

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ – КУТТА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Исследована спектральная устойчивость обобщенных методов Рунге – Кутта разных порядков точности применительно к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса. Проведено сравнение приближенных решений, полученных на базе разных обобщенных методов Рунге – Кутта, с точным решением при сложно осциллирующих начальных условиях с большими по модулю производными. Показано, что некоторые классические конечно-разностные схемы интегрирования начально-краевой задачи для уравнения переноса являются следствием последовательного применения обобщенных и обычных методов Рунге – Кутта по всем независимым переменным.

Введение. Многие физические и механические явления и процессы описываются начально-краевыми задачами с сингулярным возмущением [7 и др.], решения которых обладают локальными эффектами типа пограничных слоев. Как правило, наибольший интерес у исследователей вызывает поведение неизвестных функций именно в этих подобластях пограничных слоев, где решения имеют большие градиенты. Поэтому актуальной является проблема разработки надежных устойчивых методов численного интегрирования начально-краевых задач с большими градиентами решения [6, 14, 15 и др.]. Для наиболее достоверного определения поведения неизвестных функций в подобластях с большими и быстроосциллирующими градиентами целесообразно, чтобы эти методы обладали высокими порядками точности.

В одномерных случаях хорошо зарекомендовали себя неклассические методы Рунге – Кутта (МРК) [3] для эффективного численного интегрирования начальных и краевых задач с жесткими дифференциальными уравнениями, решения которых обладают указанными выше особенностями. Поэтому естественно возникает вопрос о целесообразности обобщения этих методов на многомерные случаи, что и было сделано автором в [10 и др.].

Эффективность такого обобщения, в частности, заключается в том, что позволяет в начально-краевых задачах математической физики и механики осуществлять дискретизацию области интегрирования в нетрадиционной последовательности. Так как область определения в нестационарных (динамических) задачах, кроме пространства, включает время, то методы численного решения предполагают дискретизацию определяющей системы уравнений и по этой переменной. Возможны два способа дискретизации: одновременное [4] и последовательное пространственно-временное деление области интегрирования [1 и др.]. Используемые до настоящего времени методы последовательной дискретизации базируются на разбиении области определения, в первую очередь, по пространственным переменным, сводя исходную начально-краевую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени (метод прямых), для интегрирования которой применяются как явные (типа «крест» [1]), так и неявные разностные схемы [3, 5 и др.]. Из неявных методов численного интегрирования по времени динамических задач механики деформируемого твердого тела наиболее широкое распространение получил метод Ньюмарка [5, 13, 16 и др.]. Специфическая особенность метода Ньюмарка такова, что его целесообразно использовать в динамических задачах, основными неизвестными в которых являются перемещения. Однако в задачах вязкопластической динамики твердых тел или в задачах вязкого течения жидкости, где основными

неизвестными являются скорости точек среды, использование метода Ньюмарка становится неэффективным. В этих случаях, как показывают исследования [8, 9, 12], целесообразно использовать обобщенные МРК, которые, в частности, позволяют построить двуслойные схемы более высокого порядка точности, чем метод Ньюмарка.

Особенность применения обобщенных МРК заключается в том, что при последовательной дискретизации области определения решения динамической задачи ее разбиение осуществляется сначала по времени, а уж затем (если потребуется) – по пространственным переменным. Такой подход, по-видимому, более целесообразен, так как уравнения движения, как правило, содержат дифференциальные операторы по пространственным переменным сложной (часто нелинейной) структуры и достаточно простые дифференциальные операторы по времени. Такая последовательность дискретизации начально-краевых задач динамики позволяет в каждый дискретный момент времени более гибко использовать разнообразные методы интегрирования (по пространственным переменным), разработанные для решения задач статики [8–10, 12].

Известно, что уравнение переноса является модельным и позволяет «отрабатывать» схемы для более сложных уравнений акустики, нелинейных уравнений газовой динамики и др. [11]. Поэтому исследование численных схем интегрирования этого уравнения обобщенными МРК представляет определенный методологический интерес. В работе [10] было показано, что некоторые классические конечно-разностные схемы интегрирования уравнения переноса могут быть получены как следствие применения обобщенных МРК.

Настоящее исследование посвящено исследованию спектральной устойчивости обобщенных МРК применительно к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса.

Некоторые предварительные соображения. Рассмотрим уравнение задачи Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial y}{\partial x}, \quad y(0, x) = y_0(x), \quad |x| < \infty, \quad t \geq 0, \quad \alpha = \pm 1, \quad (1)$$

где $y_0(x)$ – дифференцируемая функция. Решением задачи (1) является «бегущая волна» [11]

$$y(t, x) = y_0(x + \alpha t). \quad (2)$$

Дискретизируем начальную задачу (1) по времени, т. е. будем рассматривать ее решение в моменты времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t_0 = 0, \quad (3)$$

где τ – шаг по времени (возможно, переменный: $\tau = \tau_{n+1}$).

Далее будем исследовать спектральную устойчивость разных обобщенных МРК применительно к (1) в дискретные моменты времени (3). Согласно [11], для этого решение при $t = t_n$ представим в виде гармоники

$$y^n(x) \equiv y(t_n, x) = q_n \sin(kx + \varphi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Тогда в силу свойства «бегущей волны» (2) решение в следующий момент времени должно иметь вид

$$y^{n+1}(x) = q_{n+1} \sin(kx + \varphi_{n+1}), \quad |x| < \infty, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n, \quad (5)$$

где k , q_n , q_{n+1} , φ_n , θ_n – некоторые постоянные, причем q_{n+1} , θ_n зависят от k , q_n , φ_n , τ ; θ_n – сдвиг фазы гармоники, характеризующий свойство переноса («бегущую волну»).

Введем норму решения в пространстве C :

$$\|y^n\|_C = \max_x |y^n(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Тогда в силу (4), (5) имеем

$$\|y^n\|_C = |q_n|, \quad \|y^{n+1}\|_C = |q_{n+1}|. \quad (7)$$

Отношение

$$R = R(\alpha, \tau, k) = \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} \quad (8)$$

по аналогии с терминологией, принятой в [3], целесообразно назвать функцией устойчивости соответствующего обобщенного МРК применительно к начальной задаче для уравнения переноса (1).

Согласно (6)–(8), если

$$R \leq 1, \quad (9)$$

то обобщенный МРК спектрально устойчив, а при $R > 1$ – спектрально неустойчив.

В силу равенств (4), (5), (8) для определения функции устойчивости достаточно в (4) принять

$$q_n = 1, \quad (10)$$

тогда из (8) следует

$$R(\alpha, \tau, k) = |q_{n+1}(\alpha, \tau, k)|. \quad (11)$$

Таким образом, для определения функции устойчивости R , соответствующей обобщенному МРК, необходимо определить коэффициент q_{n+1} в (5) при выполнении равенств (4), (10).

Продемонстрируем это на примере некоторых конкретных обобщенных МРК.

