УДК 621.396

П. О. Савенко

СИНТЕЗ ВИПРОМІНЮЮЧИХ СИСТЕМ З ПЛОСКИМ РОЗКРИВОМ ЗА ЗАДАНОЮ ДІАГРАМОЮ НАПРЯМЛЕНОСТІ ЗА ПОТУЖНІСТЮ. I. ЗНАХОДЖЕННЯ МНОЖИНИ ТОЧОК БІФУРКАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ

Досліджується задача синтезу випромінюючої системи з плоским розкривом за заданою діаграмою напрямленості за потужністю. Розглядається частковий випадок, коли поле в розкриві є лінійно поляризованим. Показано, що для цього класу задач є характерними неєдиність і біфуркація розв'язків. Задача про знаходження множини точок біфуркації зводиться до задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. Побудовано чисельні алгоритми та наведено числові приклади знаходження ліній біфуркації розв'язків основних рівнянь синтезу.

Вступ. У багатьох практичних застосуваннях на етапі оптимального проектування антен з плоским випромінюючим розкривом ставляться вимоги лише до енергетичних характеристик випроміненого поля, зокрема до амплітудної діаграми напрямленості (ДН) або до ДН за потужністю [2].

Незважаючи на те, що з амплітудної ДН $|\mathbf{f}|$ легко одержати ДН за потужністю $N = |\mathbf{f}|^2$ і навпаки, у математичному аспекті знаходження оптимальних розв'язків задач синтезу заданої амплітудної ДН F_0 і заданої енергетичної ДН $N_0 = F_0^2$ є різними задачами [12, 16]. Якщо, наприклад, $|\mathbf{f}_*|$ є оптимальним розв'язком деякої варіаційної задачі синтезу амплітудної ДН F_0, то $|\mathbf{f}_*|^2$ вже не буде оптимальним розв'язком аналогічної задачі при заданій ДН $N_0 = F_0^2$. Крім того, для цього класу задач є характерними неєдиність і біфуркація розв'язків, а задача про знаходження множини точок біфуркації є недостатньо вивченою нелінійною двопараметричною спектральною задачею [11].

Знаходження оптимальних розв'язків задачі синтезу зводиться до дослідження й чисельного розв'язування двовимірного нелінійного інтегрального рівняння, залежного від двох фізичних параметрів, яке містить інтегральний оператор типу Гаммерштейна.

Робота складається з двох частин. У першій частині наведено й обґрунтовано алгоритми для знаходження множини точок біфуркації розв'язків задачі синтезу.

Друга частина роботи присвячена знаходженню методами теорії галуження біфуркуючих розв'язків і побудові чисельних алгоритмів для знаходження оптимальних розв'язків для випадків прямокутного й еліптичного розкривів.

1. Основні рівняння синтезу. Розглянемо частковий випадок задачі синтезу випромінюючої системи з плоским розкривом $\overline{S}$, приймаючи, що поле в розкриві лінійно поляризоване вздовж однієї з координатних осей. У цьому випадку ДН плоского розкриву у введеній Є. Г. Зелкіним [6] спеціальній системі координат має лише одну складову, яка подається формулою

$$f(s_1, s_2) = AU \equiv \iint_{\overline{S}} U(x, y) e^{i(c_1 x s_1 + c_2 y s_2)}\, dx\, dy\,, \tag{1}$$

де $U(x, y)$ – амплітудно-фазовий розподіл (АФР) поля у розкриві $\overline{S}$; s_1, s_2 – узагальнені кутові координати:

$$s_1 = \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sin\gamma_1}, \qquad s_2 = \frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin\gamma_1},$$

c_1, c_2 − безрозмірні числові параметри задачі, які характеризують електричні розміри розкриву (в довжинах хвиль) і тілесний кут (область), у якому задана необхідна ДН за потужністю $N_0(s_1, s_2)$:

$$c_1 = ka\sin\gamma_1, \qquad c_2 = ka\sin\gamma_2, \tag{2}$$

$k = 2\pi/\lambda$ − хвильове число.

Формулу (1) розглядатимемо також як відображення, що здійснює лінійний оператор A з гільбертового простору $H_U = L_2(\bar{S})$, якому належать функції, що описують амплітудно-фазовий розподіл поля в розкриві у простір $H_f = L_2(\bar{G})$, якому належить множина функцій, що описують синтезовані ДН. У просторах H_U і H_f введемо скалярні добутки й породжувані ними норми:

$$(U_1, U_2)_{L_2(S)} = \frac{4\pi^2}{c_1 c_2}\iint\limits_{\bar{S}} U_1(x,y)\overline{U_2(x,y)}\,dx\,dy, \quad \|U\|_{L_2(S)} = (U,U)^{1/2}_{L_2(S)}, \tag{3}$$

$$(f_1, f_2)_{L_2(G)} = \iint\limits_{\bar{G}} f_1(s_1,s_2)\overline{f_2(s_1,s_2)}\,ds_1\,ds_2, \qquad \|f\| = (f,f)^{1/2}_{L_2(G)}. \tag{4}$$

Нехай необхідна ДН за потужністю $N_0(s_1, s_2)$ задана у деякій обмеженій замкненій області $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2$. Задача синтезу полягає в знаходженні такої функції АФР поля в розкриві $U(x,y)$, щоб синтезована ДН за потужністю $|f(s_1,s_2)|^2$ якомога менше відрізнялася від заданої ДН $N_0(s_1,s_2)$. За критерій оптимізації виберемо згладжуючий функціонал

$$\sigma_{N_\alpha}(U) = \iint\limits_{\bar{G}} [N_0(s_1,s_2) - |f(s_1,s_2)|^2]^2\,ds_1\,ds_2 + \alpha\iint\limits_{\bar{S}} |U(x,y)|^2\,dx\,dy, \tag{5}$$

у якому перший доданок характеризує середньоквадратичне відхилення модулів заданої і синтезованої ДН, а другий − накладає обмеження на енергію поля в розкриві, α − ваговий параметр.

З необхідної умови мінімуму функціонала (5) одержуємо рівняння відносно оптимального АФР [12], яке в операторній формі має вигляд

$$U = \frac{2}{\alpha}A^*(N_0\cdot AU) - \frac{2}{\alpha}A^*(|AU|^2\,AU), \tag{6}$$

де A^* − спряжений з A оператор.

