

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ: УМОВИ ЗАСТОСУВАННЯ, ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ, АНАЛІЗ БІФУРКАЦІЙ

Для нелінійних систем типу реакції-дифузії запропоновано методикку побудови та аналізу розв'язків на основі методу малого параметра. Описана методика не лише дозволяє отримати аналітично наближені квазігармонічні малоамплітудні розв'язки, які виникають внаслідок біфуркації просторово-однорідних станів системи, але і визначити тип біфуркації в системі. Наведено приклади застосування цього підходу до аналізу біфуркацій і побудови розв'язків конкретної математичної моделі реакції-дифузії.

Вступ. Основу математичних моделей, які описують процеси в багатьох активних середовищах, складають макроскопічні рівняння матеріального балансу

$$\tau_i \frac{\partial U_i}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^N D_{ij} \operatorname{grad} (U_j) - v_i U_i \right) + F_i(U_1, U_2, \dots, U_i, \dots, U_N, A), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

в яких функції U_i описують властивості фізичного, хімічного, біологічного чи іншого середовища [1, 10, 11], а коефіцієнти v_i і D_{ij} – напрямлену швидкість руху та дифузю елементів цих середовищ, відповідно. Особливістю математичних моделей саме активних середовищ є те, що джерела системи F_i є суттєво нелінійними функціями від U_i та деякого зовнішнього параметра A , який може змінювати умови стійкості системи [1, 10]. Формально система (1) представляє собою систему автономних нелінійних рівнянь параболічного типу, в якій щонайменше за однією змінною $U_i = \theta$ (активатором) здійснюється додатний зворотний зв'язок. Наявність такого зворотного зв'язку приводить до зростання цієї змінної і є причиною нестійкості однорідного стану системи. Процес зростання змінної-активатора $U_i = \theta$ знаходиться під контролем щонайменше одної іншої змінної $U_j = \eta$ (інгібітора), яка стримує зростання активатора. Тому в найпростішому, але достатньо загальному випадку, якісні, а часто й основні кількісні характеристики системи (1) можуть бути отримані на основі базової просторово-одновимірної моделі реакції-дифузії другого порядку [10]

$$\tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = \ell^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - q(\theta, \eta, A), \quad (2')$$

$$\tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = L^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - Q(\theta, \eta, A), \quad (2'')$$

де τ_θ , τ_η та ℓ , L – характерні часи і довжини зміни активатора і інгібітора, відповідно, а $q(\theta, \eta, A)$, $Q(\theta, \eta, A)$ – нелінійні джерела, для яких у деякому діапазоні зміни параметра A виконуються умови $q'_\theta \equiv \partial q / \partial \theta < 0$, $Q'_\eta \equiv \partial Q / \partial \eta > 0$, які відображають описані вище зворотні зв'язки.

Внаслідок біфуркації просторово-однорідних розв'язків в системі (2) може виникати складна нелінійна динаміка і в загальному випадку її можна дослідити лише за допомогою чисельних методів. Проте у часткових ви-

падках, коли внаслідок біфуркації в системі (2) виникають малоамплітудні квазігармонічні розв'язки, їх з достатньою точністю можна отримати в аналітичному вигляді із застосуванням методу малого параметра.

Метод малого параметра: умови застосування і схема побудови наближених розв'язків. Схема побудови періодичних за просторовою координатою розв'язків для базової моделі (2) (як і для загальної системи (1)) подібна до схеми побудови розв'язків у теорії нелінійних коливань [5, 11]. Завдячуючи тому, що період квазігармонічних розв'язків, як правило, задається граничними умовами, то амплітуда цих розв'язків визначається однозначно значенням параметра біфуркації. В системі реакції-дифузії (2) на відрізку $[0, L_x]$ при граничних умовах Неймана період таких розв'язків повинен бути рівним $2L_x/k$, де k – ціле число. Тому потрібно відшукати амплітуду і форму періодичного розв'язку, для якого ця умова задовольняється. Пропонуємо підхід з використанням методу послідовних наближень, який може бути зреалізований при наявності малих параметрів у системі. За малий параметр вибираємо відхилення біфуркаційного параметра A від його критичного значення A_c , при якому стаціонарні просторово-однорідні розв'язки втрачають стійкість. Часткові варіанти застосування схеми такого типу до нелінійних систем запропоновано в [3, 11]. У статті схему розширено для дослідження базових нелінійних систем реакції-дифузії загального вигляду. Представлене узагальнення методу дозволяє не лише отримати аналітично наближені розв'язки для загальних систем реакції-дифузії, але й дає інформацію про тип галуження розв'язків у точці біфуркації.

