

МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПЕРІОДИЧНО ТЕКСТУРОВАНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ФРИКЦІЙНОГО ПРОКОВЗУВАННЯ

Побудовано математичну модель фрикційного контакту тіл з періодичною текстурою поверхонь. Тіла взаємодіють у два етапи: спершу вони притискаються одне до одного монотонно зростаючим номінальним тиском, а потім до них прикладаються номінальні дотичні напруження, що зумовлюють фрикційне проковзування поверхонь тіл в околі зазорів. Задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно функцій висоти міжконтактних зазорів і відносного зсуву поверхонь тіл на ділянках проковзування та описано алгоритм їх розв'язування.

Вступ. Для покращення функціональних характеристик реальних вузлів і з'єднань розробляються різні способи створення регулярного рельєфу поверхонь. В останні роки з цією метою широко використовується текстуровання поверхонь, яке полягає у формуванні на них періодично розташованих виїмок або ямок однакового профілю. Є різні технології мікротекстуровання, зокрема лазерні [13, 15], гріндінг – обкочування кругами зі спіральними канавками [16], віброударний метод [1, 4, 6, 7, 14].

Прогнозування контактних параметрів текстурованих тіл, їх контактної міцності, жорсткості і зношування можливе на основі розв'язків контактних задач для поверхонь з періодичними системами виїмок і ямок з урахуванням тертя, зчеплення і проковзування.

На сьогодні в основному досліджено безфрикційний і ковзний фрикційний контакт тіл із періодичними та хвилястими поверхнями. Огляд плоских і просторових періодичних контактних задач такого типу наведено у працях [3, 5, 10, 12]. Періодичні ж контактні задачі з урахуванням зчеплення і проковзування розглянуто лише в декількох публікаціях. Зокрема, досліджено [10] взаємодію періодичної системи жорстких плоских штампів з пружною півплощиною, коли область контакту складається з внутрішньої області, де реалізується повне зчеплення поверхонь, і двох зовнішніх областей, де реалізується фрикційна взаємодія. Розв'язано [12] періодичну задачу про взаємодію хвилястої поверхні з пружної півплощиною при врахуванні фрикційного проковзування на краях ділянок контакту. Побудовано [11] замкнутий наблизений розв'язок плоскої контактної задачі про часткове проковзування хвилястих тіл з різних ізотропних матеріалів. Визначено [2] аналітичний розв'язок плоскої контактної задачі для пружних півпросторів з однакових матеріалів, один із яких має текстуровану поверхню, за повного закриття міжконтактних зазорів і часткового проковзування спряжених поверхонь.

У цій праці побудовано математичну модель фрикційної контактної взаємодії двох пружних ізотропних півпросторів, поверхня одного з яких має регулярний рельєф, утворений періодичною системою плиткових виїмок, коли між тілами реалізується неповний контакт і виникають ділянки фрикційного проковзування в околі міжповерхневих зазорів.

1. Формулювання задачі. Розглянемо контактну взаємодію двох пружних ізотропних півпросторів. Межа одного з півпросторів є плоскою. Межа іншого півпростору має регулярний рельєф, утворений періодичною системою неглибоких тунельних виїмок однакової ширини $2b$, розташованих з періодом d уздовж поверхні (рис. 1a). Форма виїмок у системі координат Oxy , розміщеної у площині поперечного перерізу тіл, перпендикулярній до твірної виїмок, описується періодичною парною неперервно диференційованою функцією $r(x) = r(x + kd)$, $(x \in [-b + kd, b + kd], k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, такою,

що $|r(x)| \ll b$. Максимальна глибина виїмок r_0 досягається в центрі виїмок ($\max |r(x)| = r_0 = |r(0 + kd)|$), а на їхніх кінцях $x = \pm b + kd$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, одночасно дорівнюють нулеві і функція форми, і її похідна: $r(\pm b + kd) = 0$, $r'(\pm b + kd) = 0$, що означає плавний перехід від виїмок до плоских ділянок поверхні між ними.