Для решения задачи Коши (1) наиболее естественно использовать явные схемы [11]. Поэтому сначала для численного интегрирования начальной задачи (1) обобщенными МРК, согласно [10], воспользуемся коэффициентами одностадийного метода Радо IA (далее, как и в [10], будем для краткости говорить: «воспользуемся таким-то методом», используя названия, принятые в [3], и коэффициенты соответствующей этому методу матрицы Бутчера) – явного метода Эйлера, тогда получим выражение

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=t_n},$$

откуда с учетом (1) следует

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \alpha \tau (y^n(x))', \quad (12)$$

где штрих означает производную по x .

Подставив в (12) выражение (4) с учетом (10), после элементарных тригонометрических преобразований, согласно (5), получим

$$y^{n+1}(x) = \sin(kx + \varphi_n) + \alpha \tau k \cos(kx + \varphi_n) = q_{n+1} \sin(kx + \varphi_{n+1}), \quad (13)$$

где

$$q_{n+1} = \sqrt{1 + (\tau k)^2}, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n, \quad \cos \theta_n = \frac{1}{q_{n+1}}, \quad \sin \theta_n = \frac{\alpha \tau k}{q_{n+1}}. \quad (14)$$

Из (13), (14), (8) следует, что при $\alpha = \pm 1$, $\tau > 0$ и $k > 0$ имеет место неравенство $R > 1$, т. е. одностадийный метод Радо IA применительно к (1) не обладает спектральной устойчивостью.

Если аппроксимировать производную в (12) конечными разностями на разных шаблонах, то получим некоторые общеизвестные явные конечно-разностные схемы. Так, используя правые и левые разности, имеем

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{\alpha \tau}{\Delta} (y_{i+1}^n - y_i^n), \quad (15)$$

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{\alpha \tau}{\Delta} (y_i^n - y_{i-1}^n), \quad (16)$$

где

$$y_i^n = y(t_n, x_i), \quad x_{i+1} = x_i + \Delta, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad x_0 = 0, \quad (17)$$

Δ – шаг по пространственной переменной x (возможно, переменный: $\Delta = \Delta_i$).

На рис. 1а изображен шаблон для схемы (15), а на рис. 1б – для схемы (16). Известно, что схема (15) условно устойчива в пространстве C сеточных функций y_i^n при $\alpha = 1$, $\tau/\Delta \leq 1$, а схема (16) условно устойчива при $\alpha = -1$, $\tau/\Delta \leq 1$ (в остальных случаях эти схемы неустойчивы [11]).

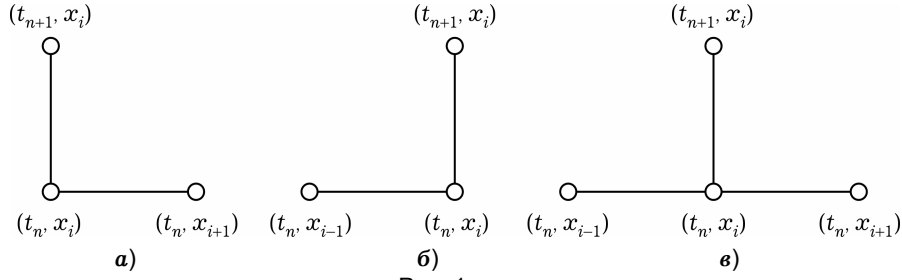


Рис. 1

Используя центральную разность для аппроксимации производной в (12), получим явную схему:

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{\alpha\tau}{2\Delta}(y_{i+1}^n - y_{i-1}^n), \quad (18)$$

которая строится на шаблоне, изображенном на рис. 1в. Известно, что схема (18) неустойчива при любых $\alpha = \pm 1$ и τ/Δ [11].

Повторяя рассуждения, аналогичные (12)–(14), на базе других явных обобщенных МРК [2, 10] получим, что эти методы, как и (12), обладают спектральной неустойчивостью. Поэтому далее исследуем спектральную устойчивость неявных обобщенных МРК применительно к численному интегрированию начальной задачи (1).

Сначала воспользуемся одностадийным методом Радо ПА (неявным методом Эйлера), тогда получим

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau\alpha Y_1'(x), \quad Y_1(x) = y^n(x) + \tau\alpha Y_1'(x)$$

(здесь и далее $Y_m(x)$ – некоторые вспомогательные функции [10]), откуда

$$\alpha\tau(y^{n+1}(x))' - y^{n+1}(x) = -y^n(x). \quad (19)$$

Подставляя в правую часть (19) выражение (4) с учетом (10) и разыскивая решение в виде (5), на основании (11) получим

$$R(\tau k) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau k)^2}}, \quad \cos \theta_n = \frac{1}{R} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + k^2}, \quad \sin \theta_n = \frac{1}{R} \frac{\lambda k}{\lambda^2 + k^2}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{\tau}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что при $\alpha = \pm 1$, $\tau > 0$ выполняется неравенство $R < 1$ при $k > 0$ и равенство $R = 1$ при $k = 0$ (т. е. при $y^n(x) = \text{const}$). Следовательно, одностадийный метод Радо ПА применительно к (1), в отличие от (12), обладает спектральной устойчивостью.

Аппроксимируя производную в (19) правыми или левыми конечными разностями, получим общеизвестные неявные конечно-разностные схемы на трехточечных шаблонах (см. (17))

$$\frac{\alpha\tau}{\Delta}(y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}) - y_i^{n+1} = -y_i^n, \quad (21)$$

$$\frac{\alpha\tau}{\Delta}(y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}) - y_i^{n+1} = -y_i^n. \quad (22)$$

(На рис. 2а изображен шаблон для схемы (21), а на рис. 2б – для схемы (22).) Известно, что схема (21) безусловно устойчива в пространстве C сеточных функций y_i^n при $\alpha = -1$, а схема (22) – при $\alpha = 1$ [10, 11].

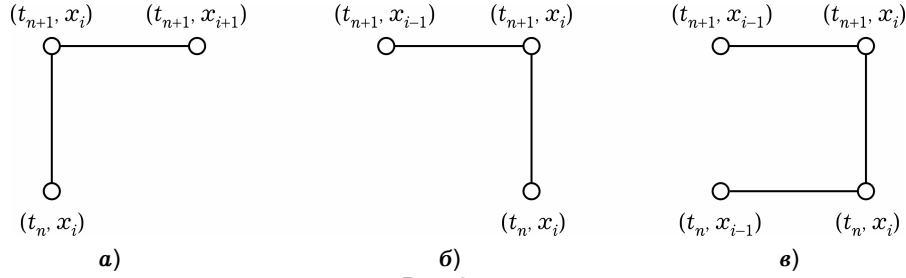


Рис. 2

Рассмотренные выше одностадийные методы Радо IA и Радо ПА имеют первый порядок точности по τ . Далее исследуем спектральную устойчивость неявных обобщенных МРК более высоких порядков точности по τ .

Проинтегрировав задачу (1) с использованием одностадийного метода Гаусса – Лежандра (метод средней точки, имеющий второй порядок точности по τ), получим

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau\alpha Y_1'(x), \quad Y_1(x) = y^n(x) + 0.5\tau\alpha Y_1'(x),$$

откуда

$$y^{n+1}(x) = 2Y_1(x) - y^n(x), \quad Y_1'(x) = \frac{2\alpha}{\tau}(Y_1(x) - y^n(x)) \quad (23)$$

или

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{2} [(y^{n+1}(x))' + (y^n(x))']. \quad (24)$$

(Соотношение (24) является известной формулой трапеций, соответствующей двухстадийному методу Лобатто IIIA [3], поэтому дальнейшие рассуждения справедливы и для этого метода.)

