервними на краю включення $\alpha = 1$ і обмеженими на нескінченності. Тому будемо вимагати виконання таких умов:

$$\lim_{\alpha \to 1-0} q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha \to 1+0} q_\alpha^*(\alpha, \pm 0), \qquad \lim_{\alpha \to \infty} q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = C^Q, \qquad (19)$$

які будуть здійснюватися за обмеження

$$-1 < p < 0 \qquad (20)$$

на параметр p.

Тепер за відомою функцією $H(\eta, p)$ (13) і формулами (8) та (9) можна обчислити усі характеристики напружено-деформованого стану, які зумовлені температурним полем (16). Зокрема, в області $0 \le \alpha \le 1$ площини $\gamma = 0$:

$$u_\alpha^T(\alpha, \pm 0) = 0,$$

$$u_\gamma^T(\alpha, \pm 0) = C^T - \frac{1}{2} \beta_T T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p-1) F(n-p-1;\; -n-1;\; 1;\; \alpha^2)}{2^{p+3} \Gamma(n+2)},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha, \pm 0) = 0,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha, \pm 0) = \mu \beta_T T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p) \alpha F(n-p;\; -n;\; 2;\; \alpha^2)}{2^{p+2} \Gamma(n+1)} \qquad (21)$$

і відповідно в області $1 \le \alpha < \infty$:

$$u_\alpha^T(\alpha, \pm 0) = 0,$$

$$u_\gamma^T(\alpha, \pm 0) = C^T - \frac{1}{2} \beta_T T_0 \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p-1) F(n-p-1;\; n-p-1;\; 2n-p+1;\; \alpha^{-2})}{2^{p+3} \Gamma(2n-p+1) \Gamma(-n+p+2) \alpha^{2n-2p-2}},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha, \pm 0) = 0,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^T(\alpha, \pm 0) = \mu \beta_T T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p) F(n-p;\; n-p-1;\; 2n-p+1;\; \alpha^{-2})}{2^{p+2} \Gamma(2n-p+1) \Gamma(-n+p+2) \alpha^{2n-2p-1}}. \qquad (22)$$

Використавши умову $c - a - b > 0$ аналітичності для гіпергеометричної функції Ґаусса $F(a;\, b;\, c;\, x^2)$ у точці $x = 1$, можемо переконатися, що при виконанні обмеження (20) характеристики (21) і (22) є неперервними на лінії $\alpha = 1$ і згасають на нескінченності.

Сталу C^T визначимо з умови $u_\gamma^T(0,\pm 0) = 0$:

$$C^T = \frac{1}{2}\beta_T T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-p-1)}{2^{p+3}\Gamma(n+2)}.$$

Температурне поле $T(\alpha,\gamma)$, яке реалізує цей напружено-деформований стан, пов'язане із законом розподілу пелени теплових диполів у правій частині рівняння теплопровідності (1) рівністю

$$D(\alpha,p) = 2\left|T(\alpha,\pm 0)\right|. \tag{23}$$

При застосуванні до розв'язання вихідної задачі методу потенціалу подвійного шару [5], математичним аналогом якого є пелена диполів, припускається його існування тільки в області включення, що згідно з рівністю (23) постулює рівність $T(\alpha,\pm 0) = 0$ в області $1 \le \alpha < \infty$. Цей випадок одержимо з наведених вище результатів, коли параметр $p = -1.5$, тобто порушується нерівність (20). При цьому значенні параметра p за формулами (17) і (18) отримаємо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$T(\alpha,\pm 0) = \pm T_0 \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)F(-n;\, n+1.5;\, 1;\, \alpha^2)}{\Gamma(n+1.5)},$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = \pm\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+2)\alpha F(-n;\, n+1.5;\, 2;\, \alpha^2)}{\Gamma(n+0.5)\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = C^Q + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1.5)F(n+1.5;\, -n;\, 1;\, \alpha^2)}{\Gamma(n+1)} = -f(\alpha^2), \tag{24}$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$

$$T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = 0,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = C^Q +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1.5)F(n+1;\, n+1;\, 2n+2.5;\, \alpha^{-2})}{\Gamma(2n+2.5)\Gamma(-n-0.5)\alpha^{2n+2}}. \tag{25}$$