Вважаємо, що під дією прикладеного навантаження тіла контактують, перебуваючи в стані плоскої деформації. Тому будемо розглядати взаємодію двох півплощин D_1 і D_2 , утворених у результаті перетину півпросторів координатною площиною Oxy (рис. 1б). Процес навантаження є послідовним: спершу тіла притискаються одне до одного прикладеним на нескінченності монотонно зростаючим номінальним тиском $p_n = P/d$, де P – навантаження, що припадає на один період. При цьому монотонно зменшуються висота $h(x)$ міжконтактних зазорів, зумовлених поверхневими виїмками, та їх ширина $2a$ ($a < b$).

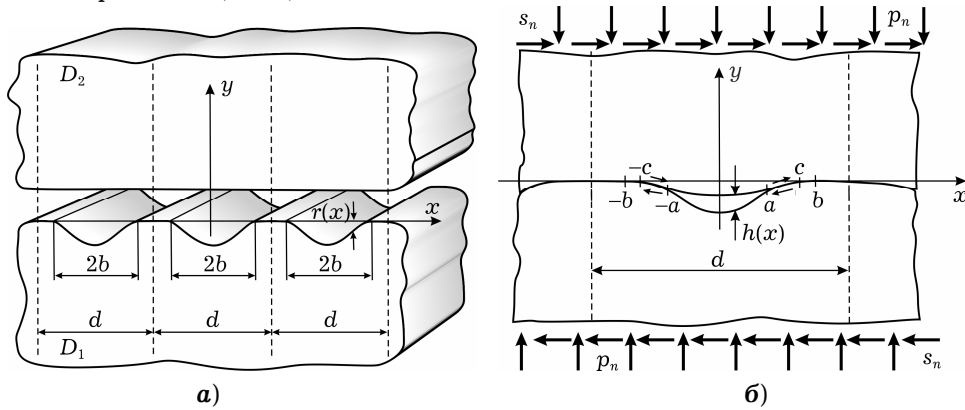


Рис. 1

Далі номінальний тиск залишається сталим, а до тіл на безмежності прикладаються номінальні дотичні напруження $s_n = S/d$ (де S – дотичні сили, що діють протягом одного періоду), які зумовлюють фрикційне проковзування поверхонь тіл на ділянках $(-c + kd, -a + kd)$ та $(a + kd, c + kd)$, що прилягають до кінців зазорів. На цих ділянках виникають дотичні напруження τ_{xy} , які, згідно з законом Кулона – Амонтона, дорівнюють контактному тиску $|\sigma_y|$, помноженому на коефіцієнт тертя f : $\tau_{xy} = f |\sigma_y|$.

Введемо такі позначення:

$$I_k^i = [-i + kd, i + kd],$$

$$Y_k^{i,j} = [-i + kd, -j + kd] \cup [j + kd, i + kd],$$

$$J_k^i = [-d/2 + kd, -i + kd] \cup [i + kd, d/2 + kd], \quad i, j = a, b, c.$$

Тут і надалі $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Крайові умови сформульованої періодичної контактної задачі теорії пружності мають вигляд

– на зазорах ($x \in I_k^a$):

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad (1)$$

$$\sigma_y^-(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = 0; \quad (2)$$

– на ділянках проковзування ($x \in Y_k^{c,a}$):

$$\begin{aligned}\sigma_y^-(x, 0) &= \sigma_y^+(x, 0), & \tau_{xy}^-(x, 0) &= \tau_{xy}^+(x, 0), \\ v^-(x, 0) - v^+(x, 0) &= -r(x),\end{aligned}\tag{3}$$

$$\tau_{xy}^-(x, 0) = -f\sigma_y^-(x, 0);\tag{4}$$

– на ділянках зчеплення ($x \in J_k^c$):

$$\begin{aligned}\sigma_y^-(x, 0) &= \sigma_y^+(x, 0), & \tau_{xy}^-(x, 0) &= \tau_{xy}^+(x, 0), \\ u^-(x, 0) &= u^+(x, 0), & v^-(x, 0) - v^+(x, 0) &= -r(x);\end{aligned}\tag{5}$$