Подставив в (24) выражения (4), (5) с учетом (10), на основании (11) после элементарных тригонометрических преобразований получим

$$R \equiv 1, \quad \cos \theta_n = \frac{\lambda^2 - k^2}{\lambda^2 + k^2}, \quad \sin \theta_n = \frac{2\lambda k}{\lambda^2 + k^2}, \quad \lambda = \frac{2\alpha}{\tau}. \quad (25)$$

Так как функция устойчивости R при любых $k \geq 0$ равна единице, то применительно к начальной задаче (1) одностадийный метод Гаусса – Лежандра и двухстадийный метод Лобатто IIIA обладают спектральной устойчивостью.

Замечание. Формулы (14), (20), (25) показывают, что всем рассмотренным выше обобщенным МРК при фиксированных α и τ присуще свойство зависимости сдвига фазы гармоник θ_n от ее частоты k . Согласно точному решению (2), этого не должно быть. Зависимость θ_n от k становится исчезающе малой при $\tau \rightarrow 0$.

Если для интегрирования второго уравнения (23) (или, что то же самое, для уравнения (24)) применить двухстадийный метод Лобатто IIIA (метод трапеций [3]), то из (23) получим

$$Y_1^{i+1} = \frac{1}{1 - \alpha H} [(1 + \alpha H)Y_1^i - \alpha H(y_i^n + y_{i+1}^n)], \quad y_{i+1}^{n+1} = 2Y_1^{i+1} - y_{i+1}^n, \quad (26)$$

$$Y_1^i = \frac{1}{1 + \alpha H} [(1 - \alpha H)Y_1^{i+1} + \alpha H(y_i^n + y_{i+1}^n)], \quad y_i^{n+1} = 2Y_1^i - y_i^n, \quad (27)$$

где $Y_1^i \equiv Y_1(x_i)$, $H = \Delta/\tau$.

Исключив величины Y_1^{i+1} , Y_1^i из вторых равенств (26), (27) соответственно за счет первых соотношений и заменив в полученных уравнениях

Y_1^i, Y_1^{i+1} выражениями

$$Y_1^i = \frac{1}{2}(y_i^{n+1} + y_i^n), \quad Y_1^{i+1} = \frac{1}{2}(y_{i+1}^{n+1} + y_{i+1}^n),$$

которые следуют из первого из равенств (23), в конечном итоге получим классические конечно-разностные схемы второго порядка по обеим переменным, построенные на четырехточечном шаблоне [11] (см. рис. 2в):

$$y_{i+1}^{n+1} = ay_i^{n+1} + y_i^n - ay_{i+1}^n, \quad a = (1 + \alpha H)/(1 - \alpha H), \quad \alpha = -1, \quad (28)$$

$$y_i^{n+1} = by_{i+1}^{n+1} + y_{i+1}^n - by_i^n, \quad b = (1 - \alpha H)/(1 + \alpha H), \quad \alpha = 1. \quad (29)$$

Известно, что схемы (28), (29) абсолютно устойчивы в энергетической норме [11] (т. е. в некотором осредненном смысле). Однако, как показано в [10], эти схемы неустойчивы в норме пространства C сеточных функций y_i^n . (Единственным исключением является случай $H = 1$, когда $\tau = \Delta$, $a = b = 0$. При этом из (28), (29) следует равенство переноса $y_{i+1}^{n+1} = y_i^n$ при $\alpha = -1$ и $y_i^{n+1} = y_{i+1}^n$ при $\alpha = 1$.)

Таким образом, проведенные предварительные исследования показывают, что явные обобщенные МРК применительно к интегрированию начальной задачи (1) обладают спектральной неустойчивостью, следствием чего является неустойчивость или условная устойчивость конечно-разностных схем, построенных на их основе после дискретизации задачи по пространственной переменной x (см. (17)). неявные же обобщенные МРК можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, функция устойчивости которых $R \equiv 1$ при $k \geq 0$. Конечно-разностные схемы, построенные на базе таких методов, могут оказаться неустойчивыми в пространстве C сеточных функций y_i^n , хотя могут быть и устойчивыми в энергетической норме (см. (28), (29)). Ко второй группе относятся методы, для которых $R < 1$ при $k > 0$ и $R = 1$ при $k = 0$. Есть основания предполагать, что конечно-разностные схемы, построенные на базе таких методов, будут обладать безусловной устойчивостью (см. (21), (22)), хотя окончательно этот вопрос для всех таких методов пока еще не решен.

Далее рассмотрим некоторые неявные обобщенные МРК, разделив их на две указанные группы. (Автор не претендует на рассмотрение всех известных неявных обобщенных МРК.)

Неявные обобщенные МРК с функцией устойчивости $R \equiv 1$. К этим методам, помимо одностадийного метода Гаусса – Лежандра и двухстадийного метода Лобатто IIIA, имеющих второй порядок точности по τ , относятся, например, следующие МРК четвертого порядка точности по τ .

Применение трехстадийного метода Лобатто IIIA к начальной задаче (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [3, 10]):

$$\begin{aligned} y^{n+1}(x) &= y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [Y_1'(x) + 4Y_2'(x) + Y_3'(x)], & Y_1(x) &= y^n(x), \\ Y_2(x) &= y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{24} [5Y_1'(x) + 8Y_2'(x) - Y_3'(x)], \\ Y_3(x) &= y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [Y_1'(x) + 4Y_2'(x) + Y_3'(x)]. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (30) следует

$$\begin{aligned} y^{n+1}(x) &= Y_3(x), \quad Y_2'(x) = \frac{\alpha}{2\tau} [4Y_2(x) + Y_3(x) - 5y^n(x)] - \frac{1}{2}(y^n(x))', \\ Y_3'(x) &= \frac{4\alpha}{\tau} [Y_3(x) - 2Y_2(x) + y^n(x)] + (y^n(x))'. \end{aligned} \quad (31)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$Z(x) \equiv Y_3(x) - y^n(x) = y^{n+1}(x) - y^n(x). \quad (32)$$

Тогда для $Z(x)$ на основании соотношений (31), (32) получим уравнение

$$\tau^2 Z''(x) - 6\alpha\tau Z'(x) + 12Z(x) = 12\alpha\tau(y^n(x))'. \quad (33)$$

Подставляя выражения (4), (5) в (32), (33) и учитывая (10), (11), после элементарных тригонометрических преобразований получим

$$R \equiv 1, \quad \sin \theta_n = \frac{12\alpha\tau\lambda(12 - \lambda^2)}{144 + 12\lambda^2 + \lambda^4}, \quad \cos \theta_n = 1 - \frac{72\lambda^2}{144 + 12\lambda^2 + \lambda^4}, \quad \lambda = \tau k. \quad (34)$$

Применение трехстадийного метода Лобатто IIIВ приводит к такой системе уравнений (см. [3, 10]):

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [Y_1'(x) + 4Y_2'(x) + Y_3'(x)],$$

$$Y_1(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [Y_1'(x) - Y_2'(x)],$$

$$Y_2(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [Y_1'(x) + 2Y_2'(x)],$$

$$Y_3(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [Y_1'(x) + 5Y_2'(x)],$$

откуда следует

$$Y_1'(x) = \frac{2\alpha}{\tau} [2Y_1(x) + Y_2(x) - 3y^n(x)], \quad Y_2'(x) = \frac{2\alpha}{\tau} [Y_2(x) - Y_1(x)], \quad (35)$$

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + 2[Y_2(x) - Y_1(x)]. \quad (36)$$

Из равенств (35) получаем

$$\tau^2 Y_2''(x) - 6\alpha\tau Y_2'(x) + 12Y_2(x) = 12y^n(x), \quad Y_1(x) = Y_2(x) - \frac{\alpha\tau}{2} Y_2'(x). \quad (37)$$

Подставляя выражения (4), (5) в (36), (37) и учитывая (10), (11), после некоторых преобразований вновь приходим к соотношениям (34).