Подіявши на обидві сторони рівняння (6) оператором A, одержуємо операторну форму нелінійного рівняння відносно синтезованої ДН:

$$f = \mathbf{B}(f) \equiv \frac{2}{\alpha}AA^*(N_0\cdot f) - \frac{2}{\alpha}AA^*(|f|^2 f). \tag{7}$$

Розгорнута форма рівняння (6) має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}U(x,y) = {} & \frac{c_1c_2}{(2\pi)^2}\iint\limits_{\bar{G}} N_0(s_1,s_2)\iint\limits_{\bar{S}} U(x',y')e^{i(c_1x's_1+c_2y's_2)}\,dx'\,dy'\times \\ & \times e^{-i(c_1xs_1+c_2ys_2)}\,ds_1\,ds_2 - \\ & - \frac{c_1c_2}{(2\pi)^2}\iint\limits_{\bar{G}}\left|\iint\limits_{\bar{S}} U(x',y')e^{i(c_1x's_1+c_2y's_2)}\,dx'\,dy'\right|^2\times \\ & \times\iint\limits_{\bar{S}} U(x',y')e^{i(c_1x's_1+c_2y's_2)}\,dx'\,dy' e^{-i(c_1x's_1+c_2y's_2)}\,ds_1\,ds_2.\end{aligned} \tag{8}$$

Розгорнута форма рівняння (7) набуває форми

$$f(s_1,s_2)=\frac{2}{\alpha}\iint_{\overline{\Omega}} N_0(s_1',s_2')\mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)f(s_1',s_2')\,ds_1'\,ds_2' -$$

$$-\frac{2}{\alpha}\iint_{\overline{\Omega}} \mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)\left|f(s_1',s_2')\right|^2 f(s_1',s_2')\,ds_1'\,ds_2', \qquad (9)$$

у якій ядро $\mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)$ у загальному випадку визначається за формулою

$$\mathcal{K}(Q,Q',c)=\frac{c_1c_2}{(2\pi)^2}\iint_{\overline{S}} \exp\left[i\left(c_1x\,(s_1'-s_1)+c_2y\,(s_2'-s_2)\right)\right]dxdy\,. \qquad (10)$$

Тут для скорочення у подальшому записів введено позначення $Q=(s_1,s_2)$, $Q'=(s_1',s_2')$. У випадку симетричних розкривів $\overline{S}$ ядро (10) вдається спростити. Зокрема, якщо область $\overline{S}$ має дві осі симетрії, а її верхня й нижня межі описуються відповідно функціями $y=\pm\eta(x)$ при $x\in[-1,1]$, то ядро (10) є дійсним і набуває вигляду

$$\mathcal{K}(Q,Q',c)=\frac{c_1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\cos\left(c_1x(s_1'-s_1)\right)\frac{\sin\left(c_2(s_2'-s_2)\eta(x)\right)}{\pi(s_2'-s_2)}\,dx\,. \qquad (11)$$

У випадку прямокутного розкриву ядро (10) набуває такої форми:

$$\mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)=\frac{\sin c_1(s_1-s_1')}{\pi(s_1-s_1')}\cdot\frac{\sin c_2(s_2-s_2')}{\pi(s_2-s_2')}\,. \qquad (12)$$

Зазначимо, що рівняння (6), (7) (і відповідно рівняння (8), (9)) є еквівалентними у такому розумінні: між розв'язками цих рівнянь існує взаємно однозначна відповідність, тобто кожному розв'язку рівняння (6) відповідає розв'язок рівняння (7) і, навпаки: якщо f_* – розв'язок рівняння (7), то відповідний йому розв'язок U_* рівняння (6) визначається за формулою

$$U_*=\frac{2}{\alpha}A^*(N_0\cdot f_*)-\frac{2}{\alpha}A^*(|f_*|^2 f_*)\,, \qquad (13)$$

розгорнута форма якої має вигляд

$$U_*(x,y)=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{c_1c_2}{(2\pi)^2}\iint_{\overline{\Omega}}\left(N_0(s_1,s_2)-\left|f_*(s_1,s_2)\right|^2\right)\times$$

$$\times f_*(s_1,s_2)e^{-i(c_1x's_1+c_2y's_2)}\,ds_1\,ds_2\,. \qquad (14)$$

Якщо U_* – розв'язок рівняння (6), то відповідний йому розв'язок f_* рівняння (7) визначається за формулою (1). Зрозуміло, що така еквівалентність зберігається для рівнянь (8), (9), записаних у розгорнутій формі.

Існування хоча би однієї точки мінімуму функціонала $\sigma_{N_\alpha}(\mathbf{U})$ у просторі H_U стверджує

Теорема 1 [**12**]. *Нехай лінійний оператор A діє з простору H_U у $\mathbf{C}^{(2)}_{(\overline{G})}$ і є цілком неперервним, $N_0(\vartheta,\varphi)$ – задана невід'ємна неперервна на $\overline{G}$ функція, причому* $\max\limits_{(\vartheta,\varphi)\in\overline{G}} N_0(\vartheta,\varphi)=1$.

Тоді у просторі H_U існує хоча би одна точка абсолютного мінімуму функціонала $\sigma_{N_\alpha}(U)$ і з будь-якої мінімізуючої послідовності можна виділити підпослідовність, яка збігається слабко до однієї з точок абсолютного мінімуму.

Легко переконатись, що функціонал має m-властивість, тобто $\lim\limits_{\|U\|\to\infty} \sigma_{N_\alpha}(U) = \infty$. З теореми 1 випливає

Наслідок 1. *Оскільки функціонал* $\sigma_{N_\alpha}(U)$ *диференційовний на* H_U *за Гато, має хоча б одну точку мінімуму і має* m*-властивість, то рівняння* (6), (8) *у просторі* H_U *та рівняння* (7), (9) *у просторі* $\mathbf{C}^{(2)}_{(\bar{G})}$ *мають принаймні по одному розв'язку.*

Надалі з огляду на еквівалентність рівнянь (8), (9) будемо досліджувати розв'язки рівняння (9), тому що воно простіше від рівняння (8), яке у правій частині містить почетверений інтеграл.

Оскільки множина значень оператора A є множиною неперервних функцій [8], що належать до простору $L_2(\bar{G})$, а множина функцій, неперервних на області $\bar{G}$, є щільною у просторі $L_2(\bar{G})$ [8], то розв'язки рівняння (9) будемо досліджувати в комплексному просторі $\mathbf{C}(\bar{G})$.

2. Біфуркація розв'язків у випадку прямокутного розкриву. Легко переконатись, що при довільних обмежених значеннях параметрів c_1, c_2 рівняння (9) має нульові розв'язки. З ростом параметрів c_1, c_2 відбувається біфуркація розв'язків, тобто при певних значеннях параметрів $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$ появляються розв'язки, відмінні від нульового.

