

К ЗАДАЧЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ТРАНСТРОПНОГО СЛОЯ С ПОЛОСТЬЮ

Описан математический аппарат, с помощью которого можно установить некоторые особенности решений трехмерных задач изгиба для низкомодульного транстропного слоя со сквозными дефектами. Эти особенности следуют из анализа спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в результате применения метода однородных решений типа Лурье – Воровича. Исследуется модельная задача изгиба слоя, ослабленного цилиндрической полостью.

Введение. Вызванный необходимостью создания новых материалов с улучшенными прочностными характеристиками интерес к транстропным материалам резко возрос в середине 80-х годов прошлого столетия. За это время теория упругости анизотропного тела значительно шагнула вперед как в теоретическом отношении, так и по части конструирования новых материалов. Анализ методов и результаты исследований напряженно-деформированного состояния пластин из транстропных материалов частично отражены в обзоре [6]. О современном состоянии проблемы можно судить по результатам, представленным в фундаментальной монографии [7], посвященной исследованию напряженного состояния транстропных тел. Из обзора можно сделать вывод, что исследования ведутся в рамках трехмерных и двухмерных моделей. В рамках двухмерных моделей общее признание получили два подхода. В первом подходе [3] построение двухмерной теории основано на обобщении идей уточненной теории Тимошенко – Рейсснера для изгиба изотропных тел. Во втором подходе вывод двухмерных уравнений опирается на построение итерационных процессов [5] типа А. Л. Гольденвейзера. Наличие нескольких вариантов прикладных теорий и фактически полное отсутствие в периодической литературе данных по сравнительному анализу ставят весьма остро вопрос об исследовании трехмерных задач теории упругости строгими математическими методами. Первой из работ в этом направлении для изотропных материалов была работа [1], для транстропных материалов подобная задача не решалась. Кроме того, работ по исследованию концентрации напряжений в трехмерных транстропных телах очень мало. В частности, в [7] рассмотрена одна задача и то со смягченными граничными условиями. В [1] для построения однородных решений использовался полуобратный метод, однако он хорошо работает, если представляется возможным заранее предсказать структуру решения. Поэтому в предлагаемой статье решение строится с использованием спектральной теории. Приводятся процесс построения присоединенных функций с помощью жордановой цепочки и результаты анализа решений статических задач для существенно трехмерных слабо анизотропных тел, подверженных одностороннему изгибу.

Постановка задачи и решение. Рассмотрим равновесие слоя толщины $2H$ из низкомодульного транстропного материала с техническими постоянными: модулями Юнга E , E_z , модулем сдвига G_z и коэффициентами Пуассона ν , ν_z , плоскость изотропии которого параллельна срединной плоскости. Константы b_1 , b_2 , характеризующие такой тип материала, удовлетворяют соотношениям $b_1^2 - b_2 < 0$, $b_1 > 0$ [2]. С использованием технических постоянных им можно придать вид

$$\frac{G/G_z - \nu_z E/E_z}{1 - \nu} > 0, \quad \left(\frac{G/G_z - \nu_z E/E_z}{1 - \nu} \right)^2 - \frac{E}{E_z} \frac{1 - \nu_z^2 E/E_z}{1 - \nu^2} < 0,$$

более удобный для анализа. Слой ослаблен цилиндрической круговой полостью Ω радиуса R , образующие которой перпендикулярны торцам. Плоские грани и боковая поверхность свободны от напряжений, а деформация осуществляется изгибающими усилиями вида $\tilde{p}\tilde{z}$, действующими на бесконечности. Свяжем тело с декартовой системой координат так, чтобы плоскость $\tilde{x}O\tilde{y}$ лежала в срединной плоскости, а ось $O\tilde{x}$ была параллельна изгибающим усилиям, начало координат поместим в центре полости. Изложение проводим в безразмерных координатах $x = \tilde{x}/R$, $y = \tilde{y}/R$, $z = \tilde{z}/hR$ и характеристиках НДС $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r})/R$, $\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{r})/2G$, $i, j = x, y, z$, где $h = H/R$ – относительная толщина, $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$, $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $G = E/(2(1+\nu))$ – модуль сдвига в плоскости изотропии. Также используем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , полюс которой помещен в геометрический центр полости.