Применение двухстадийного метода Гаусса - Лежандра приводит к системе уравнений (см. [3, 10])

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{2} [Y_1'(x) + Y_2'(x)],$$

$$Y_1(x) = y^n(x) + \alpha\tau \left[\frac{1}{4} Y_1'(x) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) Y_2'(x) \right],$$

$$Y_2(x) = y^n(x) + \alpha\tau \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) Y_1'(x) + \frac{1}{4} Y_2'(x) \right],$$

откуда следует

$$Y_1'(x) = \frac{3\alpha}{\tau} \left[Y_1(x) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) Y_2(x) - \frac{2}{\sqrt{3}} y^n(x) \right],$$

$$Y_2'(x) = \frac{3\alpha}{\tau} \left[Y_2(x) - \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) Y_1(x) + \frac{2}{\sqrt{3}} y^n(x) \right], \quad (38)$$

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + Z(x), \quad (39)$$

где

$$Z(x) \equiv \sqrt{3} [Y_2(x) - Y_1(x)]. \quad (40)$$

На основании (38) для функции $Z(x)$ получаем уравнение (33). Так как левая и правая части цепочки равенств (32) эквивалентны равенству (39), а функции $Z(x)$, определенные в (32), (40), удовлетворяют одному и тому же уравнению (33), то для двухстадийного метода Гаусса – Лежандра справедливы соотношения (34).

Таким образом, рассмотренные в настоящем разделе обобщенные МРК четвертого порядка точности по τ применительно к интегрированию начальной задачи (1) в рамках проблемы спектральной устойчивости приводят к одним и тем же результатам (34). Напомним: в предыдущем разделе было показано, что к одинаковым результатам приводят также одностадийный метод Гаусса – Лежандра (метод средней точки) и двухстадийный метод Лобатто IIIA (метод трапеций), имеющие второй порядок точности по τ .

Неявные обобщенные МРК с функцией устойчивости $R \leq 1$. В настоящем разделе рассматриваем МРК, для которых $R < 1$ при $k > 0$ и $R = 1$ при $k = 0$ (см. (4)–(8)). К этим методам, помимо одностадийного метода Радо ПА (неявного метода Эйлера), имеющего первый порядок точности по τ , относятся, например, следующие МРК более высоких порядков точности.

Применение двухстадийного метода Лобатто IIIC (второй порядок точности по τ) к начальной задаче (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [3, 10]):

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{2} [Y_1'(x) + Y_2'(x)],$$

$$Y_1(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{2} [Y_1'(x) - Y_2'(x)],$$

$$Y_2(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{2} [Y_1'(x) + Y_2'(x)],$$

откуда

$$Y_1'(x) = \frac{\alpha}{\tau} [Y_1(x) + Y_2(x) - 2y^n(x)],$$

$$Y_2'(x) = \frac{\alpha}{\tau} [Y_2(x) - Y_1(x)], \quad (41)$$

$$y^{n+1}(x) = Y_2(x). \quad (42)$$

Из системы (41) следует уравнение

$$\tau^2 Y_2''(x) - 2\alpha\tau Y_2'(x) + 2Y_2(x) = 2y^n(x). \quad (43)$$

Подставляя выражения (4), (5) в (42), (43) и учитывая (10), (11), после элементарных преобразований получим

$$R(\lambda) = \sqrt{\frac{4}{4 + \lambda^4}}, \quad \sin \theta_n = \frac{4\alpha\lambda}{R(\lambda)(4 + \lambda^4)},$$

$$\cos \theta_n = \frac{4 - 2\lambda^2}{R(\lambda)(4 + \lambda^4)}, \quad \lambda = \tau k. \quad (44)$$

Применение двухстадийного диагонального метода (метода Нёрсетта) приводит к системе уравнений (см. [3, 10])

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{2} [Y_1'(x) + Y_2'(x)], \quad Y_1(x) = y^n(x) + \alpha\tau\gamma Y_1'(x),$$

$$Y_2(x) = y^n(x) + \alpha\tau[\beta Y_1'(x) + \gamma Y_2'(x)], \quad \beta = 1 - 2\gamma. \quad (45)$$

При $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ получаем точность третьего порядка по τ , при остальных значениях γ – второго [3].

Из системы (45) следует

$$\begin{aligned} Y_1'(x) &= \frac{\alpha}{\gamma\tau} [Y_1(x) - y^n(x)], \\ Y_2'(x) &= \frac{\alpha}{\gamma\tau} \left\{ Y_2(x) - y^n(x) - \frac{\beta}{\gamma} [Y_1(x) - y^n(x)] \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \frac{1}{2\gamma} \left[Y_2(x) - \frac{\chi}{\gamma} Y_1(x) + \frac{\delta}{\gamma} y^n(x) \right], \quad (47)$$

где

$$\delta = 1 - 4\gamma, \quad \chi = 1 - 3\gamma. \quad (48)$$

Подстановка выражений (4), (5) в (46), (47) и представление функций $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ в виде, аналогичном (4), (5), после элементарных тригонометрических преобразований с учетом (10), (11) приводит к равенствам

$$R(\lambda) = \frac{\sqrt{[\psi(1 + \lambda^2)^2 + \beta(1 - \lambda^2) - 2\chi(1 + \lambda^2)]^2 + 4\lambda^2[\beta - \chi(1 + \lambda^2)]^2}}{2\gamma^2(1 + \lambda^2)^2}, \quad (49)$$

$$\sin \theta_n = \frac{\lambda[\beta - \chi(1 + \lambda^2)]}{\gamma^2 R(\lambda)(1 + \lambda^2)^2},$$

$$\cos \theta_n = \frac{\psi(1 + \lambda^2)^2 + \beta(1 - \lambda^2) - 2\chi(1 + \lambda^2)}{2\gamma^2 R(\lambda)(1 + \lambda^2)^2},$$

$$\psi = 1 - 4\gamma + 2\gamma^2, \quad \lambda = \alpha\gamma\tau k. \quad (50)$$

Расчеты показали, что, согласно (49), с учетом (48) функция устойчивости $R(\lambda)$ при $0 \leq |\lambda| < \infty$ (или, что то же самое, при $0 \leq k < \infty$) монотонно изменяется от 1 до значения

$$R_\infty = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda) = \left| 1 + \frac{1 - 4\gamma}{2\gamma^2} \right|. \quad (51)$$

Из (51) следует, что при $\gamma \geq 1/2$ выполняются неравенства $R_\infty \leq 1$, $R_\infty \leq R(\lambda) \leq 1$, т.е. имеет место спектральная устойчивость метода Нёрсетта (в частности, при $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} > \frac{1}{2}$ получаем $R_\infty = 0.7321$ и третий порядок точности по τ), а при $\gamma < 1/2$ из (51) имеем $R_\infty > 1$, т.е. метод спектрально неустойчив.