Аналіз виразів (24) і (25) свідчить про те, що теплові потоки $q_\alpha^*(\alpha,\pm 0)$ і $q_\gamma^*(\alpha,\pm 0)$ є розривними на краю включення $\alpha = 1$ і мають класичну кореневу особливість, що порушує фізичні умови (19). При цьому характеристики (21) і (22) напружено-деформованого стану залишаються на лінії $\alpha = 1$ неперервними. Зазначимо, що умова $T(\alpha,\pm 0) = 0$ в області $1 \le \alpha < \infty$ виконується також при значенні $p = -0.5$. У цьому випадку в області $0 \le \alpha \le 1$

$$T(\alpha,\pm 0) = \pm T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n)F(n;\, -n-0.5;\, 1;\, \alpha^2)}{2\sqrt{2}\,\Gamma(n+1.5)} =$$

$$= \pm T_0 \frac{(1-\alpha^2)^{3/2}}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n)F(-n+1;\, n+1.5;\, 1;\, \alpha^2)}{\Gamma(n+1.5)} \tag{26}$$

і при тих самих коефіцієнтах a_n має інший розподіл, ніж у виразі (24). При цьому усі характеристики температурного поля є неперервними на лінії $\alpha = 1$, оскільки нерівність (20) не порушується, а температура $T(\alpha,\pm 0)$ відповідно до подання (26) є неперервно диференційовною.

Таким чином, за довільно заданого теплового потоку $q_\gamma^*(\alpha,\pm 0)$ в області включення $0 \le \alpha \le 1$ і при $T(\alpha,\pm 0)=0$ в області $1 \le \alpha < \infty$ існує при $p = -1.5$ класичний розривний розподіл теплових потоків на лінії $\alpha = 1$ і неперервний при $p = -0.5$. У кожному з цих випадків параметр p визначає свій розподіл температури $T(\alpha,\pm 0)$ в області $0 \le \alpha \le 1$ і може слугувати теплофізичною характеристикою теплового шару, який створений тепловими диполями.

3. Напружено-деформований стан у тілі з жорстким дисковим теплонепроникним включенням. Якщо теплонепроникне включення є жорстким, то за умов ідеального механічного контакту зумовлені температурним полем нормальні і радіальні переміщення в області контакту $0 \le \alpha \le 1$ повинні бути нульовими. Оскільки переміщення визначаються співвідношеннями (21), то слід знайти силове довантаження, яке робить сумарні переміщення нульовими. Для цього розглянемо рівняння рівноваги (3) з пеленою об'ємних диполів і сил:

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = -\delta'(\gamma)X_\alpha(\alpha,q),$$

$$k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = -\delta(\gamma)X_\gamma(\alpha,q), \tag{27}$$

де густини розподілу диполів $X_\alpha(\alpha,q)$ і сил $X_\gamma(\alpha,q)$ задані у площині $\gamma = 0$ за законом:

$$X_\alpha(\alpha,q) = 2\int_0^\infty [(k^2+1)A(\xi,q) - \xi B(\xi,q)]J_1(\xi\alpha)\,d\xi, \tag{28}$$

$$X_\gamma(\alpha,q) = 2\int_0^\infty [(k^2-1)A(\xi,q) + \xi B(\xi,q)]\xi J_0(\xi\alpha)\,d\xi \tag{29}$$

з твірними функціями $A(\xi,q)$ і $B(\xi,q)$, що залежать від параметра q.

Фундаментальний розв'язок системи рівнянь (27) з правою частиною (28) і (29) побудовано у праці [2], де з'ясовано, що існування диполів (28) у площині $\gamma=0$ зумовлює існування стрибка радіальних переміщень $u_\alpha^F(\alpha,\pm 0)$ при переході цієї площини вздовж нормалі до неї. Такий стрибок відсутній, коли твірні функції $A(\xi,q)$ і $B(\xi,q)$ пов'язані співвідношенням $(k^2+1)A(\xi,q) = \xi B(\xi,q)$. Тоді об'ємний диполь $X_\alpha(\alpha,q)=0$, а сила

$$X_\gamma(\alpha,q) = \frac{4k^2}{k^2+1}\int_0^\infty \xi^2 B(\xi,q) J_0(\xi\alpha)\,d\xi, \tag{30}$$