Основну ідею і суть цього методу сформулюємо у вигляді теореми, конструктивне доведення якої демонструє загальну схему побудови та аналізу наближених розв'язків.

Теорема. *Нехай в системі (2), визначеній за просторовою змінною x на відрізку $[0, L_x]$, нелінійні функції $q(\theta, \eta, A)$, $Q(\theta, \eta, A)$ належать до $C_{\theta, \eta}^{(3)}$, а відхилення $\tilde{\theta} = \theta - \theta_c$, $\tilde{\eta} = \eta - \eta_c$, $\tilde{A} = A - A_c$ розв'язку системи θ , η , A від критичних значень θ_c , η_c , A_c , що відповідають точці біфуркації стаціонарного просторово-однорідного розв'язку, є малими величинами. Тоді при обмеженні у розкладі нелінійних джерел системи за степенями цих відхилень третім порядком малості:*

$$q(\theta, \eta, A) = \sum_{i,j=0}^{i+j=3} q_{ij} \tilde{\theta}^i \tilde{\eta}^j + q_A \tilde{A} + q_{1A} \tilde{A} \tilde{\theta} + q_{1A} \tilde{A} \tilde{\eta},$$

$$Q(\theta, \eta, A) = \sum_{i,j=0}^{i+j=3} Q_{ij} \tilde{\theta}^i \tilde{\eta}^j + Q_A \tilde{A} + Q_{1A} \tilde{A} \tilde{\theta} + Q_{1A} \tilde{A} \tilde{\eta},$$

наближений розв'язок системи (2) можна подати у вигляді розкладу за степенями цих відхилень, а тип біфуркації цього просторово-однорідного розв'язку системи визначається знаком відношення P/R , де

$$P = 2[2g_3(q_{20} + \zeta Q_{20}) + (g_6 + \xi g_3)(q_{11} + \zeta Q_{11}) + 2\xi g_6(q_{02} + \xi Q_{02}) + q_{1A} + \xi q_{A1} + \zeta(Q_{1A} + \xi Q_{A1})],$$

$$R = 2g_1(q_{20} + \zeta Q_{20}) + (g_4 + \xi g_1)(q_{11} + \zeta Q_{11}) + 2\xi g_4(q_{02} + \zeta Q_{02}) + 2[2g_2(q_{20} + \zeta Q_{20}) + (g_5 + \xi g_2)(q_{11} + \zeta Q_{11}) + 2\xi g_5(q_{02} + \zeta Q_{02})] + (3/2)[q_{30} + \zeta Q_{30} + (q_{21} + \zeta Q_{21})\xi + (q_{12} + \zeta Q_{12})\xi^2 + (q_{03} + \zeta Q_{03})\xi^3],$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{q_{01}C - (Q_{01} + 4k^2L^2)B}{16k^4\ell^2L^2 + 4k^2(q_{10}L^2 + Q_{01}\ell^2) - q_{01}Q_{10} + Q_{01}q_{10}}, \\
g_2 &= \frac{q_{01}D - Q_{01}B}{Q_{01}q_{10} - Q_{10}q_{01}}, \quad g_3 = \frac{q_{01}Q_A - Q_{01}q_A}{Q_{01}q_{10} - Q_{10}q_{01}}, \\
g_4 &= \frac{Q_{10}B - (q_{10} + 4k^2\ell^2)C}{16k^4\ell^2L^2 + 4k^2(q_{10}L^2 + Q_{01}\ell^2) - q_{01}Q_{10} + Q_{01}q_{10}}, \\
g_5 &= \frac{Q_{10}B - q_{10}C}{Q_{01}q_{10} - Q_{10}q_{01}}, \quad g_6 = \frac{Q_{10}q_A - q_{10}Q_A}{Q_{01}q_{10} - Q_{10}q_{01}}, \\
B &= \frac{q_{20} + q_{11}\xi + q_{02}\xi^2}{2}, \quad C = \frac{Q_{20} + Q_{11}\xi + Q_{02}\xi^2}{2},
\end{aligned}$$

q_{ij} , Q_{ij} , – коефіцієнти розкладу, $i, j = 0, \dots, 3$. При $P/R > 0$ біфуркація є закритичною, а при $P/R < 0$ – докритичною.