Данная задача в безразмерных величинах описывается уравнениями равновесия в перемещениях для транслопных материалов [2] и граничными условиями

$$\sigma_{xz}^*(x, y, \pm 1) = \sigma_{yz}^*(x, y, \pm 1) = \sigma_{zz}^*(x, y, \pm 1) = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}^* = \sigma_{r\theta}^* = \sigma_{rz}^* = 0 \quad \text{при} \quad r = 1,$$

$$\sigma_{xx} = pz, \quad \sigma_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq x \quad \text{и} \quad j \neq x \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Напряженное состояние сплошной плиты с нагрузкой, определяемой условиями (1), (2), таково:

$$\sigma_{rr}^0 + i\sigma_{r\theta}^0 = \frac{1}{2}pz(1 + \sigma^{-2}), \quad \sigma_{\theta\theta}^0 + \sigma_{rr}^0 = pz,$$

$$\sigma_{rz}^0 = \sigma_{\theta z}^0 = \sigma_{zz}^0 = 0, \quad \sigma = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Чтобы освободить боковую поверхность от напряжений, необходимо добавить напряжения σ_{ij} , возникающие в плите с полостью, у которой на торцах и на бесконечности напряжения отсутствуют, а на боковой поверхности выполняются условия

$$\sigma_{rr}|_{r=1} + i\sigma_{r\theta}|_{r=1} = -\frac{1}{2}pz(1 + \sigma^{-2}), \quad \sigma_{rz}|_{r=1} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, искомые напряжения σ_{ij}^* представимы в виде

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}.$$

Что касается вспомогательной краевой задачи (уравнений равновесия с нулевыми условиями на торцах (1)), то решение ее в соответствии с методикой, использованной Устиновым в [4], представляется в виде

$$\begin{aligned} u &= p(z) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + n(z) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}, \\ v &= -p(z) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + n(z) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}, \\ w &= q(z) \Psi(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

основанном на плоском варианте теоремы Гельмгольца о разложении произвольного векторного поля на вихревую и потенциальную части. Часть представления (4), содержащую функции $n(z)$, $q(z)$, называют потенциальным, а $p(z)$ – вихревым решениями (состояниями). В дальнейшем для сокращения записи, если это не приводит к разночтению, параметры у

этих функций не указываются. Здесь $p(z)$, $n(z)$, $q(z)$, $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ – произвольные дифференцируемые функции. При этом функции Φ и Ψ удовлетворяют метагармоническим уравнениям

$$D^2\Phi(x, y) = \left(\frac{\delta}{h}\right)^2 \Phi(x, y), \quad D^2\Psi(x, y) = \left(\frac{\gamma}{h}\right)^2 \Psi(x, y), \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (5)$$

а постоянные δ , γ и функции $n(z)$, $q(z)$, $p(z)$ определяются из спектральных задач

$$\begin{cases} n''(z) + (1 + \mu_1)\gamma^2 s_0^2 n(z) + h\mu_3 s_0^2 q'(z) = 0, \\ q''(z) + \frac{\gamma^2}{\mu_2 s_0^2} q(z) + \frac{\gamma^2 \mu_3}{h\mu_2} n'(z) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} q'(\pm 1) + \frac{\gamma^2 v_2}{h(1-v)} n(\pm 1) = 0, \\ n'(\pm 1) + hq(\pm 1) = 0, \end{cases} \quad (6')$$

$$\begin{cases} p''(z) + \delta^2 s_0^2 p(z) = 0, \\ p'(\pm 1) = 0. \end{cases} \quad (6'')$$