Применение двухстадийного метода Радо IA (третий порядок точности по τ) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [3, 10])

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{4} [Y_1'(x) + 3Y_2'(x)],$$

$$Y_1(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{4} [Y_1'(x) - Y_2'(x)],$$

$$Y_2(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{4} \left[Y_1'(x) + \frac{5}{3} Y_2'(x) \right],$$

откуда

$$Y_1'(x) = \frac{\alpha}{2\tau} [5Y_1(x) + 3Y_2(x) - 8y^n(x)],$$

$$Y_2'(x) = \frac{3\alpha}{2\tau} [Y_2(x) - Y_1(x)], \quad (52)$$

$$y^{n+1}(x) = \frac{1}{2} [3Y_2(x) - Y_1(x)]. \quad (53)$$

Из системы (52) следует уравнение

$$\tau^2 Y_2''(x) - 4\alpha\tau Y_2'(x) + 6Y_2(x) = 6y^n(x). \quad (54)$$

Подстановка выражений (4), (5) в (52)–(54) и представление функций $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ в виде, аналогичном (4), (5), после элементарных преобразований с учетом (10), (11) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \sqrt{\frac{36 + 4\lambda^2}{36 + 4\lambda^2 + \lambda^4}}, & \theta_n &= \Theta_n + \Psi_n, \\ \sin \Psi_n &= \frac{24\alpha\lambda}{\Delta(\lambda)(36 + 4\lambda^2 + \lambda^4)}, \\ \cos \Psi_n &= \frac{36 - 6\lambda^2}{\Delta(\lambda)(36 + 4\lambda^2 + \lambda^4)}, & \Delta(\lambda) &= \sqrt{\frac{36}{36 + 4\lambda^2 + \lambda^4}}, \\ \sin \Theta_n &= \frac{\alpha\lambda}{3\delta(\lambda)}, & \cos \Theta_n &= \frac{1}{\delta(\lambda)}, \\ \delta(\lambda) &= \sqrt{\frac{9 + \lambda^2}{9}}, & \lambda &= \tau k. \end{aligned} \quad (55)$$

Применение двухстадийного метода Радо ПА (третий порядок точности по τ) приводит к уравнениям (см. [3, 10])

$$\begin{aligned} y^{n+1}(x) &= y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{4} [3Y_1'(x) + Y_2'(x)], \\ Y_1(x) &= y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{4} \left[\frac{5}{3} Y_1'(x) - \frac{1}{3} Y_2'(x) \right], \\ Y_2(x) &= y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{4} [3Y_1'(x) + Y_2'(x)], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} Y_1'(x) &= \frac{\alpha}{2\tau} [3Y_1(x) + Y_2(x) - 4y^n(x)], \\ Y_2'(x) &= \frac{\alpha}{2\tau} [5Y_2(x) - 9Y_1(x) + 4y^n(x)], \end{aligned} \quad (56)$$

$$y^{n+1}(x) = Y_2(x). \quad (57)$$

Из системы (56) следует уравнение

$$\tau^2 Y_2''(x) - 4\alpha\tau Y_2'(x) + 6Y_2(x) = 6y^n(x) + 2\alpha\tau(y^n(x))'. \quad (58)$$

Подставляя выражения (4), (5) в (57), (58) и учитывая (10), (11), после элементарных преобразований получим равенства

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \sqrt{\frac{1296 + 288\lambda^2 + 52\lambda^4 + 4\lambda^6}{1296 + 288\lambda^2 + 88\lambda^4 + 8\lambda^6 + \lambda^8}}, \\ \sin \theta_n &= \frac{2\alpha\lambda(18 - \lambda^2)}{R(\lambda)(36 + 4\lambda^2 + \lambda^4)}, \\ \cos \theta_n &= \frac{36 - 14\lambda^2}{R(\lambda)(36 + 4\lambda^2 + \lambda^4)}, & \lambda &= \tau k. \end{aligned} \quad (59)$$

Применение трехстадийного метода Лобатто ПИС (четвертый порядок точности по τ) приводит к системе уравнений (см. [3, 10])

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [Y_1'(x) + 4Y_2'(x) + Y_3'(x)],$$

$$Y_1(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [Y_1'(x) - 2Y_2'(x) + Y_3'(x)],$$

$$Y_2(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [2Y_1'(x) + 5Y_2'(x) - Y_3'(x)],$$

$$Y_3(x) = y^n(x) + \frac{\alpha\tau}{6} [Y_1'(x) + 4Y_2'(x) + Y_3'(x)],$$

откуда

$$Y_1'(x) = \frac{\alpha}{\tau} [3Y_1(x) + 4Y_2(x) - Y_3(x) - 6y^n(x)],$$

$$Y_2'(x) = \frac{\alpha}{\tau} [Y_3(x) - Y_1(x)],$$

$$Y_3'(x) = \frac{\alpha}{\tau} [Y_1(x) - 4Y_2(x) + 3Y_3(x)]; \quad (60)$$

$$y^{n+1}(x) = Y_3(x). \quad (61)$$

Из системы (60) вытекает уравнение

$$\begin{aligned} \tau^3 Y_3'''(x) - 6\alpha\tau^2 Y_3''(x) + 18\tau Y_3'(x) - 24\alpha Y_3(x) = \\ = -24\alpha y^n(x) - 6\tau(y^n(x))'. \end{aligned} \quad (62)$$

Подставляя выражения (4), (5) в (61), (62) и учитывая (10), (11), после элементарных тригонометрических преобразований получим равенства

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \sqrt{\frac{331776 + 41472\lambda^2 + 1296\lambda^4 + 576\lambda^6 + 36\lambda^8}{331776 + 41472\lambda^2 + 1296\lambda^4 + 1152\lambda^6 + 72\lambda^8 + \lambda^{12}}}, \\ \sin \theta_n &= \frac{12\alpha\lambda(48 - 5\lambda^2)}{R(\lambda)(576 + 36\lambda^2 + \lambda^6)}, \\ \cos \theta_n &= \frac{576 - 252\lambda^2 + 6\lambda^4}{R(\lambda)(576 + 36\lambda^2 + \lambda^6)}, \quad \lambda = \tau k. \end{aligned} \quad (63)$$

Для всех рассмотренных выше обобщенных МРК после дискретизации начальной задачи (1) по времени t были получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений по пространственной переменной x (см. (19), (24), (31), (35), (38), (41), (46), (52), (56), (60)). Интегрируя эти системы уравнений численно с применением обычных МРК [3], будем получать конечно-разностные схемы численного интегрирования начально-краевой задачи для уравнения переноса (подобно тому, как схемы (21), (22) и (28), (29) были получены из дифференциальных уравнений (19) и (24) соответственно). При этом совершенно не обязательно для дискретизации (по переменной x) указанных систем уравнений использовать те же МРК, что были использованы до того для дискретизации задачи (1) по времени t . Эта возможность существенно расширяет семейство конечно-разностных схем, которые можно получить на базе МРК для численного интегрирования начально-краевой задачи для уравнения переноса. Исследование устойчивости получающихся таким образом конечно-разностных схем является самостоятельной проблемой вычислительной математики, которая выходит за рамки настоящей работы.

