УДК 517.98

М. І. Дмитришин

# ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ АПРОКСИМАЦІЙНИХ ПРОСТОРІВ, АСОЦІЙОВАНИХ ІЗ РЕГУЛЯРНИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

*Доведено інтерполяційну теорему для тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з регулярними еліптичними операторами, та показано її застосування до проблеми апроксимацій елементів тензорних добутків $L_p$-просторів.*

**Вступ.** Проблемам наближення елементів банахового простору різними класами гладких векторів замкнених операторів присвячено праці [1, 2, 4, 5, 7]. У праці [3] наведено застосування до згаданих проблем апроксимаційних просторів, асоційованих із замкненими операторами у банахових просторах. У контексті застосування різних апроксимаційних класів функцій слід відзначити праці [8, 9].

У цій статті показано, що тензорний добуток апроксимаційних просторів, асоційованих із регулярними еліптичними операторами, є проміжним інтерполяційним простором між тензорними добутками просторів $L_p(\Omega)$ і цілих функцій експоненціального типу, звуження яких на обмежену область $\Omega$ належить простору $L_p(\Omega)$. Встановлено нерівності, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку просторів $L_p(\Omega)$ до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів цілих функцій експоненціального типу.

**Означення і попередні відомості.** На просторах $\{L_{p_j}(\Omega)\}_{j=1}^J$, $1 < p_j < \infty$, комплексних сумовних функцій в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з границею $\partial\Omega$ класу $C^\infty$ розглянемо регулярно еліптичні оператори (див. означення 5.2.1/4 з [10])

$$(A_j f)(x) = \sum_{|s_j| \le 2m} a_{s_j} D^{s_j} f(x), \qquad a_{s_j} \in \mathbb{C},$$

$$D(A_j) = \left\{ f \in W_{p_j}^{2m}(\Omega) : B_{ji} f \big|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\dots,J,\ i = 1,\dots,m \right\},$$

де $W_{p_j}^{2m}(\Omega)$ – простір Соболєва; $(B_{ji} f)(x) = \sum\limits_{|s_j| \le m_j} b_{i,s_j}(x) D^{s_j} f(x)$ – набір граничних операторів; $b_{i,s_j}(x) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $j = 1,\dots,m$; $D^{s_j} f(x) = \dfrac{\partial^{|s_j|} f}{\partial x_1^{s_{j1}} \dots \partial x_n^{s_{jn}}}$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$ і $|s_j| = s_{j1} + \dots + s_{jn}$ для всіх $s_j = (s_{j1},\dots,s_{jn}) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Нехай $\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega) = L_{p_1}(\Omega) \otimes \dots \otimes L_{p_J}(\Omega)$ – тензорний добуток, на якому задаємо проективну норму

$$\|w\|_{\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)} = \inf_{w = \sum_n \otimes_j^J f_n^j} \sum_{n=1}^N \left\| f_n^1 \right\|_{L_{p_1}(\Omega)} \cdot \ldots \cdot \left\| f_n^J \right\|_{L_{p_J}(\Omega)},$$

де inf береться по всіх зображеннях елемента $w \in \otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)$ у вигляді суми $w = \sum\limits_{n=1}^N \otimes_j^J f_n^j$ зі скінченним $N$, $f_n^j \in L_{p_j}(\Omega)$ і $\otimes_j^J f_n^j = f_n^1 \otimes \dots \otimes f_n^J \in$

$\in \otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)$. Поповнення простору $\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega)$.