Решения этих задач позволяют определить δ и γ как корни следующих уравнений:

$$F_1(\gamma) = \beta \sin 2\alpha\gamma - \alpha \operatorname{sh} 2\beta\gamma = 0 \quad (7')$$

и

$$F_2(\delta) = \delta s_0 \cos \delta s_0 = 0. \quad (7'')$$

При $\gamma_p \neq 0$ функции $n(z)$, $q(z)$, $p(z)$ имеют вид

$$n_p(z, \bar{v}^*) = \sin \gamma_p s_2 \sin \gamma_p s_1 z - s_3 \sin \gamma_p s_1 \sin \gamma_p s_2 z,$$

$$q_p(z, \bar{v}^*) = -S_{1p} \sin \gamma_p s_2 \cos \gamma_p s_1 z + s_3 S_{2p} \sin \gamma_p s_1 \cos \gamma_p s_2 z,$$

$$p_k(z) = \frac{2}{\delta_k} \sin \delta_k s_0 z, \quad \bar{v}^* \in \{v_2, v_z, s_0\},$$

$$s_1 := s_1(\bar{v}^*), \quad s_2 := s_2(\bar{v}^*), \quad v_2 = v_z E/E_z, \quad s_0^2 = G/G_z.$$

В приведенных выше формулах осталось нерассмотренным собственное значение $\gamma_0 = 0$, которое является трехкратным корнем трансцендентного уравнения (7'). Это указывает на существование еще и других решений, поэтому необходимо строить систему присоединенных функций. Эти функции определяются в результате построения жордановой цепочки, состоящей из нескольких этапов. На первом этапе строится решение I-го порядка:

$$u_0(\mathbf{r}) = n_0(z) \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial x}, \quad v_0(\mathbf{r}) = n_0(z) \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial y},$$

$$w_0(\mathbf{r}) = q_0(z) \Psi_0(x, y).$$

Тогда спектральная задача (6') примет вид

$$\begin{cases} n''(z) + a_2 q'(z) = 0, \\ q'(\pm 1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} q''(z) = 0, \\ n'(\pm 1) + hq(\pm 1) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

а функция Ψ_0 , согласно (5), будет гармонической. Если ввести в рассмотрение бигармоническую функцию F , то искомая функция Ψ_0 представится в виде $\Psi_0 = D^2 F$. Решение спектральной задачи (8):

$$q_0(z) = B_0, \quad n_0(z) = -hB_0z$$

позволяет представить окончательный вид решения I-го порядка:

$$u_0(\mathbf{r}) = -hB_1z \frac{\partial D^2F}{\partial x}, \quad v_0(\mathbf{r}) = -hB_1z \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial y}, \quad w_0(\mathbf{r}) = B_1D^2F.$$

Далее строится решение II-го порядка в виде

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{r}) &= n_0(z) \frac{\partial \Psi_1(x, y)}{\partial x} + n_1(z) \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial x}, \\ v_1(\mathbf{r}) &= n_0(z) \frac{\partial \Psi_1(x, y)}{\partial y} + n_1(z) \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial y}, \\ w_1(\mathbf{r}) &= q_0(z) \Psi_1(x, y) + q_1(z) \Psi_0(x, y). \end{aligned}$$

Неизвестные функции $n_1(z)$, $q_1(z)$, $\Psi_1(x, y)$ определяются из граничной задачи

$$\begin{cases} n_1''(z) + h\mu_3 s_0^2 q_1'(z) = -(1 + \mu_1) s_0^2 n_0(z), \\ q_1''(z) = -\frac{1}{\mu_2 s_0^2} q_0(z) - \frac{\mu_3}{h\mu_2} n_0'(z), \end{cases} \quad \begin{cases} q_1'(\pm 1) = -\frac{v_2}{h(1-v)} n_0(\pm 1), \\ n_1'(\pm 1) + hq_1(\pm 1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