Д о в е д е н н я. Вважаючи відхилення $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$, μ малими величинами, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$, $\mu \ll 1$, розкладемо нелінійні функції $q(\theta, \eta, A)$, $Q(\theta, \eta, A)$ в ряд за степенями цих відхилень, обмежувачись третім порядком малості:

$$q(\theta, \eta, A) = \sum_{i,j=0}^{i+j=3} q_{ij} \tilde{\theta}^i \tilde{\eta}^j + q_A \mu + q_{1A} \mu \tilde{\theta} + q_{A1} \mu \tilde{\eta}, \quad (3)$$

$$Q(\theta, \eta, A) = \sum_{i,j=0}^{i+j=3} Q_{ij} \tilde{\theta}^i \tilde{\eta}^j + Q_A \mu + Q_{1A} \mu \tilde{\theta} + Q_{A1} \mu \tilde{\eta}, \quad (4)$$

де q_{ij} , Q_{ij} – відповідні коефіцієнти розкладу. Підставивши вирази (3), (4) в систему (2) і виділивши складові однакового порядку, для стаціонарного випадку отримаємо рівняння

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{B}_4 + \hat{B}_5 = 0, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned}
\hat{B}_1 &= \begin{bmatrix} -\ell^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + q_{10} \tilde{\theta} + q_{01} \tilde{\eta} \\ -L^2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial x^2} + Q_{10} \tilde{\theta} + Q_{01} \tilde{\eta} \end{bmatrix}, & \hat{B}_2 &= \begin{bmatrix} q_A \mu \\ Q_A \mu \end{bmatrix}, \\
\hat{B}_3 &= \mu \begin{bmatrix} q_{1A} \tilde{\theta} + q_{A1} \tilde{\eta} \\ Q_{1A} \tilde{\theta} + Q_{A1} \tilde{\eta} \end{bmatrix}, & \hat{B}_4 &= \begin{bmatrix} q_{20} \tilde{\theta}^2 + q_{11} \tilde{\theta} \tilde{\eta} + q_{02} \tilde{\eta}^2 \\ Q_{20} \tilde{\theta}^2 + Q_{11} \tilde{\theta} \tilde{\eta} + Q_{02} \tilde{\eta}^2 \end{bmatrix}, \\
\hat{B}_5 &= \begin{bmatrix} q_{30} \tilde{\theta}^3 + q_{21} \tilde{\theta}^2 \tilde{\eta} + q_{12} \tilde{\theta} \tilde{\eta}^2 + q_{03} \tilde{\eta}^3 \\ Q_{30} \tilde{\theta}^3 + Q_{21} \tilde{\theta}^2 \tilde{\eta} + Q_{12} \tilde{\theta} \tilde{\eta}^2 + Q_{03} \tilde{\eta}^3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Оскільки функції q , Q розкладаємо в околі стаціонарної точки, то члени нульового порядку розкладу за $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$ і μ відсутні. Розкладемо змінні $\tilde{\theta}$ та $\tilde{\eta}$ за степенями ν , де $\nu \approx (A - A_c)^{1/2} \ll 1$, і розв'язок системи рівнянь (5) будемо шукати у вигляді степеневого ряду за ν [1, 11]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\eta}_1 \end{bmatrix} + \nu^2 \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\eta}_2 \end{bmatrix} + \nu^3 \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_3 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \dots \quad (6)$$

Підставляючи розклад (6) у рівняння (5), у першому порядку малості за ν отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$-\ell^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_1}{\partial x^2} + q_{10} \tilde{\theta}_1 + q_{01} \tilde{\eta}_1 = 0, \quad (7')$$

$$-L^2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}_1}{\partial x^2} + Q_{10} \tilde{\theta}_1 + Q_{01} \tilde{\eta}_1 = 0. \quad (7'')$$

Система (7) на відрізку $[0, L_x]$ допускає розв'язки такого вигляду:

$$\tilde{\theta}_1 = c \cos(kx), \quad \tilde{\eta}_1 = c\xi \cos(kx). \quad (8)$$

При цьому хвильове число $k = 2\pi m/L_x$, $m = 1, 2, \dots$, задовольняє характеристичне рівняння

$$k^4 \ell^2 L^2 + k^2 \ell^2 Q'_{01} + k^2 L^2 q'_{10} - Q'_{10} q'_{01} + Q'_{01} q'_{10} = 0, \quad (9)$$