Для будь-яких чисел $\nu_j > 0$, $1 < p_j < \infty$ означимо банахові простори цілих векторів експоненціального типу оператора $A_j$:

$$E_{p_j}^{\nu_j}(A_j) = \left\{ f \in D(A_j) : \|f\|_{E_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \nu_j^{-kp_j} \left\| A_j^k f \right\|_{L_{p_j}(\Omega)}^{p_j} \right)^{1/p_j} < \infty \right\}.$$

Означимо об'єднання $E_{p_j}(A_j) = \bigcup_{\nu_j > 0} E_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, на якому задамо квазінорму

$$|f|_{E_{p_j}(A_j)} = \|f\|_{L_{p_j}(\Omega)} + \inf\left\{\nu_j > 0 : f \in E_{p_j}^{\nu_j}(A_j)\right\}$$

і тензорний добуток $\otimes_j^J E_{p_j}(A_j)$ з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j^J E_{p_j}(A_j)} = \inf_{w = \sum_n \otimes_j^J f_n^j} \sum_{n=1}^N \left| f_n^1 \right|_{E_{p_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \left| f_n^J \right|_{E_{p_J}(A_J)}.$$

Поповнення простору $\otimes_j^J E_{p_j}(A_j)$ у цій нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j)$.

Використовуючи позначення праці [10], для пари квазінормованих просторів $(X, |\cdot|_X)$, $(Y, |\cdot|_Y)$ і чисел $0 < q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 < t < \infty$ означимо інтерполяційний простір $(X,Y)_{\theta,q} = \{a \in X + Y : |a|_{(X,Y)_{\theta,q}} < \infty\}$ з квазінормою

$$|a|_{(X,Y)_{\theta,q}} = \begin{cases} \left( \int_0^\infty [t^{-\theta} K(t,a;X,Y)]^q \dfrac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t,a;X,Y), & q = \infty, \end{cases}$$

де $K(t,a;X,Y) = \inf_{a=x+y} (|x|_X + t|y|_Y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Для чисел $0 < \alpha < \infty$ і $0 < \tau_j \le \infty$ означимо апроксимаційні простори

$$\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j) = \{ f \in L_{p_j}(\Omega) : |f|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)} < \infty \}$$

з квазінормою

$$|f|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)} = \begin{cases} \left( \int_0^\infty [t^{\alpha} E_{p_j}(t,f)]^{\tau_j} \dfrac{dt}{t} \right)^{1/\tau_j}, & 0 < \tau_j < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\alpha} E_{p_j}(t,f), & \tau_j = \infty, \end{cases}$$

де

$$E_{p_j}(t,f) = \inf\left\{ \|f - g\|_{L_{p_j}(\Omega)} : |g|_{E_{p_j}(A_j)} \le t \right\}, \quad g \in E_{p_j}(A_j), \quad f \in L_{p_j}(\Omega).$$

Нехай $0 < \theta < 1$ і $[\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}$ – простір $\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)$, наділений квазінормою $|f|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)}^{\theta}$; $\otimes_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}$ – тензорний добуток з проективною квазінормою

$$|w|_{\otimes_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}} = \inf_{w = \sum_n \otimes_j^J f_n^j} \sum_{n=1}^N \left| f_n^1 \right|_{\mathcal{B}_{p_1,\tau_1}^{\alpha}(A_1)}^{\theta} \cdot \ldots \cdot \left| f_n^J \right|_{\mathcal{B}_{p_J,\tau_J}^{\alpha}(A_J)}^{\theta}.$$

Поповнення простору $\otimes_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}$ у цій нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^{\alpha}(A_j)]^{\theta}$.

Означимо також простір

$$B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)=\left\{f\in B^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(\Omega): B_{ji}A_j^k f\big|_{\partial\Omega}=0,\ j=1,\dots,m,\ k\in\mathbb{Z}_+\right\},$$

де $B^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(\Omega)$ – класичний простір Бєсова.

**Основні результати.**

**Теорема 1.** *Нехай* $1<p_j<\infty$, $1\le q,\ q_j,\tau_j\le\infty$, $0<\theta<1$. *Тоді при* $\tau_j=\theta q_j$, $\theta=\dfrac{1}{\alpha+1}$ *і* $\dfrac{1}{q-1}=\sum\limits_{j=1}^{J}\left(\dfrac{1}{q_j-1}\right)$ *виконується такий ізоморфізм просторів*:

$$(\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}=\tilde{\otimes}_j^J[\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{\theta}. \qquad (1)$$