Аналогічно, як у [13], на підставі декомплексифікації [15] комплексний простір $\mathbf{C}(\bar{G})$ розглядаємо як пряму суму двох просторів дійсних неперервних на області $\bar{G}$ функцій: $\mathbf{C}(\bar{G}) = C(\bar{G}) \oplus C(\bar{G})$, елементи якого подаються у вигляді: $f = (u,v)^\top \in \mathbf{C}(\bar{G})$, $u = \mathrm{Re}(f) \in C(\bar{G})$, $v = \mathrm{Im}(f) \in C(\bar{G})$. Норми в цих просторах вводимо за формулами:

$$\|u\|_{C(\bar{G})} = \max_{Q\in\bar{G}} |u(Q)|,$$

$$\|v\|_{C(\bar{G})} = \max_{Q\in\bar{G}} |v(Q)|,$$

$$\|f\|_{\mathbf{C}(\bar{G})} = \max\left\{ \|u\|_{C(\bar{G})}, \|v\|_{C(\bar{G})} \right\}.$$

У результаті декомплексифікації рівняння (9) одержуємо еквівалентну йому систему в просторах дійсних неперервних функцій

$$\begin{aligned} \alpha u(s_1,s_2) = {} & 2\iint\limits_{\bar{G}} N_0(s_1',s_2')\mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)u(s_1',s_2')\,ds_1'\,ds_2' - \\ & - 2\iint\limits_{\bar{G}} \mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)(u^2(s_1',s_2') + \\ & + v^2(s_1',s_2'))u(s_1',s_2')\,ds_1'\,ds_2', \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \alpha v(s_1,s_2) = {} & 2\iint\limits_{\bar{G}} N_0(s_1',s_2')\mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)v(s_1',s_2')\,ds_1'\,ds_2' - \\ & - 2\iint\limits_{\bar{G}} \mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)(u^2(s_1',s_2') + \\ & + v^2(s_1',s_2'))v(s_1',s_2')\,ds_1'\,ds_2'. \end{aligned} \tag{16}$$

Для знаходження множини точок біфуркації розв'язків (у розглядуваному випадку − ліній біфуркації) і комплексних розв'язків рівняння (9), які відгалужуються від нульового розв'язку, розглянемо задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ і всіх відмінних від тривіального розв'язків системи (15), (16), які при $\left|\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}\right| \to 0$ задовольняють умови

$$\max_{Q\in\bar{G}} |u(Q,\mathbf{c})| \to 0, \qquad \max_{Q\in\bar{G}} |v(Q,\mathbf{c})| \to 0\,, \tag{17}$$

тобто ці розв'язки рівномірно збігаються до нуля. При цьому необхідно враховувати також напрямок прямування вектора $\mathbf{c}$ до вектора $\mathbf{c}^{(0)}$.

Покладемо

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu, \qquad c_2 = c_2^{(0)} + \nu\,, \tag{18}$$

а шукані розв'язки знаходитимемо у вигляді

$$u(Q,\mathbf{c}) = 0 + w(Q,\mu,\nu), \qquad v(Q,\mathbf{c}) = 0 + \omega(Q,\mu,\nu)\,. \tag{19}$$

Надалі для скорочення записів залежність функцій $w(Q,\mu,\nu)$, $\omega(Q,\mu,\nu)$ від параметрів μ, ν там, де немає необхідності це підкреслювати, будемо опускати.

Підставляючи вирази (18), (19) у систему (16), (17) і розкладаючи підінтегральні функції в околі точки $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, 0, 0)$ у рівномірно збіжні степеневі ряди за функціональними аргументами w, ω та числовими параметрами μ, ν, одержуємо систему нелінійних інтегральних рівнянь типу Ляпунова – Шмідта [3] відносно малих розв'язків w, ω:

$$w(Q) = \frac{2}{\alpha}\iint\limits_{\bar{G}} N_0(Q')\mathcal{K}(Q,Q',c_1^{(0)},c_2^{(0)})\, w(Q')\,dQ' - \frac{2}{\alpha}\sum_{m+n+p+q\ge 2}\mu^p\nu^q \times$$
$$\times \iint\limits_{\bar{G}} A_{mnpq}(Q,Q',c_1^{(0)},c_2^{(0)}) w^m(Q')\omega^n(Q')\,dQ'\,, \tag{20}$$

$$\omega(Q) = \frac{2}{\alpha}\iint\limits_{\bar{G}} N_0(Q')\mathcal{K}(Q,Q',c_1^{(0)},c_2^{(0)})\omega(Q')\,dQ' - \frac{2}{\alpha}\sum_{m+n+p+q\ge 2}\mu^p\nu^q \times$$
$$\times \iint\limits_{\bar{G}} B_{mnpq}(Q,Q',c_1^{(0)},c_2^{(0)}) w^m(Q')\omega^n(Q')\,dQ'\,, \tag{21}$$

де $A_{mnpq}(Q,Q',c_1^{(0)},c_2^{(0)})$, $B_{mnpq}(Q,Q',c_1^{(0)},c_2^{(0)})$ – коефіцієнти розкладу підінтегральних функцій, неперервно залежні від своїх аргументів.

Згідно з теорією галуження розв'язків [3] точки біфуркації розв'язків визначаються з лінійної частини системи рівнянь (20), (21), тобто для знаходження множини точок біфуркації маємо систему лінійних однорідних двовимірних інтегральних рівнянь

$$\varphi(Q) = \frac{2}{\alpha}\iint\limits_{\bar{G}} N_0(Q')\mathcal{K}(Q,Q',c_1^{(0)},c_2^{(0)})\,\varphi(Q')\,dQ'\,, \tag{22}$$

$$\psi(Q) = \frac{2}{\alpha}\iint\limits_{\bar{G}} N_0(Q')\mathcal{K}(Q,Q',c_1^{(0)},c_2^{(0)})\,\psi(Q')\,dQ'\,, \tag{23}$$

у якій спектральними параметрами є $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, що входять нелінійно в ядра інтегральних операторів.

У загальному випадку знаходження власних значень і власних функцій системи рівнянь (22), (23) є нелінійною двопараметричною спектральною задачею. Відмітимо, що ця система не є взаємозв'язаною відносно функцій $\varphi(Q')$ та $\psi(Q')$ і ядра у цих рівняннях співпадають, тому очевидно, що співпадають і їх розв'язки. Отже, задача про знаходження власних значень і власних функцій системи рівнянь (22), (23) зводиться до розв'язування одного з них, зокрема надалі розглядатимемо рівняння (22).

Використовуючи більш загальний вираз для ядра (10) і відповідну йому квадратичну форму

$$(Df,f) = \iint\limits_G \iint\limits_G \mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c}) f(Q') dQ' \overline{f(Q)}\, dQ =$$

$$= \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint\limits_S \left| \iint\limits_G f(Q) \exp\left(i\mathbf{c}(P,Q)\right) dQ \right|^2 dS > 0$$

переконуємось, що ядро $\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})$ є додатним. Звідси випливає, що власні значення рівняння (22) є дійсними й невід'ємними.