де $k^2/(k^2+1) = 2(1-\nu)/(3-4\nu)$, реалізує у тілі такий напружено-деформований стан:

$$\theta^F(\alpha,\gamma) = -\frac{2}{k^2+1}\operatorname{sgn}\gamma\int_0^\infty \xi^2 B(\xi,q)e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)\,d\xi,$$

$$\omega_\beta^F(\alpha,\gamma) = \frac{k^2}{k^2+1}\int_0^\infty \xi^2 B(\xi,q)e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi, \tag{31}$$

$$u_\alpha^F(\alpha,\gamma) = \frac{k^2-1}{k^2+1}\gamma\int_0^\infty \xi^2 B(\xi,q)e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi,$$

$$u_\gamma^F(\alpha,\gamma) = C^F + \int_0^\infty \xi B(\xi,q) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi +$$

$$+ \frac{k^2-1}{k^2+1}|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 B(\xi,q) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi ; \qquad (32)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha,\gamma) = -\frac{2\mu}{k^2+1} \left\{ \operatorname{sgn}\gamma \int_0^\infty \xi^2 B(\xi,q) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^3 B(\xi,q) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi \right\},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^F(\alpha,\gamma) = -\frac{2\mu}{k^2+1} \left\{ \int_0^\infty \xi^2 B(\xi,q) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + (k^2-1)|\gamma| \int_0^\infty \xi^3 B(\xi,q) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi \right\} \qquad (33)$$

зі стрибком об'ємної деформації $\theta^F(\alpha,\pm 0)$ і нормального напруження $\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha,\pm 0)$. Зазначимо, що за подань (33) і (30) існує зв'язок між об'ємною силою $X_\gamma(\alpha,q)$ і нормальним напруженням $\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha,\pm 0)$:

$$X_\gamma(\alpha,q) = 2\mu^{-1} \left| \sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha,\pm 0) \right|. \qquad (34)$$

Стала C^F у рівності (32) визначає переміщення точок тіла у напрямку осі γ на нескінченності.

Для знаходження твірної функції $B(\xi,q)$ сформулюємо умови ідеального механічного контакту між матрицею і включенням в області $0 \le \alpha \le 1$:

$$u_\alpha^\Sigma(\alpha,\pm 0) \equiv u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) + u_\alpha^F(\alpha,\pm 0) = 0\,, \qquad (35)$$

$$u_\gamma^\Sigma(\alpha,\pm 0) \equiv u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) + u_\gamma^F(\alpha,\pm 0) = 0\,. \qquad (36)$$

Оскільки на підставі виразів (21) і (32) $u_\alpha^T(\alpha,\pm 0) = 0$ і $u_\gamma^F(\alpha,\pm 0) = 0$, то умова (35) виконується при довільній функції $B(\xi,q)$, а умова (36) буде виконуватися, якщо

$$\int_0^\infty \xi B(\xi,q) J_0(\xi\alpha)\, d\xi + C^F = -u_\gamma^T(\alpha,\pm 0), \qquad 0 \le \alpha \le 1\,, \qquad (37)$$

де $u_\gamma^T(\alpha,\pm 0)$ задано співвідношенням (21).

Продиференціювавши інтегральне рівняння (37) за змінною α, отримуємо, що функція $B(\xi,q)$ є розв'язком інтегрального рівняння першого роду

$$\int_0^\infty \xi^2 B(\xi,q) J_1(\xi\alpha)\, d\xi = \frac{d}{d\alpha}[u_\gamma^T(\alpha,\pm 0)], \qquad 0 \le \alpha \le 1\,, \qquad (38)$$

а сталу C^F визначаємо з рівняння (37) при $u_\gamma^T(0,\pm 0) = 0$:

$$C^F = -\int_0^\infty \xi B(\xi,q)\, d\xi. \qquad (39)$$

Розв’язок інтегрального рівняння (38) подамо рядом Неймана

$$\xi^2 B(\xi,q) = \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{J_{2n-q}(\xi)}{\xi^q} \tag{40}$$

з параметром q. Підставивши ряд (40) в інтегральне рівняння (38) та обчисливши розривний інтеграл Вебера – Шафхейтліна, отримаємо ряд

$$\sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+1)\alpha F(n-q+1;\,-n+1;\,2;\,\alpha^2)}{2^q \Gamma(n)} = \frac{d}{d\alpha}[u_\gamma^T(\alpha,\pm 0)]\,,$$

$$0 \le \alpha \le 1\,, \tag{41}$$

у якому гіпергеометрична функція Ґаусса $F(n-q+1;-n+1;2;\,\alpha^2)$ є поліномом степеня $(-n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Тому відповідно до апроксимаційної теореми Вейєрштрасса існує єдиний набір коефіцієнтів b_n, що забезпечує виконання рівності (41) при довільній неперервній на проміжку $[0,1]$ правій частині. Зазначимо, що коефіцієнти b_n ряду (40) залежать від параметрів p і q.