и уравнения

$$D^2\Psi_1 = \frac{\Psi_0}{h^2},$$

общее решение которого имеет вид

$$\Psi_1 = \Phi_0 + \frac{\Psi_0}{h^2}.$$

Здесь Φ_0 – произвольная гармоническая функция, а решением задачи (9) являются функции

$$q_1(z) = \tilde{B}_0 + \mu_5 v_2 B_0 z^2, \quad n_1(z) = (-h\tilde{B}_0 - 2s_0^2 \mu_5 h B_0)z + hB_0 \mu_4 z^3.$$

Таким образом, окончательно решение II-го порядка записывается так:

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{r}) &= -hB_0z \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial x} - \frac{B_0z}{h} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + [hB_0z(\mu_4 z^2 - \\ &\quad - 2s_0^2 \mu_5) - h\tilde{B}_0z] \frac{\partial D^2F(x, y)}{\partial x}, \\ v_1(\mathbf{r}) &= -hB_0z \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial y} - \frac{B_0z}{h} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + [hB_0z(\mu_4 z^2 - \\ &\quad - 2s_0^2 \mu_5) - h\tilde{B}_0z] \frac{\partial D^2F(x, y)}{\partial y}, \\ w_1(\mathbf{r}) &= B_0\Phi_0(x, y) + \frac{B_0}{h^2} F(x, y) + (\tilde{B}_0 + \mu_5 v_2 B_0 z^2) D^2F(x, y). \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда видно, что решение I-го порядка является частным случаем решения II-го порядка, поэтому может быть включено в него.

Продолжая построение, по аналогии, решение III-го порядка ищем в виде

$$\begin{aligned} u_2(\mathbf{r}) &= n_0(z) \frac{\partial \Psi_2(x, y)}{\partial x} + n_1(z) \frac{\partial \Psi_1(x, y)}{\partial x} + n_2(z) \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial x}, \\ v_2(\mathbf{r}) &= n_0(z) \frac{\partial \Psi_2(x, y)}{\partial y} + n_1(z) \frac{\partial \Psi_1(x, y)}{\partial y} + n_2(z) \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial y}, \\ w_2(\mathbf{r}) &= q_0(z) \Psi_2(x, y) + q_1(z) \Psi_1(x, y) + q_2(z) \Psi_0(x, y). \end{aligned}$$

И в этом случае имеем аналогичную граничную задачу для определения функций n_2 и q_2 :

$$\begin{cases} n_2''(z) + h\mu_3 s_0^2 q_2'(z) = -(1 + \mu_1) s_0^2 n_1(z), \\ q_2''(z) = -\frac{1}{\mu_2 s_0^2} q_1(z) - \frac{\mu_3}{h\mu_2} n_1'(z), \end{cases} \quad \begin{cases} q_2'(\pm 1) = -\frac{v_2}{h(1-v)} n_1(\pm 1), \\ n_2'(\pm 1) + hq_2(\pm 1) = 0, \end{cases}$$

и уравнение для определения функции Ψ_2 :

$$D^2\Psi_2 = \frac{\Psi_1}{h^2}.$$

Решение граничной задачи полностью совпадает с решением II-го порядка. Это означает, что процесс построения цепочки закончен.

Если в (10) положить $B_0 = -h$, $\tilde{B}_0 = 2s_0^2 h\mu_5$ и $\Phi_0(x, y) = 0$, то получим представление решения в виде бигармонического решения [2]

$$\begin{aligned} u_b(x, y, z) &= \partial_1[zF - z^3 h^2 \mu_4 D^2 F], & v_b(x, y, z) &= \partial_2[zF - z^3 h^2 \mu_4 D^2 F], \\ w_b &= -\frac{F}{h} - h\mu_5(v_2 z^2 - 2s_0^2)D^2 F, & \mu_4 &= \frac{2s_0^2 - v_2}{6(1-v)}, & \mu_5 &= \frac{1}{2(1-v)}. \end{aligned}$$

Итак, решение представляется в виде совокупности потенциального, вихревого и бигармонического состояний, имеющих различную спектральную природу.