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 7.1.7 з [6] при $\tau_j=\theta q_j$ і $\theta=1/(\alpha+1)$ виконується ізоморфізм просторів:

$$[\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}=(E_{p_j}(A_j),L_{p_j}(\Omega))_{\theta,qj},$$

$$|f|^{\theta}_{\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)}\approx|f|_{(E_{p_j}(A_j),L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q_j}}. \qquad (2)$$

Покажемо, що

$$(\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}=\tilde{\otimes}_j^J(E_{p_j}(A_j),L_{p_j}(\Omega))_{\theta,qj}. \qquad (3)$$

Дійсно, при $\tau^J=t$ отримуємо таку оцінку:

$$K(t,w;\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))=\inf_{w=u+v}\left(|u|_{\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j)}+t|v|_{\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega)}\right)\le$$

$$\le\inf_{\sum_n\otimes_j^J f_n^j=\sum_n\otimes_j^J u_n^j+\sum_n\otimes_j^J v_n^j}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|u_n^1\right|_{E_{p_1}(A_1)}\cdot\ldots\cdot\left|u_n^J\right|_{E_{p_J}(A_J)}+\right.$$

$$\left.+t\sum_{n=1}^{N}\left\|v_n^1\right\|_{L_{p_1}(\Omega)}\cdot\ldots\cdot\left\|v_n^J\right\|_{L_{p_J}(\Omega)}\right)\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{N}\inf_{f_n^1=u_n^1+v_n^1}\left(\left|u_n^1\right|_{E_{p_1}(A_1)}+\tau\left\|v_n^1\right\|_{L_{p_1}(\Omega)}\right)\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\inf_{f_n^J=u_n^J+v_n^J}\left(\left|u_n^J\right|_{E_{p_J}(A_J)}+\tau\left\|v_n^J\right\|_{L_{p_J}(\Omega)}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}K(\tau,f_n^1;E_{p_1}(A_1),L_{p_1}(\Omega))\cdot\ldots\cdot K(\tau,f_n^J;E_{p_J}(A_J),L_{p_J}(\Omega)).$$

Використовуючи нерівність Юнга, при $\dfrac{1}{q-1}=\sum\limits_{j=1}^{J}\left(\dfrac{1}{q_j-1}\right)$ маємо

$$\int_0^{\infty}[t^{-\theta}K(t,w;\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))]^q\,\frac{dt}{t}\le$$

$$\le J\sum_{n=1}^{N}\left(\int_0^{\infty}[\tau^{-\theta}K(\tau,f_n^1;E_{p_1}(A_1),L_{p_1}(\Omega))]^{q_1}\,\frac{d\tau}{\tau}\right)^{q/q_1}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\left(\int_0^{\infty}[\tau^{-\theta}K(\tau,f_n^J;E_{p_J}(A_J),L_{p_J}(\Omega))]^{q_J}\,\frac{d\tau}{\tau}\right)^{q/q_J}.$$

Переходячи до квазінорм, отримуємо нерівність

$$|w|_{(\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}} \le J\,|w|_{\tilde{\otimes}_j^J (E_{p_j}(A_j),L_{p_j}(\Omega))_{\theta,qj}},$$

з якої випливає вкладення

$$\tilde{\otimes}_j^J (E_{p_j}(A_j), L_{p_j}(\Omega))_{\theta,qj} \subset (\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}. \qquad (4)$$

З іншого боку, використовуючи інтерполяційні нерівності

$$|f|_{(E_{p_j}(A_j),L_{p_j}(\Omega))_{\theta,qj}} \le c_{\theta,q_j}\,|f|^{1-\theta}_{E_{p_j}(A_j)}\,\|f\|^{\theta}_{L_{p_j}(\Omega)},$$

$$K(t,w;\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega)) \le c_{\theta,q}t^{\theta}\,|w|_{(\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}} \qquad (5)$$