За відомими коефіцієнтами b_n і рівністю (30) визначимо силу $X_\gamma(\alpha,q)$, яка забезпечує виконання умов (36) ідеального механічного контакту. При цьому отримаємо в області $0 \le \alpha \le 1$

$$X_\gamma(\alpha,q) = \frac{4k^2}{k^2+1} \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+0.5) F(n-q+0.5;\,-n+0.5;\,1;\,\alpha^2)}{2^q \Gamma(n+0.5)}\,, \tag{42}$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$

$$X_\gamma(\alpha,q) = \frac{4k^2}{k^2+1} \times$$

$$\times \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+0.5) F(n-q+0.5;\,n-q+0.5;\,2n-q+1;\,\alpha^{-2})}{2^q \Gamma(2n-q+1)\Gamma(-n+q+0.5)\alpha^{2n-2q+1}}\,. \tag{43}$$

Функція $X_\gamma(\alpha,q)$ повинна бути неперервною на лінії $\alpha = 1$ і загасати на нескінченності.

Тепер за формулами (31)–(33) і за відомою твірною функцією $B(\xi,q)$ (40) визначимо характеристики напружено-деформованого стану, зумовлені силою (30). При цьому в області $0 \le \alpha \le 1$ площини $\gamma = 0$ одержимо, що

$$\theta^F(\alpha,\pm 0) = \mp \frac{2}{k^2+1} \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+0.5) F(n-q+0.5;\,-n+0.5;\,1;\,\alpha^2)}{2^q \Gamma(n+0.5)}\,,$$

$$\omega_\beta^F(\alpha,\pm 0) = \frac{k^2}{k^2+1} \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+1)\alpha F(n-q+1;\,-n+1;\,2;\,\alpha^2)}{2^q \Gamma(n)}\,,$$

$$u_\alpha^F(\alpha,\pm 0) = 0\,,$$

$$u_\gamma^F(\alpha,\pm 0) = \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q)}{2^{q+1}\Gamma(n+1)} [F(n-q;\,-n;\,1;\,\alpha^2) - 1]\,,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha,\pm 0) = \mp \frac{2\mu k^2}{k^2+1} \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+0.5) F(n-q+0.5;\,-n+0.5;\,1;\,\alpha^2)}{2^q \Gamma(n+0.5)}\,,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^F(\alpha,\pm 0) = -2\mu k^{-2} \omega_\beta^F(\alpha,\pm 0)\,, \tag{44}$$

і відповідно в області $1 \le \alpha < \infty$

$$\theta^F(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{2}{k^2+1} \times$$

$$\times \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+0.5)F(n-q+0.5; n-q+0.5; 2n-q+1; \alpha^{-2})}{2^q \Gamma(2n-q+1)\Gamma(-n+q+0.5)\alpha^{2n-2q+1}},$$

$$\omega_\beta^F(\alpha, \pm 0) = \frac{k^2}{k^2+1} \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+1)F(n-q+1;\ n-q;\ 2n-q+1;\ \alpha^{-2})}{2^q \Gamma(2n-q+1)\Gamma(-n+q+1)\alpha^{2n-2q+1}},$$

$$u_\alpha^F(\alpha, \pm 0) = 0\,,$$

$$u_\gamma^F(\alpha, \pm 0) =$$

$$= \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q)}{2^{q+1}\Gamma(n+1)} \left[\frac{\Gamma(n+1)F(n-q; n-q; 2n-q+1; \alpha^{-2})}{\Gamma(2n-q+1)\Gamma(-n+q+1)\alpha^{2n-2q}} - 1 \right],$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{2\mu k^2}{k^2+1} \times$$

$$\times \sum_{n-1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q+0.5)F(n-q+0.5; n-q+0.5; 2n-q+1; \alpha^{-2})}{2^q \Gamma(2n-q+1)\Gamma(-n+q+0.5)\alpha^{2n-2q+1}},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^F(\alpha, \pm 0) = -2\mu k^{-2} \omega_\beta^F(\alpha, \pm 0)\,. \tag{45}$$

Аналіз характеристик (44) і (45) напружено-деформованого стану дає можливість стверджувати, що при виконанні нерівності

$$0 < q < 1 \tag{46}$$

на параметр q вони є неперервними на лінії $\alpha = 1$ і згасають на нескінченності. Разом з тим відповідно до виразу (39) для сталої C^F маємо

$$C^F = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n-q)}{2^{q+1}\Gamma(n+1)} = \lim_{\alpha \to \infty} u_\gamma^F(\alpha, \pm 0)\,,$$

тобто вона є обмеженою на нескінченності і залежить від параметра q.