Из закона Гука с использованием представления перемещений (4) получаем следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= 2\mu_5 D^2 F - L_{10} F - z^3 h^2 \mu_4 L_9^* F + \sum_1^{\infty} p_k(z) L_8 \Phi_k + \\ &+ \sum_1^{\infty} [s_p(z) L_0 + n_p(z) L_9] \Psi_p, \\ \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= (\mu_6 + \mu_7) D^2 F + \sum_1^{\infty} e_p(z) L_0 \Psi_p, & \sigma_{zz} &= \sum_1^{\infty} t_p(z) L_0 \Psi_p, \\ \sigma_{rz} + i\sigma_{\theta z} &= h\mu_5(1 - z^2) L_7^* F + i \sum_1^{\infty} g_k(z) L_7 \Phi_k + \sum_1^{\infty} r_p(z) L_7 \Psi_p. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь обозначения частично совпадают с [2].

Переходя к решению сформулированной задачи, отметим, что бигармоническую функцию F проще всего найти, используя формулу Гурса

$$F(\zeta, \bar{\zeta}) = \text{Re}[\bar{\zeta}\varphi(\zeta) + \chi(\zeta)], \quad \zeta = x + iy.$$

Поскольку задача геометрически и физически симметрична относительно плоскостей xOz и yOz , то комплексные потенциалы $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta) = \chi'(\zeta)$ и метагармонические функции Φ , Ψ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{-n}, & \psi(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n}, & a_n &= \bar{a}_n, & b_n &= \bar{b}_n, \\ \Psi_p(r, \theta) &= c_{2p}^* K_2(\gamma_p^* r) \cos 2\theta, & c_{2p}^* &= \frac{c_{2p}}{K_2(\gamma_p^*)}, \\ \Phi_k(r, \theta) &= b_{2k}^* K_2(\delta_k^* r) \sin 2\theta, & b_{2k}^* &= \frac{b_{2k}}{K_2(\delta_k^*)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Произвольные постоянные a_n , b_n , c_{2p} , b_{2k} , входящие в (12), находятся из функциональной системы

$$\begin{aligned}
 & -(4a_1\mu_7 + 3b_3)z + 24h^2\mu_4z^3a_1 + \sum_1^\infty p_k M_2^-(\delta_k^*)b_{2k} + \\
 & + \sum_1^\infty [\ell_p + n_p N_2^-(\gamma_p^*)]c_{2p} = -\frac{p}{2}z, \\
 & (2a_1 - 3b_3)z + 24h^2\mu_4z^3a_1 + \sum_1^\infty p_k \left(\frac{1}{2}\delta_k^{*2} + N_2^-(\delta_k^*) \right) b_{2k} - \\
 & - \sum_1^\infty n_p M_2^-(\gamma_p^*)c_{2p} = \frac{p}{2}z, \\
 & 8a_1\mu_5(1-z^2)h - 2\sum_1^\infty g_k b_{2k} + \sum_1^\infty r_p P_2^-(\gamma_p^*)c_{2p} = 0, \quad b_1 = \frac{p}{2},
 \end{aligned}$$

в результате подстановки напряжений (11) в граничные условия (3).

Разложение выражений в левой и правой частях данной системы в ряды Фурье и приравнивание выражений при одинаковых тригонометрических функциях позволяет получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения указанных коэффициентов.

Результаты численных исследований. Технические постоянные материалов [7, 8], для которых выполнены вычисления, и их безразмерные аналоги ν , ν_z , ν_2 , s_0^2 помещены в табл. 1.