Обсуждение результатов расчетов. Для апробации полученных выше схем интегрирования начальной задачи (1) рассмотрим случай $\alpha = -1$ при начальном условии

$$y_0(x) = \sum_{m=0}^M \frac{8}{k_m} \sin(k_m x), \quad k_m = 2\pi(2m+1), \quad M = 0, 1, 2, \dots, \quad (64)$$

которое представляет собой конечную сумму гармоник.

Сравнивая (64) и (4) при $n = 0$, получим

$$q_0^{(m)} = \frac{8}{k_m}, \quad \varphi_0^{(m)} = 0, \quad 0 \leq m \leq M. \quad (65)$$

Согласно (64), функция $y_0(x)$ является частичной суммой ряда Фурье для периодической ступенчатой функции

$$z(x) = \begin{cases} -1, & -\frac{1}{2} + \ell \leq x < \ell, \\ +1, & \ell \leq x < \frac{1}{2} + \ell, \end{cases} \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (66)$$

с периодом $X = 1$. Точное решение начальной задачи Коши (1), (64) в силу (2) имеет вид

$$y(t, x) = \sum_{m=0}^M \frac{8}{k_m} \sin(k_m(x-t)). \quad (67)$$

Из равенства (67) следует, что на прямых $x-t = \ell/2$ частные производные по модулю

$$\left| \frac{\partial y}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = 8 \left| \sum_{m=0}^M \cos(\pi(2m+1)\ell) \right| = 8(M+1), \quad x-t = \frac{\ell}{2}, \quad (68)$$

а модуль градиента решения в этих точках равен $8\sqrt{2}(M+1)$.

Следовательно, с увеличением M модуль градиента возрастает и уже при $M = 4$ его можно считать большим по сравнению со значениями модуля функции (67). Кроме того, известно, что в окрестности точки разрыва функции (66) ее разложение (64) имеет неустранимые «пики» (эффект Гиббса), и чем больше значение M , тем больше вторые производные от $y_0(x)$ в точках, соответствующих этим пикам. А значит, решение рассматриваемой начальной задачи (1), (64) при больших M обладает не только большими по модулю производными первого порядка (68), но и большими по модулю производными высших порядков (локальные эффекты).

В качестве конкретного примера рассмотрим случай $M = 29$. При этом максимальные значения модуля градиента решения больше 330, а модуль функции (67) с учетом эффекта Гиббса не превосходит значения 1.2, т.е. градиенты решения являются большими и периодически повторяющимися. Именно на задачах с такими особенностями решения целесообразно апробировать обобщенные МРК (особенно высоких порядком точности), позволяющих выяснить достоинства и недостатки этих методов, которые трудно оценить на весьма гладких (типа одной гармоники) решениях начальной задачи (1).

Согласно (4), (5), (64), (65), в момент времени t_n все исследованные выше обобщенные МРК дают решение рассматриваемой начальной задачи в виде

$$y^n(x) = \sum_{m=0}^M q_n^{(m)} \sin(k_m x + \varphi_n^{(m)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (69)$$

Учитывая (7), оценим норму решения (69) в пространстве C :

$$\|y^n\|_C = \max_x |y^n| \leq \sum_{m=0}^M |q_n^{(m)}| \cdot |\sin(k_m x + \varphi_n^{(m)})| \leq \sum_{m=0}^M |q_n^{(m)}|. \quad (70)$$

На основании (8), (70) при постоянном шаге по времени τ получаем

$$\|y^n\|_C \leq \sum_{m=0}^M |q_n^{(m)}| = \sum_{m=0}^M [R(\tau k_m)]^n |q_0^{(m)}| \equiv S_M^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (71)$$

где $q_0^{(m)}$ имеют значения (65). (В расчетах шаг τ выбирался так, чтобы 10 шагов по времени были равны периоду колебаний высшей гармоники в решении (67), т.е. при $m = M$.)

Если функция устойчивости $R(\tau k_m)$ обобщенного МРК такова, что $R \equiv 1$, то из (71) следует

$$\|y^n\|_C \leq S_M^0 \equiv \sum_{m=0}^M q_0^{(m)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (72)$$

Согласно (72), норма решения при $n \rightarrow \infty$ остается ограниченной сверху числом S_M^0 , т.е. метод является устойчивым, но приближенное решение (69) при этом может существенно отличаться от точного решения (67). Так, при $M = 29$ из (72) следует $\|y^n\|_C \leq 3.415$, а норма точного решения $\|y\|_C \approx 1.179$. (Этот факт продемонстрирован ниже на конкретном примере.)

В силу (72), (64), (65) при $M \rightarrow \infty$ получаем $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M^0 \rightarrow \infty$, т.е. с увеличением числа слагаемых в разложении (64) (с увеличением градиентов решения (68)) возрастает вероятность все более существенного расхождения точного и численного решений (вплоть до полной потери точности).

Если же функция устойчивости $R(\tau k_m)$ обобщенного МРК такова, что $R < 1$ при $k_m > 0$, то из (71) с учетом (72) вытекает

$$\|y^n\|_C \leq S_M^n < S_M^0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (73)$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} S_M^n \rightarrow 0$ (асимптотическая устойчивость). Следовательно, при использовании подобных МРК разность точного и приближенного решений при достаточно больших n в худшем случае будет порядка нормы точного решения. По-видимому, именно таким обобщенным МРК целесообразно отдавать предпочтение. Продемонстрируем это на примере конкретных расчетов.

На рис. 3 – рис. 5 приведены точное (кривые 1) и приближенные (остальные линии) решения начальной задачи (1), (64) в точке $x = 0$ при малых (рис. 3а, 4а и 5а) и больших (рис. 3б, 4б и 5б) значениях времени t .

Так как точное решение является периодическим с периодом $T = X = 1$ (равным периоду колебаний низшей гармоники при $m = 0$, см. (64)), то внутри каждого периода колебаний целесообразно ввести локальное время t_* ($0 \leq t_* < T = 1$). Тогда глобальное t и локальное t_* время связаны между собой соотношением

$$t = t_* + TN = t_* + N, \quad 0 \leq t_* < 1, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (74)$$

где N – количество периодов колебаний низшей гармоники, предшествующих рассматриваемому периоду.

На рис. 3 – рис. 5, согласно (74), по оси абсцисс отложено локальное время t_* и для каждого из рис. 3 – рис. 5 указано свое значение N : $N = 0$ для рис. 3а (окрестность начального момента времени $t = 0$); $N = 50$ для рис. 4а и 5а (относительно малые значения времени t); $N = 5 \cdot 10^4$ для рис. 3б, рис. 4б и рис. 5б (большие значения времени t).