– на нескінченності в кожній з півплощин D_1 та D_2 :

$$\sigma_y = -p_n, \quad \tau_{xy} = s_n, \quad \sigma_x = 0.\tag{6}$$

Тут $r(x) = 0$ при $x \in J_k^b$; σ_y , σ_x , τ_{xy} та u , v – компоненти тензора напружень і вектора переміщень; індексами «-» та «+» позначено граничні значення функцій на лінії спряження відповідно в півплощинах D_1 та D_2 .

Зазначимо, що ширина зазорів і ширина ділянок проковзування є невідомими та змінюються у процесі навантаження. Для знаходження цих параметрів використаємо умову плавного змикання берегів зазорів та умову обмеженості контактних дотичних напружень на краях ділянок проковзування.

2. Зведення задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь.

Під дією номінальних дотичних напружень на ділянках проковзування границі півплощин зсуваються одна відносно іншої. Тому введемо функцію $U(x)$ відносного зсуву границь тіл на цих ділянках:

$$u^-(x, 0) - u^+(x, 0) = U(x), \quad x \in Y_k^{c,a}.$$

На основі викладеного у працях [2, 8] підходу, використовуючи метод комплексних потенціалів, напруження і похідні від переміщень у тілах подамо через функції $r(x)$ форми виїмок, висоти $h(x)$ міжконтактних зазорів і відносного зсуву поверхонь $U(x)$ у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re}[\Phi_\ell(z)] - p_n, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_\ell(z) - \Phi_\ell(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_\ell(z)} - p_n - is_n, \\ 2G(u' + iv') &= \alpha\Phi_\ell(z) + \Phi_\ell(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_\ell(z)} + \frac{3-\alpha}{4}p_n, \\ \alpha &= 3 - 4\nu, \quad z \in D_\ell, \quad \ell = 1, 2,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= \frac{(-1)^\ell G}{\pi i(1+\alpha)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-c+kd}^{c+kd} \frac{U'(t) dt}{t-z} - i \int_{-a+kd}^{a+kd} \frac{h'(t) dt}{t-z} - i \int_{-b+kd}^{b+kd} \frac{r'(t) dt}{t-z} \right\}, \\ \Phi_2(z) &= -\Phi_1(z), \quad z \in D_\ell, \quad \ell = 1, 2.\end{aligned}\tag{8}$$

Тут $z = x + iy$ – комплексна змінна; G і ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалів тіл; $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ – комплексні потенціали.

Подання (7), (8) задовольняють усі крайові умови (1)–(6), за винятком умов (2) і (4).

Враховуючи періодичність функцій $U(x)$, $h(x)$ і $r(x)$ та формулу підсумовування $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - kd} = \frac{\pi}{d} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{d}$, комплексні потенціали (8) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{(-1)^{\ell+1} G}{d(1+\alpha)} \left(i \int_{-c}^c U'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt + \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-b}^b r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt \right), \\ \Phi_2(z) &= -\Phi_1(z), \quad z \in D_\ell, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Підставивши співвідношення (9) у подання (7), визначимо контактні нормальні та дотичні напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= \frac{2G}{d(1+\alpha)} \left(\int_{-b}^b r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt \right) - p_n, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = -\frac{2G}{d(1+\alpha)} \int_{-c}^c U'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt + s_n. \quad (11)$$

Задовольнивши з урахуванням виразів (10), (11) крайові умови (2), (4), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з ядром Гільберта для знаходження функцій відносного зсуву границь тіл $U(x)$ і висоти $h(x)$ міжконтактних зазорів:

$$\frac{1}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = -\frac{1}{d} \int_{-b}^b r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt + \frac{1+\alpha}{2G} p_n, \quad |x| \leq c, \quad (12)$$

$$\frac{1}{d} \int_{-c}^c U'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = \frac{(1+\alpha)s_n}{2G}, \quad x \in I_k^a,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \int_{-c}^c U'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt &= \frac{(1+\alpha)s_n}{2G} + f \left(\frac{1}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{d} \int_{-b}^b r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt \right) - \frac{(1+\alpha)fp_n}{2G}, \quad x \in Y_k^{c,a}. \end{aligned} \quad (13)$$