Коли параметр $q = 0.5$, то це значення не суперечить нерівності (46). Тоді на підставі виразів для нормального напруження $\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha, \pm 0)$ (44) і (45) в області $0 \le \alpha \le 1$ одержуємо

$$\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{\mu k^2}{\sqrt{2}\,(k^2+1)} \sqrt{1-\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n)F(-n+1;\ n+0.5;\ 1;\ \alpha^2)}{\Gamma\,(n+0.5)} \tag{47}$$

і $\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha, \pm 0) = 0$ в області $1 \le \alpha < \infty$. Отже, у цьому випадку межовий шар існує тільки в області включення і неперервно згасає на його краю $\alpha = 1$.

Таким чином, параметр q керує розподілом стрибка нормальних напружень у площині включення і його можна трактувати як зведену механічну характеристику внутрішнього межового шару.

Якщо порушити обмеження (46) і покласти $q = -0.5$, то $\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha, \pm 0) = 0$ в області $1 \le \alpha < \infty$ і межовий шар там відсутній. При цьому стрибок нормальних напружень $\sigma_{\gamma\gamma}^F(\alpha, \pm 0) = 0$ в області $0 \le \alpha \le 1$ залишається і має на лінії $\alpha = 1$ класичну кореневу особливість, що є результатом сингулярного розподілу об'ємної сили:

$$X_\gamma(\alpha,-0.5)=\frac{4k^2\sqrt{2}}{k^2+1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\Gamma(n+1)F(n+1;\,-n+0.5;\,1;\,\alpha^2)}{\Gamma(n+0.5)}=$$
$$=\frac{4k^2\sqrt{2}}{(k^2+1)\sqrt{1-\alpha^2}}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+0.5)}F(-n;\,n+0.5;\,1;\,\alpha^2).$$

Оскільки у цьому випадку об'ємна деформація $\theta^F(\alpha,\pm 0)$ і компонента $\omega_\beta^F(\alpha,\pm 0)$ вектора $\mathbf{\Omega}=0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ є розривними на лінії $\alpha=1$, то цей стан рівноваги порушує основні постулати лінійної моделі деформівного твердого тіла і є фізично неможливим.

4. Температурне поле і температурні напруження у тілі при параболічному законі розподілу теплового потоку в області теплонепроникного включення. У рівнянні (11) покладемо $f(\alpha^2)=1-\alpha^2$. Тоді інтегральне рівняння (12) набуде вигляду

$$\int_0^\infty \eta^3 H(\eta,p)J_1(\eta\alpha)\,d\eta=-2\alpha,\qquad 0\le\alpha\le 1,$$

і його розв'язок згідно з (13) є таким:

$$\eta^3 H(\eta,p)=a_1\frac{J_{2-p}(\eta)}{\eta^p},\qquad p>-1,$$

де $a_1=-2^{p+1}/\Gamma(2-p)$, $a_n=0$, $n>1$, визначені із рівняння (15) шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях α. За відомими коефіцієнтами a_n і рівністю (14) отримаємо, що стала $C^Q=p/(1-p)$, яка визначає потік тепла на нескінченності, залежить від параметра p.

Тепер за формулами (16) можна визначити усі характеристики температурного поля за теплонепроникного включення в області $0\le\alpha\le 1$. Зокрема, у площині $\gamma=0$ згідно з рівностями (17) в області $0\le\alpha\le 1$ маємо

$$T(\alpha,\pm 0)=\mp\frac{2T_0}{3\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(0.5-p)F(0.5-p;\,-1.5;\,1;\,\alpha^2)}{\Gamma(2-p)},$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0)=\mp\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\alpha\Gamma(1.5-p)F(1.5-p;\,-0.5;\,2;\,\alpha^2)}{\Gamma(2-p)},$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0)=-\frac{F(1-p;\,-1;\,1;\,\alpha^2)}{1-p}+\frac{p}{1-p}=-(1-\alpha^2), \tag{48}$$

а згідно з (18) в області $1\le\alpha<\infty$ маємо

$$T(\alpha,\pm 0)=\mp\frac{\Gamma(0.5-p)F(0.5-p;\,0.5-p;\,3-p;\,\alpha^{-2})}{2\Gamma(2-p)\Gamma(3-p)\Gamma(p+0.5)\alpha^{1-2p}},$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0)=\mp\frac{\Gamma(1.5-p)F(1.5-p;\,0.5-p;\,3-p;\,\alpha^{-2})}{\Gamma(2-p)\Gamma(3-p)\Gamma(p+0.5)\alpha^{2-2p}},$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0)=-\frac{\Gamma(1-p)F(1-p;\,1-p;\,3-p;\,\alpha^{-2})}{\Gamma(2-p)\Gamma(3-p)\Gamma(p)\alpha^{2-2p}}+\frac{p}{1-p}. \tag{49}$$