та нерівність Гельдера, маємо

$$\begin{aligned}
|w|_{\tilde{\otimes}_j^J (E_{p_j}(A_j),L_{p_j}(\Omega))_{\theta,qj}} &\le \inf_{w=\sum\limits_n \otimes_j^J f_n^j} \sum_{n=1}^{N} c_{\theta,q_1}\,|f|^{1-\theta}_{E_{p_1}(A_1)}\,\|f\|^{\theta}_{L_{p_1}(\Omega)} \cdot\ldots \\
&\ldots\cdot c_{\theta,q_J}\,|f|^{1-\theta}_{E_{p_J}(A_J)}\,\|f\|^{\theta}_{L_{p_J}(\Omega)} \le \\
&\le c'_{\theta,q_j} \inf_{w=\sum\limits_n \otimes_j^J f_n^j} \left( \sum_{n=1}^{N} \left|f_n^1\right|_{E_{p_1}(A_1)} \cdot\ldots\cdot \left|f_n^J\right|_{E_{p_J}(A_J)} + \right. \\
&\left. + \sum_{n=1}^{N} \left\|f_n^1\right\|_{L_{p_1}(\Omega)} \cdot\ldots\cdot \left\|f_n^J\right\|_{L_{p_J}(\Omega)} \right) \le \\
&\le c''_{\theta,q_j} t^{-\theta} K(t,w;\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega)) \le \\
&\le C_{\theta,q}\,|w|_{(\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}}
\end{aligned}$$

для $w = \sum\limits_{n=1}^{N} \otimes_j^J f_n^j \in (\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}$, $f_n^j \in E_{p_j}(A_j)$. Оскільки простір $E_{p_j}(A_j)$ щільний у просторі $(E_{p_j}(A_j), L_{p_j}(\Omega))_{\theta,qj}$, то

$$|w|_{\tilde{\otimes}_j^J (E_{p_j}(A_j),L_{p_j}(\Omega))_{\theta,qj}} \le C_{\theta,q}\,|w|_{(\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}}$$

для всіх $w \in (\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}$. Звідси отримуємо

$$(\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q} \subset \tilde{\otimes}_j^J (E_{p_j}(A_j), L_{p_j}(\Omega))_{\theta,qj}. \qquad (6)$$

Вкладення (4) і (6) дають рівність (3), яка з урахуванням (2) набуває вигляду

$$(\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q} = \tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j)]^{\theta}. \qquad (7)$$

Далі покажемо, що виконується така рівність:

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(A_j) = B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega). \qquad (8)$$

Означимо простір

$$E^{\nu_j}_{p_j}(D) = \{f \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) : D^{s_j} f \in L_{p_j}(\Omega), \left|s_j\right| = k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$$

з нормою

$$\|f\|_{E^{\nu_j}_{p_j}(D)} = \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{\left|s_j\right|=k} \nu_j^{-p_j k} \left\|D^{s_j} f\right\|^{p_j}_{L_{p_j}(\Omega)} \right)^{1/p_j}.$$

Покажемо, що об'єднання $E_{p_j}(D) = \bigcup_{\nu_j > 0} E_{p_j}^{\nu_j}(D)$ співпадає з простором цілих аналітичних функцій експоненціального типу, звуження яких на $\Omega$ належить $L_{p_j}(\Omega)$. Нехай $0 \in \Omega$ і $f(x) \in E_{p_j}^{\nu_j}(D)$. Згідно з теоремою вкладення Соболєва для $\ell > n/p_j$ маємо

$$\sup_{x\in\Omega} \left|D^{s_j} f(x)\right| \le c \max\{1, \nu_j, \dots, \nu_j^{\ell}\} \nu_j^k \, \|f\|_{E_{p_j}^{\nu_j}(D)} \le c_0 \nu_j^k, \quad |s_j| = k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{9}$$

де сталі $c$, $c_0$ не залежать від $k$. Звідси отримуємо

$$|f(x+iy)| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{|s_j|=k} \left|D^{s_j} f(x)\right| \frac{|y|^k}{k!} \le c_1 e^{\nu_j |y|} \tag{10}$$

для всіх $x \in \Omega$ і $y \in \mathbb{R}^n$, де стала $c_1$ не залежить від $k$. Це означає, що $f$ є цілою аналітичною функцією експоненціального типу.