Зауважимо, що функції $h(x)$ та $U(x)$ задовольняють умови

$$h(-a + kd) = 0, \quad h(a + kd) = 0, \quad (14)$$

$$h'(-a + kd) = 0, \quad h'(a + kd) = 0, \quad (15)$$

$$U(-c + kd) = 0, \quad U(c + kd) = 0, \quad (16)$$

$$U'(-c + kd) = 0, \quad U'(c + kd) = 0. \quad (17)$$

Умови (14) означають неперервність нормальних переміщень, а умови (15) – плавне змикання берегів зазорів. Умови (16) вказують на неперервність дотичних переміщень границь тіл, а умови (17) забезпечують обмеженість дотичних напружень на краях ділянок проковзування.

Введемо змінні $\xi = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{d}$, $\eta = \operatorname{tg} \frac{\pi t}{d}$, у яких система СІР з ядром Гільберта (12), (13) трансформується у систему СІР з ядром Коші

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = R(\xi) + \frac{d(1 + \varkappa)}{2G(1 + \xi^2)} p_n, \quad |\xi| \leq \alpha, \quad (18)$$

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{U'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d(1 + \varkappa)s_n}{2G(1 + \xi^2)} + \begin{cases} 0, & |\xi| \leq \alpha, \\ f \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta - R(\xi) \right) - \frac{d(1 + \varkappa)fp_n}{2G(1 + \xi^2)}, & |\xi| \leq \gamma, \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{де } \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d}, \quad \gamma = \operatorname{tg} \frac{\pi c}{d}, \quad R(\xi) = - \int_{-\beta}^{\beta} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad \beta = \operatorname{tg} \frac{\pi b}{d}.$$

Умови (14)–(17) у нових змінних запишуться так:

$$h(-\alpha) = 0, \quad h(\alpha) = 0, \quad (20)$$

$$h'(-\alpha) = 0, \quad h'(\alpha) = 0, \quad (21)$$

$$U(-\gamma) = 0, \quad U(\gamma) = 0, \quad (22)$$

$$U'(-\gamma) = 0, \quad U'(\gamma) = 0. \quad (23)$$

3. Алгоритм розв'язування задачі. Оскільки в рівняння (18) не входить функція $U(\xi)$, то рівняння системи (18), (19) розв'язуємо послідовно. Спочатку з СІР (18) визначаємо функцію $h'(\xi)$. Потім її підставляємо в СІР (19), яке розв'язуємо відносно функції $U'(\xi)$.

Зважаючи на умови (21), шукатимемо обмежений розв'язок СІР (18), який згідно з [9] матиме вигляд

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= - \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R(\xi) + d(1 + \varkappa)p_n / (2G\pi(1 + \eta^2))}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2} (\eta - \xi)} d\eta = \\ &= h'_2(\xi) - \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d(1 + \varkappa)p_n / (2G\pi(1 + \eta^2))}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2} (\eta - \xi)} d\eta, \quad |\xi| \leq \alpha, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{де } h'_2(\xi) = - \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R(\xi)}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2} (\eta - \xi)} d\eta.$$

Проінтегрувавши функцію $h'(\xi)$ з урахуванням умови (20), знайдемо висоту міжконтактних зазорів

$$\begin{aligned} h(\xi) &= h_2(\xi) + \frac{(1 + \varkappa)p_n d}{2G\pi} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \alpha^2} + \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2} - \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \right| \right), \quad |\xi| \leq \alpha, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{де } h_2(\xi) = \int_{-\alpha}^{\xi} h'_2(\xi) d\xi.$$

Функція $h(\xi)$ (25) містить невідомий параметр α , який залежить від півдовжини зазору a ($\alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d}$). Для його визначення побудуємо рівняння

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R(\eta)}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}} d\eta + \frac{(1+x)p_n d}{G\sqrt{1+\alpha^2}} = 0, \quad (26)$$

яке впливає з умови існування обмеженого розв'язку СІР (18), що накладається на його праву частину [9].