Таблица 1

Материал	E , ГПа	E_z , ГПа	G , ГПа	G_z , ГПа	ν	ν_z	ν_2	s_0^2
Бериллий	2.960	3.41	1.357	1.66	0.091	0.034	0.030	0.817
Селенид индия	47.917	18	23	12	0.042	0.3	0.799	1.917
Кадмий	0.771	0.214	0.366	0.18	0.0543	0.2617	0.943	2.031

На рис. 1 и рис. 2 приведены эпюры распределения напряжений $\sigma_{\theta\theta}/p$ и σ_{zz}/p по толщине z на полости при $\theta = \pi/2$ для пластин из бериллия (рис. 1а, рис. 1б) и для пластины из InSe (II) – селенида индия (рис. 2а, рис. 2б). Кривые соответствуют значениям относительных толщин пластины $h = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$.

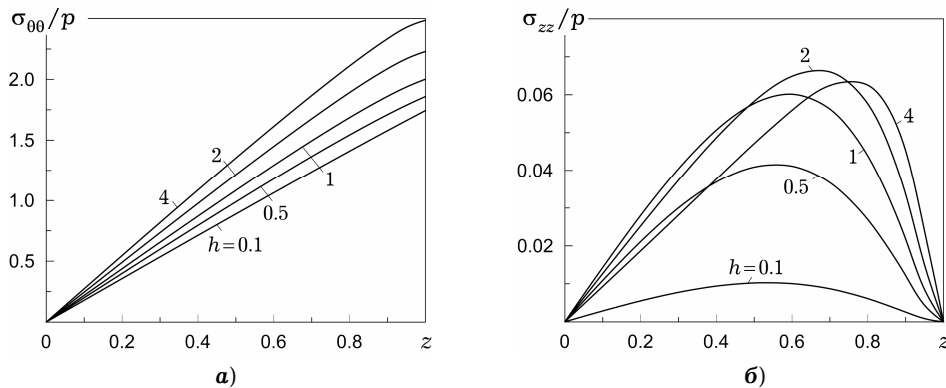


Рис. 1

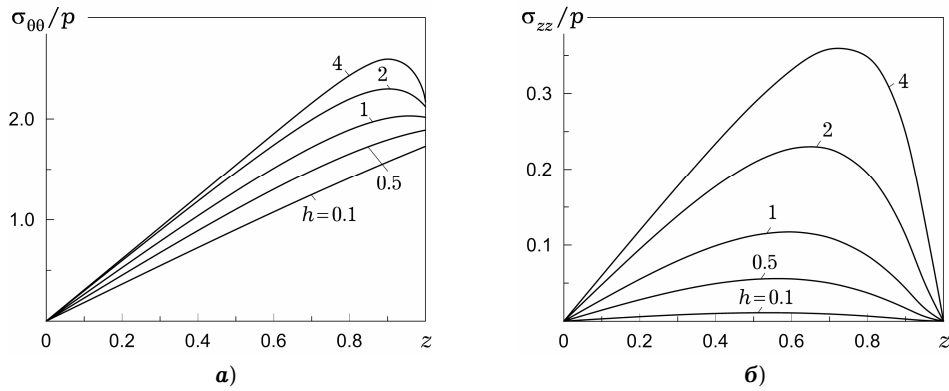


Рис. 2

Как видно, напряжения $\sigma_{\theta\theta}/p$ в материале из бериллия для всех h имеют максимум на верхней границе полости, а для материала из InSe после некоторого значения h максимум напряжений перемещается вглубь материала (в районе $z = 0.9$). Распределение напряжений в пластинах из материалов, у которых коэффициент Пуассона ν_z мал, аналогично тому, что имеет место в случае пластин из бериллия. Для других материалов характерны графики, изображенные на рис. 2.

Также наблюдается различие в поведении напряжений σ_{zz}/p для материалов с малыми и большими ν_z . С ростом h при больших ν_z скорость роста напряжений при малых z постоянно увеличивается, в то время как для малых ν_z после некоторого значения относительной толщины скорость роста начинает уменьшаться. В обоих случаях с ростом h максимум напряжений смещается к торцам плиты.