На рис. 3 изображены приближенные решения начальной задачи (1), (64), полученные на базе обобщенных МРК низких порядков точности: кривые 2 рассчитаны методом средней точки и совпадают с расчетами по методу трапеций (второй порядок точности и функция устойчивости $R \equiv 1$),

линии 3 определены на основе двухстадийного метода Лобатто ППС (второй порядок точности и $R < 1$), а кривые 4 – на основе неявного метода Эйлера (первый порядок точности и $R < 1$). Согласно поведению кривых 2, 3 на рис. 3а, уже на начальном участке времени ($N = 0$, см. (74)) метод средней точки и двухстадийный метод Лобатто ППС приводят к резкому увеличению «пиковых» значений (экстремумов) в окрестности точек $t_* \approx 0.5$ и $t_* \approx 1$ соответственно (т. е. в окрестности точек, в которых точное решение (67) имеет большие по модулю градиенты (68)). Поведение же кривых 2, 3 на рис. 3б показывает, что, согласно проведенному выше анализу (см. (70)–(72)), при больших значениях времени t метод средней точки приводит к полной потере точности (см. кривые 1 и 2 на рис. 3б), а метод Лобатто ППС отслеживает решение лишь в некотором «общем смысле». Последнее объясняется тем, что, согласно (44), (69), (71), все высшие гармоники при таких больших значениях t уже затухли и приближенное решение, по сути, определяется лишь низшей гармоникой ($m = 0$), амплитуда которой также со временем затухает, поэтому кривая 3 на рис. 3б уже не отслеживает локальных эффектов, присущих точному решению (см. кривую 1).

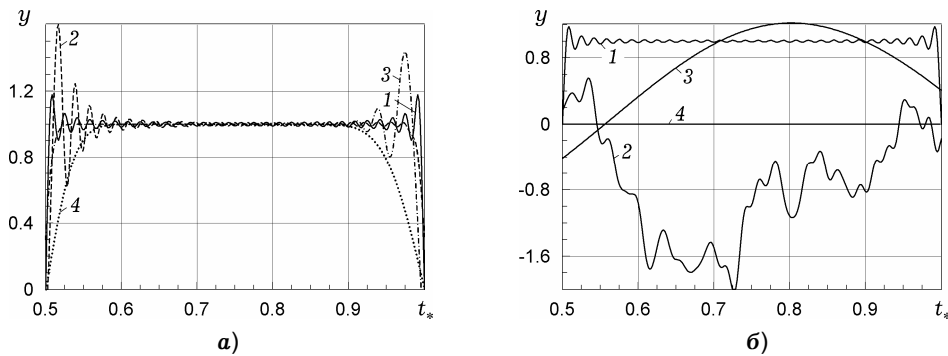


Рис. 3

Отметим, что поведение, аналогичное кривой 2 на рис. 3а, характерно и для численного решения, полученного по схеме (28) при $H \neq 1$ (см. кривую 4 на рис. 2 в [10]), которая, как показано в [10], неустойчива в норме пространства S сеточных функций y_i^n при $H \neq 1$.

Кривая 4 на рис. 3а показывает, что неявный метод Эйлера (см. (19)) уже на начальном этапе «отслеживает» только общую (в некотором усредненном смысле) тенденцию поведения решения задачи (1), (64), но не отражает локальных особенностей точного решения (67), в частности, не выделяет локальных экстремумов. Это вызвано быстрым затуханием высших гармоник в разложении (69) при выбранном шаге по времени τ . С увеличением времени t , согласно (20), (69), это приближенное решение достаточно быстро затухает, поэтому на рис. 3б линия 4 визуально не отличается от горизонтальной прямой $y = 0$ (значения y^n имеют порядок 10^{-8}).

Отметим, что поведение, аналогичное кривой 4 на рис. 3, характерно и для численного решения, полученного по схеме (21) при $\tau/\Delta \neq 1$ (см. кривые 2, 3 на рис. 2 в [10]), которая безусловно устойчива в норме пространства S сеточных функций y_i^n [10, 11].

На рис. 4 изображены приближенные решения начальной задачи (1), (64), полученные обобщенными МРК четвертого порядка точности по τ : кривые 2 определены двухстадийным методом Гаусса – Лежандра, трехстадийным методом Лобатто ППА и трехстадийным методом Лобатто ППВ (согласно вышеизложенному, все три метода приводят к одному и тому же результату (34), причем $R \equiv 1$); линии 3 рассчитаны трехстадийным методом Лобатто ППС (согласно (63), $R < 1$ при $k_m > 0$).

В силу высокого порядка точности этих методов в окрестности начального момента времени (при малых значениях N в (74)) приближенные решения визуально практически не отличаются от точного решения. С увеличением N в окрестности точек с большими градиентами решения (68) отличие приближенных решений от точного (кривые 1) возрастает и после нескольких десятков колебаний низшей гармоники в решении (67) становится весьма заметным. Это отчетливо наблюдается на рис. 4а (при $N = 50$).

Так как кривые 2 на рис. 4 отвечают обобщенным МРК, для которых $R \equiv 1$, то, согласно оценке (72), при больших значениях времени t приближенное решение может существенно отличаться от точного. Последнее нашло свое отражение на рис. 4б (при $N = 5 \cdot 10^4$), где кривая 2 значительно отличается от точного решения и на ней отчетливо проявляется тенденция к образованию «биений» в приближенном решении. Это, в конце концов, может привести к ситуации, аналогичной той, что характеризуется кривой 2 на рис. 3б.

Амплитуды гармоник решения (69), соответствующего кривой 3 на рис. 4, со временем затухают (так как для метода Лобатто ПС $R < 1$), поэтому аналогичных резких «биений» на кривой 3 рис. 4б не наблюдается. Незатухшие к этому времени низшие гармоники определяют приближенное решение, которое колеблется в некоторой малой окрестности точного решения.

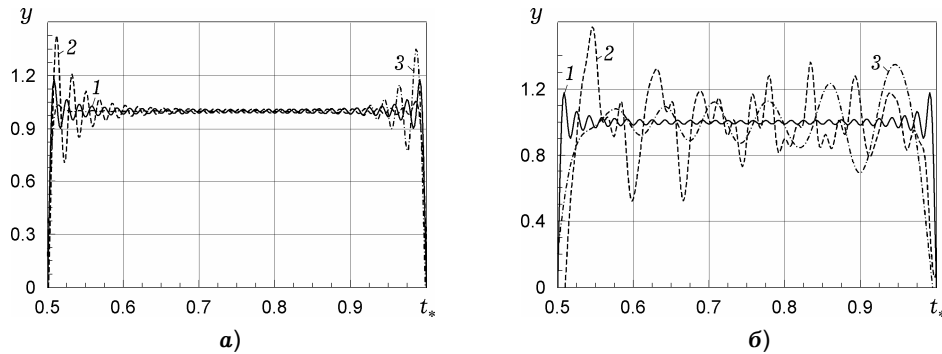


Рис. 4

На рис. 5 изображены приближенные решения начальной задачи (1), (64), полученные обобщенными МРК третьего порядка точности по τ : кривые 2 определены двухстадийными методами Радо IA и Радо IIA (несмотря на различие формул (55), (59), соответствующие расчетные кривые визуально неразличимы); линии 3 рассчитаны двухстадийным диагональным методом (методом Нёрсетта, см. (49), (50)).