Після визначення висоти $h(x)$ і півдовжини a зазорів можемо перейти до знаходження відносного зсуву поверхонь тіл $U(x)$ і величини ділянок проковзування s . Для цього спочатку запишемо нормальні контактні напруження, які входять в праву частину СІР (19), що служать для визначення функції $U'(x)$:

$$\begin{aligned} \sigma_y^-(x, 0) &= 0, \quad x \in I_k^a, \\ \sigma_y^-(x, 0) &= -\frac{2G \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{d}\right)}{d(1+x)} \left(\frac{d(1+x)p_n}{2G\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d}}} \times \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\left| \operatorname{tg} \frac{\pi x}{d} \right| \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{d} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{d}} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{d}} - 1 \right) + \int_{-\operatorname{tg} \frac{\pi b}{d}}^{\operatorname{tg} \frac{\pi b}{d}} \frac{r'(\eta)}{\eta - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{d}} d\eta \right) - p_n, \\ &\quad x \in Y_k^{b,a} \cup J_k^b. \end{aligned} \quad (27)$$

Враховавши функцію (27) у СІР (19), запишемо його у вигляді

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{U'(\eta) dt}{\eta - \xi} = \frac{d(1+x)s_n}{2G(1+\xi^2)} + L(\xi), \quad |\xi| \leq \gamma, \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} L(\xi) &\equiv \begin{cases} 0, & |\xi| \leq \alpha, \\ F(\xi), & \alpha \leq |\xi| \leq \gamma, \end{cases} \\ F(\xi) &= \frac{3fr_0\pi}{\beta} \left(\frac{(1+x)p_n d}{2G\sqrt{1+\alpha^2}} \left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1+\xi^2} - 1 + \frac{|\xi| \sqrt{\xi^2 - \alpha^2}}{1+\xi^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\beta}^{\beta} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta \right) - fp_n. \end{aligned}$$

Наближений розв'язок СІР (28) шукатимемо у вигляді скінченного ряду за поліномами Чебишева першого роду $T_{2m-1}(\xi/\gamma)$:

$$U'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2/\gamma^2}} \sum_{m=1}^N \theta_m T_{2m-1} \left(\frac{\xi}{\gamma} \right), \quad (29)$$

де N – кількість членів ряду, θ_m – коефіцієнти розкладу.

Проінтегрувавши рівність (29) з урахуванням першої з умов (22), отримаємо вираз для відносного зсуву меж тіл:

$$U(\xi) = -\gamma \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\gamma^2}} \sum_{m=1}^N \frac{\theta_m}{2m-1} U_{2m-2} \left(\frac{\xi}{\gamma} \right), \quad (30)$$

де $U_{2m-2}(\xi/\gamma)$ – поліноми Чебишева другого роду.

Підставивши функцію (29) у рівняння (28) і задовольнивши його на множині дискретних значень ξ_n з інтервалу $(-\gamma, \gamma)$, за які вибираємо нулі $\xi_n = \gamma \cos(2n\pi/(2N+1))$, $n = 1, \dots, N$, полінома Чебишева другого роду $U_{2N-2}(\xi/\gamma)$, отримаємо N рівнянь відносно коефіцієнтів θ_m і параметра γ :

$$\pi \sum_{m=1}^N \theta_m U_{2m-2} \left(\frac{\xi_n}{\gamma} \right) - \frac{d(1+x)s_n}{2G(1+\xi_n)} = L(\xi_n), \quad |\xi_n| \leq \gamma, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (31)$$