Відомий [5] розв'язок цієї задачі методом потенціалу подвійного шару визначає температурне поле $T(\alpha,\gamma)$ таке, що $T(\alpha,\pm 0)=0$ в області $1\le\alpha<\infty$. Аналіз виразу $T(\alpha,\pm 0)$ (49) визначає цей результат при $p=-0.5$ і $p=-1.5$, оскільки $|\Gamma(-n)|=\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$. Тоді з виразів (48) і (49) при $p=-0.5$ одержимо, що в області $0\le\alpha\le 1$

$$T(\alpha,\pm 0) = \mp\frac{8T_0}{9\pi}(1-\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}, \qquad q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = \mp\frac{8T_0}{3\pi}\sqrt{1-\alpha^2}\,,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = -(1-\alpha^2)\,, \tag{50}$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$

$$T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = 0\,,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = -\frac{1}{3}\left[1-\frac{8}{15\pi}\frac{1}{\alpha^3}F(1.5;\,1.5;\,3.5;\,\alpha^{-2})\right]. \tag{51}$$

Якщо параметр $p = -1.5$, то в області $0 \le \alpha \le 1$

$$T(\alpha,\pm 0) = \mp\frac{16T_0}{45\pi}\sqrt{1-\alpha^2}\,(1-2.5\alpha^2)\,,$$

$$q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = \mp\frac{32\alpha F(3;-0.5;2;\alpha^2)}{15\pi} = \mp\frac{4F(-1;2.5;2;\alpha^2)}{15\pi\sqrt{1-\alpha^2}} = \mp\frac{8(4-5\alpha^2)}{15\pi\sqrt{1-\alpha^2}}\,,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = -\frac{1}{5}[2F(2.5;\,-1;\,1;\,\alpha^2)+3] = -\frac{1}{5}[2(1-2.5\alpha^2)+3] = -(1-\alpha^2)\,, \tag{52}$$

а області $1 < \alpha < \infty$

$$T(\alpha,\pm 0) = 0, \qquad q_\alpha^*(\alpha,\pm 0) = 0\,,$$

$$q_\gamma^*(\alpha,\pm 0) = -\frac{8F(2.5;\,2.5;\,4.5;\,\alpha^{-2})}{105\pi\alpha^5} = -\frac{8F(2;\,2;\,4.5;\,\alpha^{-2})}{105\pi\sqrt{\alpha^2-1}}\,. \tag{53}$$

Отже, за існування у тілі теплонепроникного включення, математичною моделлю якого є пелена теплових диполів (1), при сталій нормальній складовій вектора теплового потоку на нескінченності можливі два закони розподілу характеристик температурного поля − регулярний (50) і (51) при значенні параметра $p = -0.5$ і класичний сингулярний (52) і (53) при значенні параметра $p = -1.5$.

Умови ідеального механічного контакту між пружною матрицею і жорстким включенням забезпечують рівності (35) і (36). При цьому рівність (35) виконується за рахунок побудованого розв'язку, а рівність (36) − відповідним законом розподілу пелени сил $X_\gamma(\alpha,q)$ (30), який визначає твірна функція $B(\xi,q)$ коефіцієнтами ряду (40). Щоб визначити коефіцієнти b_n із рівняння (41), знайдемо температурне переміщення $u_\gamma^T(\alpha,\pm 0)$ за формулами (21) в області включення. Оскільки в розглядуваному прикладі $a_1 = -\dfrac{2^{p+1}}{\Gamma(2-p)}$, $a_n = 0$, $n > 1$, і $C^T = -\dfrac{\beta_T T_0}{16}\dfrac{\Gamma(-p)}{\Gamma(2-p)}$, тоді в області $0 \le \alpha \le 1$ маємо

$$u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) = -\frac{\beta_T T_0}{8(1-p)}\left[\alpha^2 - \frac{1}{4}(1-p)\alpha^4\right], \tag{54}$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$

$$u_\gamma^T(\alpha,\pm 0) = -\frac{\beta_T T_0 \Gamma(-p)}{16\Gamma(2-p)}\left[1-\frac{2F(-p;\,-p;\,3-p;\,\alpha^{-2})}{\Gamma(3-p)\Gamma(p+1)\alpha^{-2p}}\right]. \tag{55}$$

Зазначимо, що із застосуванням формули підсумовування

$$F(a;\,b;\,c;\,1) = \Gamma(c)\Gamma(c-a-b)/\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)$$

можна переконатися у тому, що значення $u_\gamma^T(1,\pm 0)$, обчислені за формулами (54) і (55), збігаються на краю включення $\alpha = 1$.