Отже, задачу про знаходження множини точок біфуркації зведено до знаходження розв'язків рівняння типу (22). Дослідження розв'язків подібної задачі проводилось в роботі [13] у припущенні, що нескінченний визначник відповідної (22) дискретизованої задачі на власні значення збігається у розумінні [1]. Нижче наведемо відмінну від теореми 1 з роботи [13], більш конструктивну теорему, яка дає змогу будувати алгоритми для знаходження множини наближених розв'язків для власних значень, які зі зменшенням похибки апроксимації дискретизованої задачі збігаються до розв'язків точної задачі.

2.1. Нелінійна двопараметрична спектральна задача. З метою обґрунтування збіжності наближених розв'язків рівняння (22) до точних розглянемо нелінійну двопараметричну задачу на загальному операторному рівні, що дає змогу використати відомі в літературі результати [4, 5] стосовно нелінійної однопараметричної спектральної задачі.

Нехай E і V − комплексні банахові простори, а векторний параметр $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ належить до області (відкритої зв'язної множини) $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ комплексного простору $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, де $\lambda_i \in \Lambda_i \subset \mathbb{C}$, $\Lambda_i = \{\lambda_i \in \Lambda_i : |\lambda_i| < r_\lambda\}$, $i = 1, 2$, r_λ − деяка дійсна константа. Розглянемо оператор-функцію $\mathcal{A}(\cdot,\cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E,V)$, де кожному $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}$ ставиться у відповідність оператор $A(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(E,V)$. Тут через $\mathcal{L}(E,V)$ позначено простір лінійних обмежених операторів [15].

Будемо розглядати нелінійну двопараметричну спектральну проблему вигляду

$$\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2) x = 0\,, \tag{24}$$

у якій необхідно знайти власні значення $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \boldsymbol{\Lambda}$ і відповідні їм власні вектори $x^{(0)} \in E$ $(x^{(0)} \neq 0)$ такі, що $\mathcal{A}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) x^{(0)} = 0$.

Не обмежуючи загальності, з огляду на вигляд рівняння (22), оператор-функцію $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ подамо у вигляді

$$\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2) = T(\lambda_1, \lambda_2) - I\,, \tag{25}$$

де $T(\lambda_1, \lambda_2)$ − лінійний цілком неперервний оператор, що діє в банаховому просторі E та аналітично залежить від двовимірного параметра (λ_1, λ_2); I − одиничний в E оператор.

Нехай задано банахові простори E_n, $n = 1, 2, \ldots$, а також систему $\mathcal{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ лінійних обмежених операторів $p_n : E \to E_n$ таких, що

$$\|p_n x\|_{E_n} \to \|x\|_E\,, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in E\,. \tag{26}$$

Оператори p_n називають зв'язуючими [5, 15]. Шляхом вибору просторів E_n, $n = 1, 2, \ldots$, та системи зв'язуючих операторів $p_n : E \to E_n$ проводимо дискретизацію вихідної задачі (24), тобто оператор-функцію $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ апроксимуємо відповідно наближеними оператор-функціями $\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)$, $n \in \mathbb{N}$, визначеними у скінченновимірних просторах.

У результаті одержуємо послідовність операторів $A_n \in \mathcal{L}(E_n, V_n)$, яка при виконанні відповідних умов збігається до оператора $A \in \mathcal{L}(E, V)$. Зауважимо, що означення збіжності операторів $A_n \in \mathcal{L}(E_n, V_n)$ до $A \in \mathcal{L}(E, V)$ подаються в [5].

Дискретизацію вихідної задачі (24) і вибір просторів E_n та визначення операторів $p_n : E \to E_n$ можна здійснювати по-різному [4, 13, 15]. Зокрема, при розв'язуванні однорідних інтегральних рівнянь доцільно застосовувати квадратурні (кубатурні) процеси, а у випадку диференціальних рівнянь – заміну похідних їх різницевими аналогами. В результаті одержуємо апроксимаційні задачі для наближеного знаходження власних значень і власних функцій у вигляді

$$\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)x = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{27}$$

які стосовно рівняння (22) набувають форми

$$\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)x \equiv (T_n(\lambda_1, \lambda_2) - I_n)x = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Задача знаходження наближених власних значень зводиться до знаходження коренів визначника n-го порядку, тобто коренів рівняння

$$\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \det \left\| a_{i,j} \right\|_{i,j=1}^{n} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

що відповідає задачі (27), і рівняння

$$\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \det (T_n(\lambda_1, \lambda_2) - I_n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{29a}$$

що відповідає задачі (28).

Зауважимо, якщо коефіцієнти $a_{ij}(\lambda_1, \lambda_2)$ є неперервно диференційовними функціями своїх аргументів, то частинні похідні від функції $\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)$ визначаються за правилами диференціювання визначника [9].

Розглянемо необхідну в подальшому допоміжну однопараметричну спектральну задачу як частковий випадок задачі (24). Нехай змінна λ_2 в оператор-функції $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ виражається деякою однозначною диференційовною функцією $\lambda_2 = z(\lambda_1)$, яка відображає область $\Lambda_{1,\beta} \subseteq \Lambda_1$ у деяку підобласть $\Lambda_{2,\beta} \subset \Lambda_2$. У найпростішому випадку покладемо $\lambda_2 = \beta\lambda_1$, де β – дійсний параметр. Введемо в розгляд при $\lambda_1 \in \Lambda_{1,\beta}$ оператор-функцію $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1) \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, z(\lambda_1))$ (звуження оператор-функції $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$), з якою зв'язана нелінійна однопараметрична спектральна задача

$$\mathcal{A}_\beta(\lambda_1)x = 0, \tag{30}$$

де кожному значенню $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, z(\lambda_1)) \in \boldsymbol{\Lambda}$ ставиться у відповідність оператор $A_\beta(\lambda_1, z(\lambda_1)) \in \mathcal{L}(E, V)$.