В табл. 2 приведены значения окружных и продольных напряжений на боковой поверхности при $\theta = \pi/2$ в пластине из кадмия.

Таблица 2

		$\sigma_{\theta\theta}/p$						σ_{zz}/p							
$h \backslash z$		0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	1
0.1		0.37	0.73	1.08	1.42	1.58	1.66	1.74	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
0.5		0.46	0.90	1.32	1.67	1.80	1.86	1.90	0.03	0.05	0.05	0.03	0.02	0.01	0.00
1		0.54	1.06	1.53	1.91	2.02	2.04	2.01	0.05	0.09	0.11	0.08	0.04	0.02	0.00
2		0.60	1.20	1.76	2.22	2.32	2.27	2.10	0.09	0.16	0.21	0.19	0.11	0.05	0.00
4		0.61	1.23	1.86	2.45	2.61	2.54	2.15	0.11	0.21	0.30	0.32	0.23	0.13	0.00

Точность решения контролировалась проверкой граничных условий на поверхности полости. При расчетах максимальные отклонения напряжения σ_{rr} от нуля не превосходили 10^{-4} , а отклонения σ_{rz} составляли по порядку 10^{-7} (при этом для малых h в системе сохранялось 50 неизвестных, для больших h система была гораздо больше, например, при $h = 4$ оставались 400 неизвестных). При $\nu_z \rightarrow \nu$, $G_z \rightarrow G$, $E_z \rightarrow E$ получается решение для изотропной плиты [1]. В табл. 3 приведены значения окружных и продольных напряжений на боковой поверхности при $\theta = \pi/2$ в пластине с упругими постоянными, полученными из упругих постоянных кадмия путем вышеуказанного предельного перехода.

Таблица 3

		$\sigma_{\theta\theta}/p$						σ_{zz}/p							
$h \backslash z$		0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	1
0.1		0.35	0.71	1.06	1.40	1.56	1.64	1.72	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
0.5		0.41	0.81	1.20	1.56	1.73	1.80	1.87	0.02	0.04	0.04	0.03	0.01	0.00	0.00
1		0.45	0.90	1.33	1.73	1.91	1.98	2.04	0.03	0.05	0.06	0.04	0.02	0.01	0.00
2		0.51	1.01	1.50	1.96	2.16	2.24	2.29	0.02	0.05	0.06	0.06	0.03	0.02	0.00
4		0.56	1.12	1.66	2.17	2.40	2.49	2.54	0.02	0.04	0.06	0.07	0.05	0.03	0.00

Сравнение данных табл. 2 и табл. 3 позволяет проследить влияние анизотропии.

Поскольку двухмерные теории плоского, обобщенного плоского напряженного состояния и плоской деформации в случае трансстропных материалов не строятся, то обобщение теории Тимошенко – Рейсснера, осуществленное Б. Л. Пелехом [3] и его учениками вполне оправдано, поскольку в результате корректно формулируется двухмерная теория, т.е. порядок системы, полученной по этой теории, соответствует имеющим место трем граничным условиям в случае изгиба. Что касается получения количественных результатов, то их можно использовать как начальное приближение для тонких трансстропных плит, т.е. в тех узких рамках изменения толщины (при этом σ_{zz} мало по сравнению с другими напряжениями), которые изначально и закладывались при построении теории. Также нужно иметь в виду, что влияние технических постоянных E_z и ν_z никак не учитывается. Что касается физической теории, предложенной И. Ю. Хомой [5], то в строящийся им итерационный процесс входят все параметры материала.

В табл. 4 приведены отношения максимальных напряжений по толщине при различных значениях радиусов и относительных толщин.