Навпаки, нехай $f$ задовольняє (10). Тоді $\left|D^{s_j} f(x)\right| \le c_2 (2n\nu_j) e^{\nu_j |x|}$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ і $|s_j| = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. З обмеженості $\Omega$ маємо

$$\sup_{x\in\Omega} \left|D^{s_j} f(x)\right| \le c_3 (2n\nu_j)^k$$

і

$$\sum_{|s_j|=k} \left\|D^{s_j} f\right\|_{L_{p_j}(\Omega)} \le c_3 (2n^2 \nu_j)^k .$$

Звідси випливає, що $f(x) \in E_{p_j}^{4n^2\nu_j}(D)$, оскільки

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{|s_j|=k} (4n^2\nu_j)^{-p_j k} \left\|D^{s_j} f\right\|_{L_{p_j}(\Omega)}^{p_j} \le \frac{2^{p_j}}{2^{p_j} - 1} \sup_k \frac{\sum_{|s_j|=k} \left\|D^{s_j} f\right\|_{L_{p_j}(\Omega)}^{p_j}}{(2n^2\nu_j)^{p_j k}} . \tag{11}$$

На просторі $E_{p_j}(D)$ задамо квазінорму

$$|f|_{E_{p_j}(D)} = \|f\|_{L_{p_j}(\Omega)} + \inf\{\nu_j > 0 : f \in E_{p_j}^{\nu_j}(D)\} .$$

Використовуючи нерівності (9), (11) і теорему Пелі − Вінера, отримуємо еквівалентність квазінорм

$$|f|_{E_{p_j}(D)} \approx \inf_{g|_\Omega = f, g \in L_{p_j}(\mathbb{R}^n)} \left\{\|g\|_{L_{p_j}(\mathbb{R}^n)} + \sup\{|\zeta| : \zeta \in \operatorname{supp} Fg\}\right\} ,$$

де $\operatorname{supp} Fg$ − носій перетворення Фур'є $Fg$ функції $g \in L_{p_j}(\mathbb{R}^n)$.

Використовуючи теорему 4.2.2 з [10], теорему 7.1.7 з [6], а також нерівності Джексона і Бернштейна, для $\ell \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$\|f\|_{W_{p_j}^{\ell}(\Omega)}^{1/(\ell+1)} \le c_\ell \, |f|_{E_{p_j}(D)}^{1-1/(\ell+1)} \, \|f\|_{L_{p_j}(\Omega)}^{1/(\ell+1)} , \qquad f \in E_{p_j}(D), \tag{12}$$

$$K(t, f, E_{p_j}(D), L_{p_j}(\Omega)) \le c_\ell t^{1/(\ell+1)} \|f\|_{W_{p_j}^{\ell}(\Omega)}^{1/(\ell+1)} , \qquad f \in W_{p_j}^{\ell}(\Omega), \tag{13}$$

де

$$K(t, f, E_{p_j}(D), L_{p_j}(\Omega)) = \inf_{f=f_0+f_1}\left(|f_0|_{E_{p_j}(D)} + t\,\|f_1\|_{L_{p_j}(\Omega)}\right),$$

$$f_0 \in E_{p_j}(D), \quad f_1 \in L_{p_j}(\Omega).$$

Означимо простір

$$\mathscr{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(D) = \left\{ f \in L_{p_j}(\Omega) : |f|_{\mathscr{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(D)} = \left(\int_0^\infty [t^\alpha E_{p_j}(t,f)]^{\tau_j}\,\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau_j} < \infty \right\},$$

де

$$E_{p_j}(t,f) = \inf\{\|f-g\|_{L_{p_j}(\Omega)} : |g|_{E_{p_j}(D)} \le t\}, \quad g \in E_{p_j}(D), \quad f \in L_{p_j}(\Omega).$$

Використовуючи нерівності (12), (13), теорему 2.4.2/2 з [10], а також теореми 3.11.5-6 і 7.1.7 з [6], отримуємо

$$\mathscr{B}^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(D) = \left( \left(E_{p_j}(D), L_{p_j}(\Omega)\right)_{1/(\alpha+1),\tau_j(\alpha+1)} \right)^{\alpha+1} =$$

$$= \left(L_{p_j}(\Omega), W^{\ell}_{p_j}(\Omega)\right)_{\alpha/\ell,\tau_j} = B^{\alpha}_{p_j,\tau_j}(\Omega). \qquad (14)$$