Аналогічно до (27) розглядатимемо при $n \in \mathbb{N}$ апроксимуючу послідовність дискретизованої задачі (30)

$$\mathcal{A}_{\beta,n}(\lambda_1, z(\lambda_1))x_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Спектр оператор-функції $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1)$ позначимо через $s(\mathcal{A}_\beta)$. Припустимо, що $s(\mathcal{A}_\beta) \neq \Lambda_{1,\beta}$. Для спектра $s(\mathcal{A})$ задачі (24) справджується

Теорема 2. *Нехай виконуються такі умови:*

1°) *оператор-функція* $\mathcal{A}(\cdot,\cdot):\boldsymbol{\Lambda}\to\mathcal{L}(E,V)$ *голоморфна, причому* $s(\mathcal{A})\neq\boldsymbol{\Lambda}$;

2°) *оператор-функції* $\mathcal{A}_n(\cdot,\cdot):\boldsymbol{\Lambda}\to\mathcal{L}(E_n,V_n)$ *голоморфні і для будь-якої замкненої обмеженої множини* $\boldsymbol{\Lambda}_0\subset\boldsymbol{\Lambda}$ *виконується нерівність*

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{\Lambda}_0}\left\|\mathcal{A}_n(\lambda_1,\lambda_2)\right\|\le c(\boldsymbol{\Lambda}_0)=\text{const},\qquad n\in\mathbb{N};$$

3°) *оператори* $A(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathcal{L}(E,V)$, $A_n(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathcal{L}(E_n,V_n)$, $n\in\mathbb{N}$, *є фредгольмовими з нульовим індексом при будь-якому* $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2)\in\boldsymbol{\Lambda}$;

4°) *спектр* $s(\mathcal{A}_\beta)\neq\Lambda_{1,\beta}$, *а послідовність функцій* $\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)$ *є диференційовною в області* $\boldsymbol{\Lambda}$;

5°) *збіжність* $\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\lambda})\to\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ *є стійкою при будь-якому* $\boldsymbol{\lambda}\in r(\mathcal{A})=\boldsymbol{\Lambda}\backslash s(\mathcal{A})$.

Тоді справджуються такі твердження:

(***i***) *кожна точка спектра* $\lambda_1^{(0)}\in s(\mathcal{A}_\beta)$ *є ізольованою, є власним значенням оператора* $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1)\equiv\mathcal{A}(\lambda_1,z(\lambda_1))$, *і їй відповідає скінченновимірний власний підпростір* $N(\mathcal{A}(\lambda_1^{(0)}))$ *та скінченновимірний кореневий підпростір;*

(***ii***) *для кожного* $\lambda_1^{(0)}\in s(\mathcal{A}_\beta)$ *існує послідовність* $\{\lambda_{1,n}^{(0)}\}$ *із* $\lambda_{1,n}^{(0)}\in s(\mathcal{A}_{\beta,n})$, $n>N_0$, *така, що* $\lambda_{1,n}^{(0)}\to\lambda_1^{(0)}$;

(***iii***) *кожна точка* $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},z(\lambda_1^{(0)}))\in\boldsymbol{\Lambda}$ *є точкою спектра оператор-функції* $\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2)$;

(***iv***) *якщо в деякому малому* ε_0*-околі точки* $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},z(\lambda_1^{(0)}))\in\boldsymbol{\Lambda}$ *для всіх* n, *більших від деякого номера* N_0 *(відповідного* ε_0, *згідно з означенням границі послідовності), послідовність частинних похідних* $\left\{\dfrac{\partial\Psi_n}{\partial\lambda_2}(\lambda_{1,n}^0,z(\lambda_{1,n}^0))\right\}$ *є відмінною від нуля, тоді в як завгодно малому* ε_**-околі точки* $(\lambda_1^{(0)},z(\lambda_1^{(0)}))\in\boldsymbol{\Lambda}$ *існує неперервно диференційовна функція* $\lambda_{2,N_*}=\varphi_{N_*}(\lambda_1)$, *яка є розв'язком рівняння* (29), *причому* $\lambda_{2,N_*}^{(0)}=\varphi_{N_*}(\lambda_{1,N_*}^{(0)})$, *і в точці* $(\lambda_{1,N_*}^{(0)},\lambda_{2,N_*}^{(0)})=(\lambda_{1,N_*}^{(0)},\varphi_{N_*}(\lambda_{1,N_*}^{(0)}))$ *як завгодно мало відхиляється від точки спектра допоміжної однопараметричної задачі* (30): $\left|\lambda_{1,N_*}^{(0)}-\lambda_1^{(0)}\right|<\varepsilon_*$, *тобто в деякій біциліндричній області* $\boldsymbol{\Lambda}_0=\{(\lambda_1,\lambda_2)\in\boldsymbol{\Lambda}_0:\left|\lambda_1-\lambda_1^{(0)}\right|<\varepsilon_1,\left|\lambda_2-\lambda_2^{(0)}\right|<\varepsilon_2\}$ *існує зв'язна компонента спектра оператор-функції* $\mathcal{A}_{N_*}(\lambda_1,\lambda_2)$, *де* ε_1, ε_2 *– деякі дійсні константи.*

Д о в е д е н н я теореми ґрунтується на теоремах 1, 2 з [4, с. 68, 69] і теоремі про існування неявної функції (див., наприклад, [14]). Спочатку покажемо, що з умов сформульованої теореми випливають умови теореми 1 [4, с. 68] відносно існування дискретного спектра оператор-функції $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1)$. Оскільки згідно з умовами теореми при кожному $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2)\in\boldsymbol{\Lambda}$ оператор $A(\lambda_1,\lambda_2)$ є фредгольмовим з нульовим індексом, а оператор-функція $\mathcal{A}(\cdot,\cdot):\boldsymbol{\Lambda}\to\mathcal{L}(E,V)$ є голоморфною, то звідси випливає, що при кожному $\lambda_1^{(0)}\in\Lambda_{1,\beta}$ оператор $A_\beta(\lambda_1)$, як звуження оператора $A(\lambda_1,\lambda_2)$, також є фредгольмовим з нульовим індексом, а оператор-функція $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1):\Lambda_{1,\beta}\to\mathcal{L}(E,V)$

є голоморфною. Отже, для $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1):\Lambda_{1,\beta}\to\mathcal{L}(E,V)$ виконуються умови теореми 1 [4, с. 68], з якої випливає, що кожна точка $\lambda_1^{(0)}\in s(\mathcal{A}_\beta)$ є ізольованою, є власним значенням оператора $A_\beta(\lambda_1)$, і їй відповідає скінченновимірний власний підпростір і скінченновимірний кореневий підпростір. Таким чином, кожна точка $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},z(\lambda_1^{(0)}))\in\boldsymbol{\Lambda}$ є точкою спектра оператор-функції $\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2)$.