Таблица 4

		$\sigma_{zz}/\sigma_{\theta z}$	σ_{zz}/σ_{rz}	$\sigma_{zz}/\sigma_{\theta z}$	σ_{zz}/σ_{rz}	$\sigma_{zz}/\sigma_{\theta z}$	σ_{zz}/σ_{rz}	$\sigma_{zz}/\sigma_{\theta z}$	σ_{zz}/σ_{rz}
$h \backslash r$		0.1	0.1	0.5	0.5	1	1	2	2
1		0.03	–	0.20	–	0.51	–	0.94	–
1.2		0.03	0.00	0.02	0.03	0.36	0.48	0.91	2.27
1.4		0.00	0.00	0.15	0.05	0.18	0.09	0.85	0.92
1.6		0.00	0.00	0.37	0.03	0.23	0.04	0.79	0.47

Отсюда видно, что пренебрегать напряжениями σ_{zz} нельзя уже при $h = 0.5$.

Выводы. Однородные решения типа Лурье – Воровича получены путем применения спектральной теории операторов. Появление бигармонического решения при этом обязано наличию кратного нулевого собственного значения. Существует качественное различие в поведении материалов с малыми и большими коэффициентами Пуассона ν_z : в первом случае окружные напряжения достигают максимума на торцах пластины, во втором же случае при больших h максимумы этих компонент смещаются несколько вглубь пластины; максимумы продольных напряжений при увеличении h в обоих случаях смещаются к торцам. Допущения прикладной теории обоснованы при небольших относительных толщинах $h \leq 0.5$, после чего считать напряжения σ_{zz} малыми уже нельзя.

1. *Космодамианский А. С., Шалдырван Г. Г.* Изгиб толстой плиты, ослабленной полостью // Прикл. механика. – 1974. – **10**, № 5. – С. 27–32.
То же: *Kosmodamianskii A. S., Shaldyrvan G. G.* Bending of a thick plate weakened by a cavity // Int. Appl. Mech. – 1974. – **10**, No. 5. – P. 476–480.
2. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с.
3. *Пелех Б. Л.* Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. – Киев: Наук. думка, 1977. – 182 с.
4. *Устинов Ю. А.* Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов-на-Дону: ООО «ЦВВР», 2006. – 257 с.
5. *Хома И. Ю.* Об интегрировании системы уравнений упругого равновесия неоднородных по толщине трансверсально-изотропных пластин // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 11. – С. 100–109.
То же: *Khoma I. Yu.* Integration of the equilibrium equations for inhomogeneous, transversely isotropic plates // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 11. – P. 1371–1380.
6. *Шалдырван В. А.* Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин (обзор) // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 45–69.
То же: *Shaldyrvan V. A.* Some results and problems in the three-dimensional theory of plates (Review) // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 2. – P. 160–181.
7. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of transversely isotropic materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – xii+435 p.
8. *Huntington H. B.* The elastic constants of crystals // In: Solid State Physics / Eds. F. Seitz, D. Turnbull. – New York: Acad. Press, 1958. – Vol. 7. – P. 213–351.

ДО ЗАДАЧІ ЦИЛІНДРИЧНОГО ЗГИНУ ТРАНСТРОПНОГО ШАРУ З ПОРОЖНИНОЮ

Описано математичний апарат, за допомогою якого можна встановити деякі особливості розв'язків тривимірних задач згину для низькомодульного транс-тропного шару з наскрізними дефектами. Ці особливості впливають з аналізу спектральних задач для звичайних диференціальних рівнянь, що виникають внаслідок застосування методу однорідних розв'язків типу Лур'є – Воровича. Досліджується модельна задача згину для шару, послабленого циліндричною порожниною.

TO THE PROBLEM OF CYLINDRICAL BENDING OF TRANSTROPIC LAYER WITH CAVITY

A mathematical apparatus to determine some particularities of solutions of three-dimensional problems of bending of a low modulus transtropic layer with through defects is described. These particularities come from analysis of spectral problems for ordinary differential equations resulting from the application of the method of homogeneous solutions of Lurie–Vorovich type. The model problem for layer weakened by cylindrical cavity is investigated.

Донецк. нац. ун-т, Донецк

Получено
30.10.12