Доведемо, що

$$E_{p_j}(A_j) = \left\{ f \in E_{p_j}(D) : B_{ji}A_j^k f\big|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\dots,m,\ k \in \mathbb{Z}_+ \right\}. \qquad (15)$$

Згідно з теоремою 5.4.3 з [10], для $k \in \mathbb{N}$ існують додатні числа $c_1$ і $c_2$ такі, що

$$c_1^k\,\|f\|_{W^{2mk}_{p_j}(\Omega)} \le \left\|A_j^k f\right\|_{L_{p_j}(\Omega)} \le c_2^k\,\|f\|_{W^{2mk}_{p_j}(\Omega)}, \qquad f \in D(A_j^k).$$

Звідси маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \left(c_2(n\nu_j)^{2m}\right)^{-p_j k} \left\|A_j^k f\right\|^{p_j}_{L_{p_j}(\Omega)} \le c_2' \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{|s_j|=2mk} \nu_j^{-2mkp_j} \left\|D^{s_j} f\right\|^{p_j}_{L_{p_j}(\Omega)},$$

а тому

$$\left\{ f \in E^{\nu_j}_{p_j}(D) : B_{ji}A_j^k f\,\big|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\dots,m,\ k \in \mathbb{Z}_+ \right\} \subset E^{\mu_j}_{p_j}(A_j),$$

де $\mu_j = c_2(n\nu_j)^{2m}$.

З іншого боку,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \nu_j^{-kp_j} \left\|A_j^k f\right\|^{p_j}_{L_{p_j}(\Omega)} \ge \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{|s_j|=k} (c_1^{-1}\nu_j)^{-kp_j} \left\|D^{s_j} f\right\|^{p_j}_{L_{p_j}(\Omega)},$$

звідки маємо

$$E^{\nu_j}_{p_j}(A_j) \subset \left\{ f \in E^{c_1^{-1}\nu_j}_{p_j}(D) : B_{ji}A_j^k f\big|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 1,\dots,m,\ k \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

що й доводить (15).

Рівність (8) отримуємо з (14) і (15). Ізоморфізм (1) випливає з (7) і (8). ♦

**Теорема 2.** *Існують числа* $c_1(\alpha,\tau_j), c_2(\alpha,\tau_j)$ *такі, що виконуються нерівності*

$$E(t,w) \le c_1 t^{-\alpha}\,|w|^{\alpha+1}_{\tilde{\otimes}_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{1/(\alpha+1)}}, \qquad w \in \tilde{\otimes}_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{1/(\alpha+1)}, \qquad (16)$$

$$|w|^{\alpha+1}_{\tilde{\otimes}_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{1/(\alpha+1)}} \le c_2\,|w|^{\alpha}_{\tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j)}\,\|w\|_{\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega)}, \qquad w \in \tilde{\otimes}_j^J E_{p_j}(A_j), \qquad (17)$$

*де*

$$E(t,w)=\inf\{\|w-u\|_{\tilde\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)} : |u|_{\tilde\otimes_j^J E_{p_j}(A_j)} \le t\},$$

$$u\in\tilde\otimes_j^J E_{p_j}(A_j), \qquad w\in\tilde\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega).$$

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 3.11.4(b) з [6] для деякого числа $c>0$ маємо

$$|w|_{(\tilde\otimes_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega))_{\theta,q}} \le c\,|w|^{1-\theta}_{\tilde\otimes_j^J E_{p_j}(A_j)}\,\|w\|^{\theta}_{\tilde\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)},$$

$$w\in\tilde\otimes_j^J E_{p_j}(A_j).$$

З цієї нерівності та ізоморфізму (1) при $\alpha=(1-\theta)/\theta$ випливає існування такої сталої $c_2>0$, що виконується нерівність (17).