Крім того, для $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1):\Lambda_{1,\beta}\to\mathcal{L}(E,V)$ виконуються умови теореми 2 [4, с. 69], з якої випливає, що при n, більших від деякого $n_0\in\mathbb{N}$, для кожного $\lambda_1^{(0)}\in s(\mathcal{A}_\beta)$ існує послідовність $\{\lambda_{1,n}^{(0)}\}$, $\lambda_{1,n}^{(0)}\in s(\mathcal{A}_{\beta,n})$, така, що $\lambda_{1,n}^{(0)}\to\lambda_1^{(0)}$ при $n\to\infty$. Отже, кожна точка $(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)})=(\lambda_1^{(0)},z(\lambda_1^{(0)}))$ є власним значенням оператор-функції $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1):\Lambda_{1,\beta}\to\mathcal{L}(E,V)$ і відповідно власним значенням оператор-функції $\mathcal{A}(\cdot,\cdot):\boldsymbol{\Lambda}\to\in\mathcal{L}(E,V)$. Оскільки $\lambda_{1,n}^{(0)}\in s(\mathcal{A}_{\beta,n})$ є коренем рівняння (29), то звідси випливає, що при $n\in\mathbb{N}$

$$\Psi_n(\lambda_{1,n}^{(0)},z(\lambda_{1,n}^{(0)}))\to\Psi_n(\lambda_1^{(0)},z(\lambda_1^{(0)}))=0 \qquad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{32}$$

Із критерію збіжності послідовності $\{\lambda_{1,n}^{(0)}\}$, $\lambda_{1,n}^{(0)}\in s(\mathcal{A}_{\beta,n})$, до $\lambda_1^{(0)}\in s(\mathcal{A}_\beta)$ випливає також, що для як завгодно малого $\varepsilon_*>0$ існує номер $N_*>N_0$ такий, що $\left|\lambda_{1,N_*}^{(0)}-\lambda_1^{(0)}\right|<\varepsilon_*$ і $\Psi_{N_*}(\lambda_{1,N_*}^{(0)},z(\lambda_{1,N_*}^{(0)}))=0$.

Нехай λ_1, λ_2 – незалежні змінні в області $\boldsymbol{\Lambda}$, а $(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)})\in\boldsymbol{\Lambda}$ є точкою спектра оператора $A(\lambda_1,\lambda_2)$, що належить до $s(\mathcal{A}_\beta)\subset s(\mathcal{A})$. Оскільки за умов теореми функція $\Psi(\lambda_1,\lambda_2)$ є диференційовною в околі точки $(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)})$ і $\dfrac{\partial\Psi_{N_*}}{\partial\lambda_2}(\lambda_{1,N_*}^{(0)},z(\lambda_{1,N_*}^{(0)}))\neq 0$, причому точка $(\lambda_{1,N_*}^{(0)},z(\lambda_{1,N_*}^{(0)}))$ належить до ε_*-околу точки $(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)})$, то згідно з теоремою про неявну функцію в деякому околі точки $(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)})$ існує неперервно диференційовна функція $\lambda_2=\varphi_{N_*}(\lambda_1)$, яка є розв'язком рівняння (29), причому $\varphi_n(\lambda_{1,N_*}^{(0)})=$ $=z(\lambda_{1,N_*}^{(0)})$. Звідси випливає існування у деякій біциліндричній області

$$\boldsymbol{\Lambda}_0=\left\{(\lambda_1,\lambda_2)\in\boldsymbol{\Lambda}_0:\left|\lambda_1-\lambda_1^{(0)}\right|<\varepsilon_1,\left|\lambda_2-\lambda_2^{(0)}\right|<\varepsilon_2\right\}$$

зв'язної компоненти спектра оператор-функції $\mathcal{A}_{N_*}(\cdot,\cdot):\boldsymbol{\Lambda}\to\mathcal{L}(E,V)$, яка в точці $(\lambda_{1,N_*}^{(0)},\lambda_{2,N_*}^{(0)})=(\lambda_{1,N_*}^{(0)},\varphi_{N_*}(\lambda_{1,N_*}^{(0)}))$ як завгодно мало відхиляється від точки спектра $\boldsymbol{\lambda}^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},z(\lambda_1^{(0)}))\in\boldsymbol{\Lambda}$ оператор-функції $\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2)$.

Теорему доведено. ♦

Розглянемо рівняння (29), приймаючи, що коефіцієнти матриці-функції $\mathcal{A}_n(\lambda_1,\lambda_2)$ є диференційовними неперервними функціями, тобто частинні похідні $\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_1$ і $\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_2$ існують і є неперервними. Якщо в точках $\{\lambda_{1,\nu}^{(0)},\lambda_{2,\nu}^{(0)}\}\in\Lambda_1\times\Lambda_2$ похідна $\partial\Psi_n/\partial\lambda_2$ відмінна від нуля, тоді, розв'язуючи в околі кожної точки $\lambda_1^{(\nu)}\in\Lambda_1$ задачу Коші [11, 13, 16]

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = -\frac{\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_1}{\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_2}, \tag{33}$$

$$\lambda_2(\lambda_1^{(\nu)}) = \lambda_2^{(\nu)}, \tag{34}$$

знаходимо ν-ту зв'язну компоненту спектра оператор-функції $\mathcal{A}_n(\lambda_1,\lambda_2)$.

***2.2. Знаходження ліній біфуркації – розв'язків рівняння* (22).** Повернемось до знаходження розв'язків рівняння (22), спектральними параметрами в якому є $\lambda_1 = c_1$, $\lambda_2 = c_2$. Нехай $(c_1,c_2) \in \mathbf{\Lambda}_c$, $\mathbf{\Lambda}_c = \Lambda_{c_1} \times \Lambda_{c_2}$, де $\Lambda_{c_i} = \{c_i \in \Lambda_{c_i} : 0 < c_i < r_c\}$. Для побудови чисельних алгоритмів розв'язування рівняння (22) дискретизуємо його, застосовуючи збіжні кубатурні процеси[1]. В результаті дискретизації (зокрема, з використанням кубатурних формул Ґаусса) для знаходження наближених власних значень рівняння (22) отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку

$$x_{in} = A_n(c_1,c_2)\mathbf{x} \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{jn}\mathcal{K}(Q_{in},Q_{jn},c_1,c_2)x_{jn}, \qquad i = 1 \div n, \tag{35}$$

де $Q_{in} = (s_1^{(in)}, s_2^{(in)})$, $Q_{jn} = (s_1^{(jn)}, s_2^{(jn)})$, $\mathbf{x}$ – вектор невідомих, a_{jn} – коефіцієнти кубатурної формули.

Для того щоб система (35) мала відмінні від тотожного нуля розв'язки, необхідно, щоб параметри c_1, c_2 були розв'язками рівняння

$$\Psi_n(c_1,c_2) = \det(A_n(c_1,c_2) - I_n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{36}$$

де I_n – одинична матриця.

Для знаходження розв'язків рівняння (36) застосовуємо метод неявної функції, розв'язуючи чисельно задачу Коші (33), (34), поклавши там $\lambda_1 = c_1$, $\lambda_2 = c_2$. Початкові умови (34) знаходимо, розглядаючи допоміжну нелінійну однопараметричну спектральну задачу на промені, покладаючи в рівнянні (22) $c_2 = \beta c_1$. В результаті дискретизації одержуємо рівняння для знаходження коренів визначника

$$\tilde{\Psi}_n(c_1) = \det(\tilde{A}_n(c_1,\beta c_1) - I_n) = 0, \tag{37}$$

які обчислюємо з використанням відомих методів.