Оскільки температурні переміщення $u_\gamma^T(\alpha, \pm 0)$ (54) і (55) залежать від параметра p, то в області $0 \le \alpha \le 1$ при $p = -0.5$ маємо

$$\bar{u}_\gamma^T(\alpha, \pm 0) = -\frac{\beta_T T_0}{12}\left(\alpha^2 - \frac{3}{8}\alpha^4\right), \tag{56}$$

а при значенні параметра $p = -1.5$ маємо

$$\tilde{u}_\gamma^T(\alpha, \pm 0) = -\frac{\beta_T T_0}{20}\left(\alpha^2 - \frac{5}{8}\alpha^4\right). \tag{57}$$

Отже, температурні переміщення $u_\gamma^T(\alpha, \pm 0)$ на краю $\alpha = 1$ області теплонепроникнення за регулярного розподілу теплових потоків $(p = -0.5)$ (56) значно більші, ніж за сингулярного розподілу $(p = -1.5)$ (57): $\dfrac{\bar{u}_\gamma^T(1, \pm 0)}{\tilde{u}_\gamma^T(1, \pm 0)} = \dfrac{25}{9}$. Тому в подальших дослідженнях доцільно розглянути перший випадок і обмежитись значенням параметра $p = -0.5$, яке не суперечить нерівності (20).

Визначимо тепер силу $X_\gamma(\alpha, q)$ (30), яка забезпечує виконання умови (36) ідеального механічного контакту пружної матриці із жорстким включенням. Оскільки сила $X_\gamma(\alpha, q)$ визначається твірною функцією $B(\xi, q)$ (40), то для знаходження коефіцієнтів b_n ряду маємо рівняння (41), з якого за відомої функції $u_\gamma^T(\alpha, \pm 0)$ (56) шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях α^2 у правій і лівій частинах одержуємо систему двох алгебричних рівнянь

$$b_1 + (2-q)b_2 = -\frac{1}{3}A, \qquad b_2(2-q)(3-q) = -\frac{1}{2}A,$$

де $A = \dfrac{\beta_T T_0}{2^{1-q}\Gamma(2-q)}$.

Розв'язок цієї системи є таким:

$$b_1(q) = -\frac{(3-2q)A(q)}{6-3q}, \qquad b_2(q) = -\frac{A(q)}{2(2-q)(3-q)} \tag{58}$$

і залежить від параметра $0 < q < 1$ (46), який є зведеною механічною характеристикою внутрішнього межового шару.

Будемо вважати, що внутрішній межовий шар, який є фізичною моделлю включення, не поширюється в область $1 \le \alpha < \infty$. Тому у цій області сила $X_\gamma(\alpha, q)$ повинна дорівнювати нулеві. Аналіз формули (43) для сили $X_\gamma(\alpha, q)$ вказує на те, що значення параметра $q = 0.5$ забезпечує виконання умови $X_\gamma(\alpha, 0.5) = 0$ в області $1 \le \alpha < \infty$ і не суперечить обмеженню (46) на параметр q.

Тепер за рівностями (58) знайдемо, що

$$b_1(0.5) = b_2(0.5) = -\frac{2\sqrt{2}\,\beta_T T_0}{15\sqrt{\pi}},$$

а тому відповідно до виразу (42) із застосуванням формули перетворення

$$F(a;\, b;\, c;\, x^2) = (1-x^2)^{c-a-b} F(c-a;\, c-b;\, c;\, x^2)$$

одержимо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$X_\gamma(\alpha,\,0.5) = -\frac{32(1-\nu)\beta_T T_0}{15(3-4\nu)\pi}\sqrt{1-\alpha^2}\left[F(0;\,1.5;\,1;\,\alpha^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}F(-1;\,2.5;\,1;\,\alpha^2)\right] = -\frac{32(1-\nu)\beta_T T_0}{9(3-4\nu)\pi}(1-\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}\,,$$

а в області $1 \le \alpha < \infty$ маємо $X_\gamma(\alpha,\,0.5) = 0$, де β_T визначається рівністю (5).

Отже, за вибору значення параметра $q = 0.5$, яке не суперечить обмеженню (44), сила $X_\gamma(\alpha, 0.5)$ є неперервною на краю включення $\alpha = 1$. Як наслідок, з огляду на співвідношення (34), усі характеристики напружено-деформованого стану, зумовлені цією силою, також є неперервними і обмеженими.

Висновки. Запропоновано математичну модель жорсткого теплонепроникного включення як пелени теплових диполів і сил, розподілених у площині включення кожна із своєю густиною. З'ясовано, що пелена теплових диполів зумовлює існування стрибка температури і радіальної складової вектора теплового потоку, а пелена нормальних до площини включення сил зумовлює стрибок нормальних напружень при переході цієї площини вздовж нормалі до неї.