Підставивши функцію (29) в умови (17), отримаємо ще одне рівняння відносно коефіцієнтів θ_m :

$$\sum_{m=1}^N \theta_m = 0. \quad (32)$$

Отже, рівняння (31), (32) формують систему $N+1$ алгебраїчних рівнянь для визначення N коефіцієнтів θ_m , $m = 1, \dots, N$, і параметра γ , зв'язаного з координатою $x = c$ кінця ділянки проковзування ($\gamma = \text{tg} \frac{c\pi}{d}$). Ця система рівнянь є лінійною відносно номінального дотичного зусилля s_n та нелінійною відносно γ . Тому з метою спрощення обчислювальної процедури параметр γ задаватимемо, а натомість шукатимемо зусилля на безмежності s_n . Таким чином отримаємо систему $N+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо коефіцієнти ряду $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ та s_n – параметр, який входить у систему лінійно.

Підставивши вираз (29) у співвідношення (11), знайдемо контактні дотичні напруження:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^-(x, 0) &= 0, \quad x \in I_k^a, \\ \tau_{xy}^-(x, 0) &= -\frac{2\pi G(1+x^2)}{d(1+x)} \sum_{m=1}^N \theta_m U_{2m-2} \left(\frac{\text{tg} \frac{\pi x}{d}}{\text{tg} \frac{\pi c}{d}} \right) + s_n, \quad x \in Y_k^{c,a}, \\ \tau_{xy}^-(x, 0) &= \frac{2\pi G(1+x^2)}{d(1+x)} \left(\text{tg}^2 \frac{\pi x}{d} - 1 \right)^{-1/2} \times \\ &\quad \times \sum_{m=1}^N \theta_m e^{(2m-1) \ln \left(\left| \frac{\text{tg} \frac{\pi x}{d}}{\text{tg} \frac{\pi c}{d}} \right| - \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \frac{\pi x}{d}}{\text{tg}^2 \frac{\pi c}{d}} - 1} \right)} + s_n, \quad x \in J_k^c. \end{aligned}$$

Висновки. Розглянуто контакт пружних тіл, поверхня одного з яких текстурована періодично розташованими виїмками однакової форми, за послідовного навантаження спочатку нормальними, а потім зсувними зусиллями. Під дією нормальних зусиль виникає періодично-дискретний контакт, коли ділянки безпосереднього контакту поверхонь чергуються із міжповерхневими зазорами. Під дією зсувних зусиль на кінцях зазорів виникають ділянки фрикційного проковзування. Використовуючи метод комплексних потенціалів, напружено-деформований стан у тілах подано через відо-

му функцію, що описує форму виїмок, та дві невідомі функції – висоту міжконтактних зазорів та відносний зсув поверхонь тіл, для визначення яких отримано два сингулярних інтегральних рівняння (СІР). При заданій початковій формі виїмок одне з цих рівнянь розв'язано аналітично, а для розв'язування другого запропоновано числову процедуру, яка передбачає подання розв'язку у вигляді розкладу за поліномами Чебишева першого роду з невідомими коефіцієнтами, що знаходяться за допомогою методу колокацій.

Робота виконана за часткової підтримки гранту 23-08-12 Національної академії наук України.