Таким чином, розв'язуючи задачу Коші (33), (34), одержуємо множину точок біфуркації розв'язків рівнянь (20), (21). Оскільки коефіцієнти матриці

---

[1] **Примітка 1.** Відмітимо, що у монографії [5, с. 102] показано, що умови ***1°-5°*** теореми 2 для однопараметричної нелінійної відносно $\lambda \in \mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{C}$ проблеми власних значень

$$(\boldsymbol{i}) \qquad x(t) = \int_D \mathcal{K}(t,s,\lambda)x(s)\,ds \qquad (A(\lambda) := x - T(\lambda)x = 0)$$

та відповідної дискретизованої проблеми

$$(\boldsymbol{ii}) \qquad x_{in}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{jn}\mathcal{K}(s_{in},s_{jn},\lambda)\,x_{jn}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad (A_n(\lambda)x_n := x_n - T(\lambda)x_n = 0)$$

будуть виконані, якщо відповідний квадратурний процес збігається, а ядро інтегрального оператора $\mathcal{K}(t,s,\lambda)$ задовольняє такі умови:

$\mathcal{K}(t,s,\lambda)$ – голоморфне відносно $\lambda \in \mathbf{\Lambda} \subset \mathbb{C}$;

$\mathcal{K}(t,s,\lambda)$ і $\partial\mathcal{K}(t,s,\lambda)/\partial\lambda$ є неперервними відносно $(t,s) \in D \times D$;

$$\max_{t\in D} \int_D \left| \frac{\mathcal{K}(t,s,\lambda+\Delta\lambda) - \mathcal{K}(t,s,\lambda)}{\Delta\lambda} - \frac{\partial\mathcal{K}(t,s,\lambda)}{\partial\lambda} \right| ds \to 0 \qquad \text{при} \qquad \Delta\lambda \to 0.$$

в системі (36) є аналітичними функціями від параметрів c_1, c_2, то розв'язками задачі Коші (33), (34) є гладкі криві, які описують зв'язні компоненти спектра рівняння (22).

2.3. Числовий приклад. Розглянемо числові результати знаходження точок біфуркації заданої рівномірної ДН за потужністю $N_0(s_1, s_2) \equiv 1$. На рис. 1 наведено результати розв'язування допоміжної однопараметричної нелінійної спектральної задачі на променях $c_2 = \beta c_1$ при різних значеннях β шляхом розв'язування рівняння (37). Ці результати використовуються як початкові умови (34) у задачі Коші для знаходження спектральних ліній. Перші спектральні лінії рівняння (22), які складають множину точок біфуркації розв'язків основних рівнянь синтезу, наведено на рис. 2.

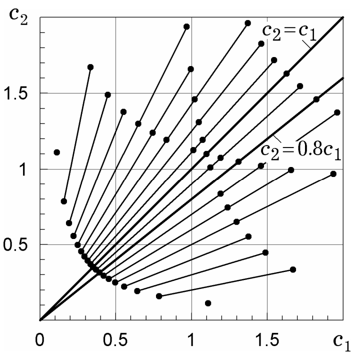


Рис. 1

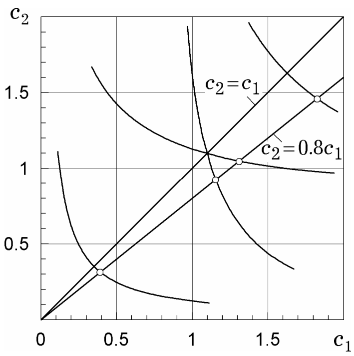
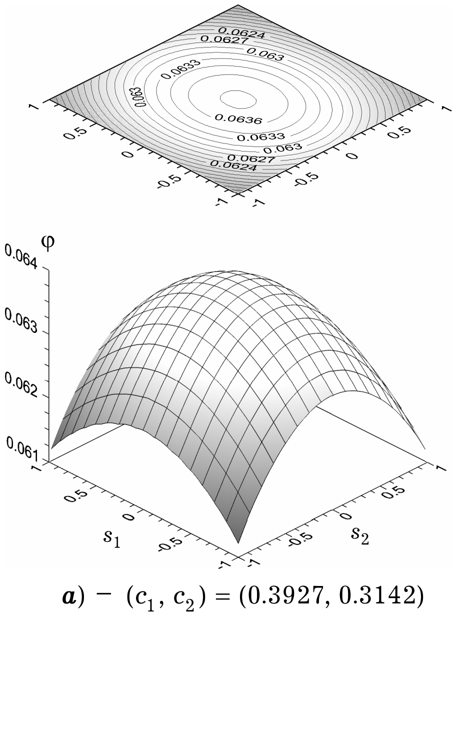
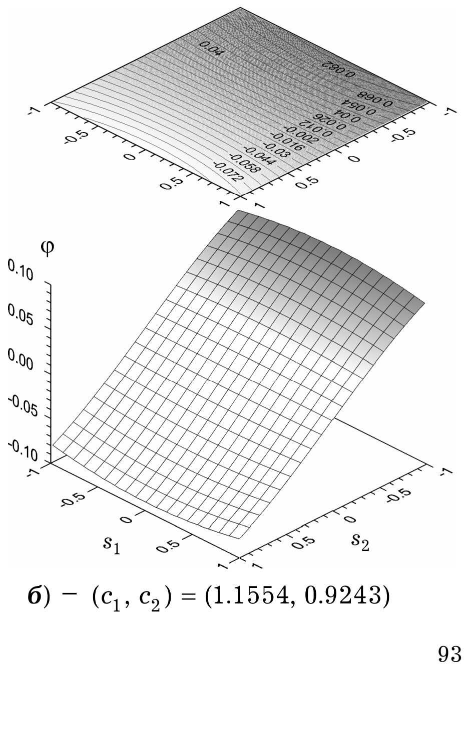