З інтерполяційної нерівності (5) та ізоморфізму (1) випливає існування такої постійної $c_0>0$, що

$$K(t,w,\tilde\otimes_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)) \le c_0 t^{\theta}\,|w|_{\tilde\otimes_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{\theta}},$$

$$w\in\tilde\otimes_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{\theta}.$$

Позначимо

$$K_\infty(t,w,\tilde\otimes_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)) = \inf_{w=u+v}\max\left(|u|_{\tilde\otimes_j^J E_{p_j}(A_j)},\, t\,\|v\|_{\tilde\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)}\right).$$

Оскільки $K_\infty \le K$, то

$$K_\infty(t,w,\tilde\otimes_j^J E_{p_j}(A_j),\tilde\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)) \le c_0 t^{\theta}\,|w|_{\tilde\otimes_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{\theta}},$$

$$w\in\tilde\otimes_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{\theta}. \tag{18}$$

Згідно з лемою 7.1.2 з [6] для кожного $t>0$ існує таке $s>0$, що $K_\infty = s$ і $E(s+0,w)\le s/t\le E(s-0,w)$. Звідси та з нерівності (18) маємо

$$s^{1-\theta}[E(s,w)]^{\theta} \le c_0\,|w|_{\tilde\otimes_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{\theta}}, \qquad w\in\tilde\otimes_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{\theta}.$$

При $\alpha=(1-\theta)/\theta$ отримуємо

$$s^{\alpha}E(s,w) \le c_0^{\alpha+1}\,|w|^{\alpha+1}_{\tilde\otimes_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{1/(\alpha+1)}},$$

$$w\in\tilde\otimes_j^J [B^{\alpha}_{p_j,\tau_j,\{B_{ji}\}}(\Omega)]^{1/(\alpha+1)}. \tag{19}$$

Поклавши в (19) $c_1=c_0^{\alpha+1}$, отримаємо нерівність (16). ♦


1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Операторный подход к задачам аппроксимации // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, № 6. – С. 90–108.
2. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 616–628.

   Те саме: *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* Approximation of smooth vectors of a closed operator by entire vectors of exponential type // Ukr. Math. J. – 1995. – **47**, No. 5. – P. 713–726.

3. *Дмитришин М. І., Лопушанський О. В.* Абстрактні простори Бєсова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах // Доп. НАН України. – 2007. – № 12. – С. 16–22.
4. *Радзиевский Г. В.* Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 4. – С. 83–124.
   Те саме: *Radzievskii G. V.* Direct and converse theorems in problems of approximation by vectors of finite degree // Sb. Math. – 1998. – **189**, No. 4. – P. 561–601.
5. *Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 9. – С. 1559–1569.
6. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1976. – 207 p.
7. *Carl B.* Inequalities of Bernstein–Jackson-type and the degree of compactness of operators in Banach spaces // Ann. Inst. Fourier. – 1985. – **35**, No. 3. – P. 79–118.
8. *DeVore R., Petrova G., Wojtaszczyk P.* Approximation of functions of few variables in high dimensions // Constr. Approx. – 2011. – **33**, No. 1. – P. 125–143.
9. *Garrigós G., Hernández E.* Sharp Jackson and Bernstein inequalities for $N$-term approximation in sequence spaces with applications // Ind. Univ. Math. J. – 2004, **53**, No. 6. – P. 1741–1764.
10. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. – Berlin: Springer, 1995. – 664 p.

## ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С РЕГУЛЯРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

*Доказана интерполяционная теорема для тензорных произведений аппроксимационных пространств, ассоциируемых с регулярными эллиптическими операторами, и показано ее применение к проблеме аппроксимаций элементов тензорных произведений $L_p$-пространств.*

## TENSOR PRODUCTS OF APPROXIMATION SPACES ASSOCIATED WITH REGULAR ELLIPTIC OPERATORS

*The interpolation theorem for tensor products of approximation spaces associated with regular elliptic operators is proved. Its application to the problem of approximations of elements of tensor products of $L_p$-spaces is shown.*

Прикарпат. нац. ун-т
ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
10.12.12