В силу высокого порядка точности этих методов в окрестности начального момента времени (при малых значениях N в (74)) приближенные решения визуально практически не отличаются от точного решения. Так как для этих методов функция устойчивости $R < 1$ при $k_m > 0$, то с увеличением времени t высшие гармоники в разложении (69) затухают и приближенные решения описывают точное лишь в некотором усредненном смысле, как, например, на рис. 5а ($N = 50$). При этом не возникают «биения», характерные для приближенных решений, изображенных на рис. 4 (хотя порядок точности этих решений выше). Согласно (55), (59), (49), с течением времени все гармоники в решении (69) затухают, и при весьма больших значениях времени t приближенные решения, полученные двухстадийными методами Радо IA, Радо IIA и Нёрсетта, существенно отличаются от точного (см. рис. 5б, полученный при $N = 5 \cdot 10^4$).

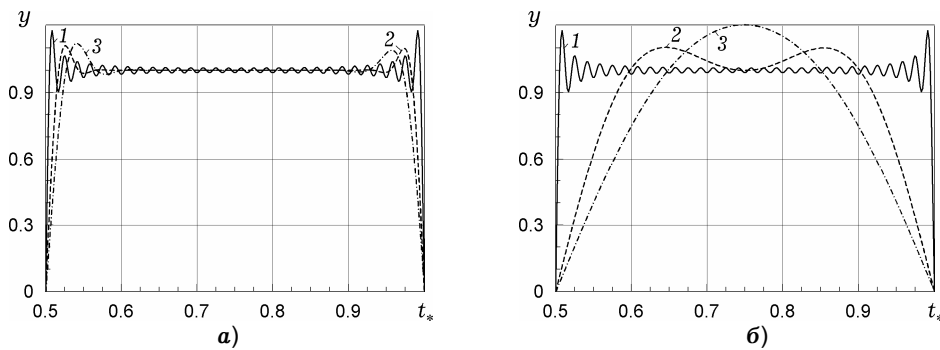


Рис. 5

Сопоставление приближенных решений, изображенных на рис. 3 – рис. 5, с точными решениями начальной задачи (1), (64) позволяет сделать вывод о том, что, по-видимому, для численного решения этой задачи при больших значениях времени целесообразно использовать двухстадийные методы Радо IA или Радо IIA, или Нёрсетта (рис. 5). Преимущество метода Нёрсетта заключается в том, что он является диагональным, т.е. система уравнений (46) может быть проинтегрирована последовательно по пространственной переменной x . Использование же методов Радо IA и Радо IIA требует интегрирования систем двух уравнений (52) или (56), которые не распадаются на отдельные уравнения, но зато эти методы обеспечивают несколько лучшую точность приближенного решения.

Заключение. Проведенные в настоящей работе исследования показывают, что все рассмотренные неявные обобщенные МРК обладают спектральной устойчивостью применительно к интегрированию начальной задачи для уравнения переноса. Функции устойчивости для некоторых из этих методов тождественно равны единице, а для остальных методов меньше единицы при непостоянных начальных условиях. Выполненный сравнительный анализ приближенных решений начальной задачи для уравнения переноса, полученных обобщенными МРК разных порядков точности, показывает, что в случае сложно осциллирующих начальных условий с большими по модулю производными первого и высших порядков целесообразно использовать двухстадийные методы Радо IA или Радо IIA, или же диагональный метод Нёрсетта, имеющие третий порядок точности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

1. Абрисимов Н. А., Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. – 400 с.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: В 2 т. – Москва: Физматгиз, 1959. – Т. II. – 620 с.
3. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1988. – 334 с.
То же: Dekker K., Verwer J. G. Stability of Runge – Kutta methods for stiff nonlinear differential equation. – Amsterdam e. c.: North-Holland, 1984.
4. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.
5. Кузьмин М. А., Лебедев Д. Л., Попов Б. Г. Прочность, жесткость, устойчивость элементов конструкций. Теория и практикум. Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций: учеб. пособие. – Москва: Изд-во МГТУ им. В. Э. Баумана, 2012. – 341 с.
6. Лисейкин В. Д., Шокин Ю. И., Васева И. А., Лиханова Ю. В. Технология построения разностных сеток. – Новосибирск: Наука, 2009. – 414 с.
7. Найфе А. Введение в методы возмущений. – Москва: Мир, 1984. – 536 с.
То же: Nayfeh A. Introduction to perturbation techniques. – New York: Wiley-Intersci., 1981. – 519 p.
8. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Динамический вязкопластический изгиб армированных стержней переменного поперечного сечения // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С. 53–66.

9. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге – Кутты // Вычисл. технологии. – 2004. – 9, № 4. – С. 77–95.
10. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Численное интегрирование начально-краевых задач с большими градиентами решения обобщенными методами Рунге – Кутты // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 43–62.
11. Самарский А. А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
12. Янковский А. П. Вязкопластическая динамика металлокомпозитных оболочек слоисто-волоконистой структуры при действии нагрузок взрывного типа. I. Постановка задачи и метод решения // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 2. – С. 119–130.
То же: Yankovskii A. P. Viscoplastic dynamics of metallic composite shells of layered-fibrous structure under the action of loads of explosive type. I. Statement of the problem and method for solution // J. Math. Sci. – 2013. – 192, No. 6. – P. 623–633.
13. Bathe K.-J. Finite element procedures. – New Jersey: Prentice Hall, 1996. – 1050 p.
14. Frey P. J., George P. L. Mesh generation, application to finite elements. – Paris, Oxford: Hermes Sci. Publ., 2000.
15. Huang W. Variational mesh adaptation: isotropy and equidistribution // J. Comput. Phys. – 2001. – 174, No. 2. – P. 903–924.
16. Zeinkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.

ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ МЕТОДІВ РУНГЕ – КУТТА СТОСОВНО ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ

Досліджено спектральну стійкість узагальнених методів Рунге – Кутта різних порядків точності при застосуванні до чисельного інтегрування початкової задачі для рівняння переносу. Проведено порівняння наближених розв'язків, отриманих на основі різних узагальнених методів Рунге – Кутта, з точним розв'язком при складно осцилюючих початкових умовах з великими за модулем похідними. Показано, що деякі класичні скінченно-різницеві схеми інтегрування початково-крайової задачі для рівняння переносу є наслідком послідовного застосування узагальнених і звичайних методів Рунге – Кутта за всіма незалежними змінними.

STUDY OF SPECTRAL STABILITY OF GENERALIZED RUNGE – KUTTA METHOD AS APPLIED TO INITIAL PROBLEM FOR THE TRANSFER EQUATION

Spectral stability of generalized Runge – Kutta methods of different orders of accuracy is studied as are applied to the numerical integration of initial problem for the transfer equation. Comparison of approximate solutions obtained on the basis of different generalized Runge – Kutta methods, with the exact solution under a complex oscillating initial conditions with large modulo derivatives is made. It is shown that some classical finite-difference schemes of integration of initial-boundary value problem for the transfer equation are the result of the consistent application of generalized and ordinary Runge – Kutta methods with respect to all independent variables.

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
03.10.13