Рис. 2

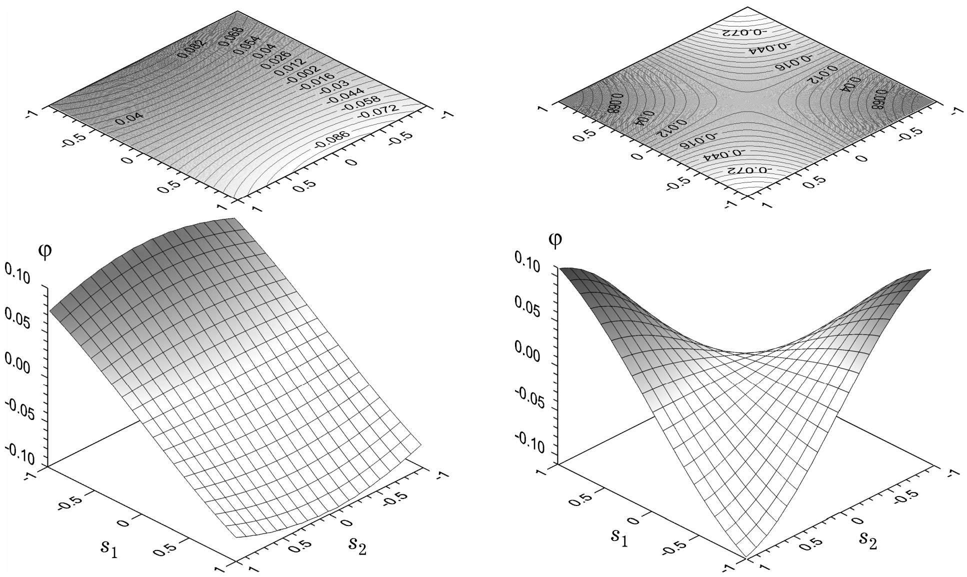
На рис. 3 наведено нормовані (за евклідовою нормою) власні функції рівняння (22), які відповідають першим чотирьом точкам біфуркації, що належать променю $c_2 = 0.8c_1$, при $N_0(s_1, s_2) \equiv 1$. Зазначимо, що власні функції рівняння (22) використовуються (як буде показано у другій частині роботи) при побудові біфуркуючих розв'язків системи нелінійних інтегральних рівнянь (15), (16), що відгалужуються від нульового, й описують у першому наближенні їх властивості. Властивості біфуркуючих розв'язків значною мірою залежать від властивостей симетрії (парності) заданої ДН $N_0(s_1, s_2)$ і властивостей власних функцій.



а) − $(c_1, c_2) = (0.3927, 0.3142)$



б) − $(c_1, c_2) = (1.1554, 0.9243)$



в) − $(c_1, c_2) \simeq (1.3102, 1.0482)$ *г*) − $(c_1, c_2) = (1.8260, 1.4608)$

Рис. 3

Із аналізу рисунків випливає, що власні функції, наведені у різних точках біфуркації, мають різні властивості. Зокрема, власна функція у першій точці біфуркації $(c_1, c_2) = (0.3927, 0.3142)$ є парною за обома аргументами. Власна функція у точці $(c_1, c_2) = (1.1554, 0.9243)$ є парною за s_1 і непарною за s_2. У третій точці $(c_1, c_2) \simeq (1.3102, 1.0482)$, навпаки: власна функція непарна за s_1 і парна за s_2. У точці $(c_1, c_2) = (1.8260, 1.4608)$ власна функція непарна за s_1 і непарна за s_2.

Отже, у кожній з наведених точок біфуркації від нульового розв'язку можуть відгалужуватись ненульові розв'язки з різними властивостями. Для знаходження біфуркуючих розв'язків застосовують методи теорії галуження [3] і чисельні методи, а процес їх знаходження є предметом окремих досліджень.

Висновки. Підсумовуючи сказане, відмітимо, що

− для нелінійних задач синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом за заданими вимогами до ДН за потужністю є характерними неєдиність і біфуркація розв'язків;

− у роботі запропоновано та обґрунтовано алгоритми для знаходження ліній біфуркації та оптимальних розв'язків основних рівнянь синтезу;

− визначення властивостей біфуркуючих розв'язків вимагає додаткових досліджень методами теорії галуження системи нелінійних двовимірних інтегральних рівнянь (15), (16).

1. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. − Москва: Высш. шк., 1999. − 695 с.
2. *Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д.* Синтез излучающих систем. Теория и методы расчета. − Москва: Сов. радио, 1974. − 232 с.
3. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. − Москва: Наука, 1969. − 527 с.
4. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. − Тарту: Тартуск. гос. ун-т, 1976. − 161 с.
   Те саме: *Vainikko G. M.* Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. − Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1976. − 136 p.
5. *Вайникко Г. М., Карма О. О.* О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра // Журн. вычисл. математики и мат. физики. − 1974. − **14**, № 6. − С. 1393−1408.

6. *Зелкин Е. Г., Соколов В. Г.* Методы синтеза антенн: Фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрывом. – Москва: Сов. радио, 1980. – 296 с.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 741 с.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1972. – 496 с.
9. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984. – 296 с.
10. *Процах Л. П., Савенко П. О., Ткач М. Д.* Метод неявної функції розв'язування задачі на власні значення з нелінійним двовимірним спектральним параметром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 3. – С. 41–46.
11. *Савенко П. А., Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
12. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2002. – 320 с.
13. *Савенко П. О., Процах Л. П., Ткач М. Д.* Про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної невід'ємної фінітної неперервної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 53–64.
   Те саме: *Savenko P. O., Protsakh L. P., Tkach M. D.* On the best mean-square approximation of a real nonnegative finite continuous function of two variables by the modulus of a double Fourier integral. I // J. Math. Sci. – 2009. – **160**, No. 3. – P. 343–356.
14. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – Москва: Наука, 1965. – Т. 1. – 450 с.
15. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
16. *Protsakh L. P., Savenko P. O., Tkach M. D.* Structure and localization of solutions of antennas synthesis problems with flat radiating aperture according to the prescribed amplitude directivity pattern // Adv. Appl. Acoustics. – 2012. – **1**, No. 1. – P. 29–47.

**СИНТЕЗ ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ С ПЛОСКИМ РАСКРЫВОМ ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ПО МОЩНОСТИ.
I. НАХОЖДЕНИЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ**

Исследуется задача синтеза излучающей системы с плоским раскрывом по заданной диаграмме направленности по мощности. Рассматривается частичный случай, когда поле в раскрыве является линейно поляризованным. Показано, что для этого класса задач характерны неединственность и бифуркация решений. Задача о нахождении множества точек бифуркации сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Построены численные алгоритмы и приведены числовые примеры нахождения линий бифуркации решений основных уравнений синтеза.

**SYNTHESIS OF RADIATING SYSTEMS WITH FLAT APERTURE ACCORDING TO THE PRESCRIBED DIRECTIVITY PATTERN BY POWER.
I. FINDING THE SET OF BIFURCATION POINTS OF SOLUTIONS**

The synthesis problem of radiating system with a flat aperture according to the prescribed directivity pattern by power is investigated. The special case of linearly polarized field in the aperture is considered. It is shown that nonuniqueness and bifurcation of solutions are characteristic features of this class of problems. The problem on finding the set of bifurcation points is reduced to the Cauchy problem for the first order differential equation. The numerical algorithms are constructed and numerical examples of finding the bifurcation lines of solutions of the basic equations of synthesis are shown.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.12.12