Виконання умови теплонепроникності в області включення та умови ідеального механічного контакту жорсткого включення з пружною матрицею зведено до розв'язання інтегральних рівнянь першого роду методом рядів Неймана з ваговою функцією, що залежить від параметра. Існуюча залежність характеристик температурного поля та силових напружень від параметрів p і q дає можливість сформулювати обмеження, за яких усі характеристики температурного поля і напружено-деформованого стану є неперервними і обмеженими на краю включення.

Доведено, що в класі функцій за сталих нормальних складової вектора теплового потоку і переміщення на нескінченності та класичних припущеннях щодо характеристик температурного поля і напружень у площині включення поза ним (рівність нулеві стрибка температури і нормальних напружень) існує єдиний регулярний розподіл напружень на його краю.

1. *Галазюк В. А., Кіт Г. С.* Осесиметричний напружено-деформований стан у тілі з плоскою пеленою теплових джерел або диполів // Доп. НАН України. – 2011. – № 10. – С. 54–60.
2. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Фундаментальна система розв'язків осесиметричної задачі теорії пружності для тіла з плоскою пеленою об'ємних моментних диполів і сил // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 132–142.
   Те саме: *Halazyuk V. A., Sulym H. T.* Fundamental system of solutions of the axially symmetric problem of the theory of elasticity for a body with a plane sheet of volume moment dipoles and forces // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 4. – P. 457–469.
3. *Кит Г. С., Михаськив В. В., Хай М. В.* Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, № 5. – С. 855–863.
4. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние тела с теплоактивным тонким жестким дисковым включением // Теорет. и прикл. механика. – 2012. – № 4(50). – С. 15–22.
5. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние тела с теплонепроницаемым тонким жестким дисковым включением // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – № 4(52). – С. 25–35.
6. *Кіт Г. С., Галазюк В. А.* Напружено-деформований стан тіла з тонким жорстким дисковим теплотворним елементом // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2011. – Вип. 12. – С. 152–159.
7. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики: В 2 т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – Т. 2. – 896 с.

Те саме: *Morse Ph. M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics. Part II. – New York: McGraw-Hill Book Co., 1953.
8. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
Те саме: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon, 1962. – 628 p.
9. *Силованюк В. П.* Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл з дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка, 2000. – 300 с.
10. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
11. *Сулим Г.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
12. *Hirose S., Achenbach J. D.* BEM method to analyze the interaction of an acoustic pulse with a rigid circular disk // Wave Motion. – 1988. – **10**, No. 3. – P. 267–275.
13. *Kassir M. K., Sih G. C.* Some three-dimensional inclusion problems in elasticity // Int. J. Solids Struct. – 1968. – **4**, No. 2. – P. 225–241.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА С ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ДИСКОВЫМ ТЕПЛОНЕПРОНИЦАЕМЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Построено решение задачи термоупругости для тела с тонким жестким теплонепроницаемым включением в классе функций, определяющих напряженно-деформированное состояние с постоянными нормальными к плоскости включения перемещениями на бесконечности. Включение моделируется погранслоем, которому соответствует пелена моментных диполей и сил, а скачек радиальных перемещений и нормальных к плоскости включения напряжений является его механическим проявлением. Решение уравнений теплопроводности и термоупругости при обеспечении требования непрерывной зависимости от краевых условий сведено к интегральным уравнениям первого рода и найдено с помощью метода обобщенных рядов Неймана. Определен скачек нормальных напряжений на поверхностях включения, обеспечивающий идеальный механический контакт жесткого включения с упругой матрицей.

AXISYMMETRIC STRESS-STRAIN STATE OF A BODY WITH A THIN RIGID DISC-SHAPED HEAT-PROOF INCLUSION

The solution of thermoelasticity problem for a body with a thin rigid heat-proof inclusion in a class of functions, determining stress-strain mode with constant normal displacements to a surface of inclusion at infinity is solved. Inclusion is modeled by a boundary layer which corresponds to a sheet of moment dipoles and powers, and a bound of radial displacements and normal stresses to the plain of inclusion serve as mechanical demonstration. The solution of equations of heat conduction and thermoelasticity by ensuring of requirement of continuous dependence of boundary conditions is reduced to integral equation of the first kind and is solved by the method of Neuman generalized series. The jump of normal stresses on the surface of inclusion is determined. It provides ideal mechanical contact of rigid inclusion with elastic matrix.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
05.04.13