1. Антонюк В. С., Возненко В. В. Вплив дискретно-орієнтованої топографії поверхні деталей на їх трибологічні характеристики // Вісн. Нац. техн. ун-ту України «КПІ». Сер. Приладобудування. – 2006. – Вип. 32. – С. 70–77.
2. Горячева И. Г., Маланчук Н. И., Мартыняк Р. М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // Прикл. математика и механика. – 2012. – **76**, № 5. – С. 695–709.
Te same: Goryacheva I. G., Malanchuk N. I., Martynyak R. M. Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip // J. Appl. Math. Mech. – 2012. – **76**, No. 5. – P. 621–630.
3. Горячева И. Г., Мартыняк Р. М. Периодические контактные задачи с трением и изнашиванием поверхностей // Развитие идей Л. А. Галина в механике. – Москва–Ижевск: Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. – С. 305–335.
4. Ляшенко Б. А., Марчук В. Є., Калініченко В. І., Градиський Ю. О. Дискретні покриття для підвищення зносостійкості деталей машин і механізмів // Вісн. Харків. НТУСГ ім. Петра Василенка. – 2010. – Вип. 94. – С. 324–335.
5. Мартыняк Р. М., Маланчук Н. И., Монастырский Б. Є. Зсув взаємопритиснутих півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 2. Неповний контакт // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 4. – С. 114–120.
Te same: Martynyak R. M., Malanchuk N. I., Monastyr's'kyi B. E. Shear of two half planes pressed to each other and containing a surface groove. Part 2. Incomplete contact // Mater. Sci. – 2006. – **42**, No. 4. – P. 551–559.
6. Марчук В. Є., Ляшенко Б. А., Калініченко В. І. Моделювання напружено-деформованого стану дискретної поверхні // Проблеми тертя та зношування. – 2008. – Вип. 49, т. 2. – С. 25–30.
7. Марчук В. Є., Радько О. В., Ляшенко Б. А., Градиський Ю. О. Дослідження зносостійкості луночних покриттів в умовах граничного тертя // Вісн. Харків. НТУСГ ім. Петра Василенка. – 2011. – Вип. 107. Механізація с.-г. виробництва. – Т. 2. – С. 170–176.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
9. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. – Москва: Физматгиз, 1962. – 600 с.
10. Antipov Y. A. Galin's problem for a periodic system of stamps with friction and adhesion // Int. J. Solids Struct. – 2000. – **37**, No. 15. – P. 2093–2125.
11. Block J. M., Keer L. M. Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – **3**, No. 7. – P. 1207–1237.
12. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II – Examples // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, No. 18. – P. 2363–2378.
13. Etsion I. State of the art in laser surface texturing // Trans. ASME. J. Tribol. – 2005. – **127**, No. 1. – P. 248–253.
14. Greco A., Raphaelson S., Ehmann K., Jane Wang Q., Lin C. Surface texturing of tribological interfaces using the vibromechanical texturing method // Trans. ASME. J. Manuf. Sci. Eng. – 2009. – **131**, No. 6. – P. 061005-1–061005-8.
15. Schreck S., Zum Gahr K.-H. Laser-assisted structuring of ceramic and steel surfaces for improving tribological properties // Appl. Surf. Sci. – 2005. – **247**. – P. 616–622.
16. Stępień P. Deterministic and stochastic components of regular surface texture generated by a special grinding process // Wear. – 2011. – **271**, No. 3-4. – P. 514–518.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ ТЕКСТУРИРОВАННЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ФРИКЦИОННОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

Построена математическая модель фрикционного контакта тел с периодической текстурой поверхностей. Тела взаимодействуют в два этапа: сначала они прижимаются друг к другу монотонно возрастающим номинальным давлением, а затем к ним прикладываются номинальные касательные напряжения, которые приводят к фрикционному проскальзыванию поверхностей тел в окрестности зазоров. Задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений относительно функций высоты межконтактных зазоров и относительного сдвига поверхностей тел на участках проскальзывания и описан алгоритм их решения.

MODELING OF CONTACT INTERACTION OF PERIODICALLY TEXTURED SOLIDS WITH ACCOUNTING FRICTIONAL SLIPPING

A mathematical model of the friction contact of solids with periodic surface texture is constructed. Solids interact in two stages: first, they are pressed to each other by monotonically increasing nominal pressure, and then nominal shear stresses are applied to them that causes a frictional sliding of the surfaces in the vicinity of gaps. The contact problem is reduced to a system of singular integral equations for the functions of intercontact gaps height and relative shift of surfaces at the slip zone and an algorithm for its solution is described.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Ін-т проблем міцності
ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ,

³ Нац. авіац. ун-т, Київ

Одержано
21.10.12