а коефіцієнт ξ визначається з виразу

$$\xi = -(k^2 L^2 + Q_{01})/Q_{10} = -q_{01}/(k^2 \ell^2 + q_{10}). \quad (10)$$

Значення k дорівнює значенню k_0 або k'_0 залежно від того, чи відповідає хвильове число k першій точці біфуркації зі сторони великих чи малих A . Для системи (7) хвильове число k_0 визначається виразом

$$k_0 = [(q'_0 Q'_\eta - q'_\eta Q'_0)/\ell^2 L^2]^{1/4}. \quad (11)$$

Для другого порядку малості за ν система рівнянь буде мати вигляд

$$\ell^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_2}{\partial x^2} - q_{10} \tilde{\theta}_2 - q_{01} \tilde{\eta}_2 = q_{20} \tilde{\theta}_1^2 + q_{11} \tilde{\theta}_1 \tilde{\eta}_1 + q_{02} \tilde{\eta}_1^2 + q_A \mu, \quad (12')$$

$$L^2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}_2}{\partial x^2} - Q_{10} \tilde{\theta}_2 - Q_{01} \tilde{\eta}_2 = Q_{20} \tilde{\theta}_1^2 + Q_{11} \tilde{\theta}_1 \tilde{\eta}_1 + Q_{02} \tilde{\eta}_1^2 + Q_A \mu. \quad (12'')$$

Після підстановки наближень першого порядку малості $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\eta}_1$ у систему (12) отримуємо наближення другого порядку малості:

$$\tilde{\theta}_2 = g_1 c^2 \cos(2kx) + g_2 c^2 + g_3 \mu / \nu^2, \quad (13')$$

$$\tilde{\eta}_2 = g_4 c^2 \cos(2kx) + g_5 c^2 + g_6 \mu / \nu^2, \quad (13'')$$

де

$$g_1 = \frac{q_{01} C - (Q_{01} + 4k^2 L^2) B}{16k^4 \ell^2 L^2 + 4k^2 (q_{10} L^2 + Q_{01} \ell^2) - q_{01} Q_{10} + Q_{01} q_{10}},$$

$$g_2 = \frac{q_{01} D - Q_{01} B}{Q_{01} q_{10} - Q_{10} q_{01}}, \quad g_3 = \frac{q_{01} Q_A - Q_{01} q_A}{Q_{01} q_{10} - Q_{10} q_{01}},$$

$$g_4 = \frac{Q_{10} B - (q_{10} + 4k^2 \ell^2) C}{16k^4 \ell^2 L^2 + 4k^2 (q_{10} L^2 + Q_{01} \ell^2) - q_{01} Q_{10} + Q_{01} q_{10}},$$

$$g_5 = \frac{Q_{10} B - q_{10} D}{Q_{01} q_{10} - Q_{10} q_{01}}, \quad g_6 = \frac{Q_{10} q_A - q_{10} Q_A}{Q_{01} q_{10} - Q_{10} q_{01}},$$

$$B = \frac{1}{2} (q_{20} + q_{11} \xi + q_{02} \xi^2), \quad C = \frac{1}{2} (Q_{20} + Q_{11} \xi + Q_{02} \xi^2).$$

Аналогічно отримуємо систему рівнянь для третього порядку малості за v :

$$\ell^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_3}{\partial x^2} - q_{10} \tilde{\theta}_3 - q_{01} \tilde{\eta}_3 = \bar{q}, \quad (14')$$

$$L^2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}_3}{\partial x^2} - Q_{10} \tilde{\theta}_3 - Q_{01} \tilde{\eta}_3 = \bar{Q}, \quad (14'')$$

де

$$\begin{aligned} \bar{q} &= 2q_{20} \tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2 + q_{11} (\tilde{\theta}_1 \tilde{\eta}_2 + \tilde{\theta}_2 \tilde{\eta}_1) + 2q_{02} \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 + \\ &\quad + q_{30} \tilde{\theta}_1^3 + q_{21} \tilde{\theta}_1^2 \tilde{\eta}_1 + q_{12} \tilde{\theta}_1 \tilde{\eta}_1^2 + q_{03} \tilde{\eta}_1^3 + q_{1A} \tilde{\theta}_1 + q_{A1} \tilde{\eta}_1, \\ \bar{Q} &= 2Q_{20} \tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2 + Q_{11} (\tilde{\theta}_1 \tilde{\eta}_2 + \tilde{\theta}_2 \tilde{\eta}_1) + 2Q_{02} \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 + \\ &\quad + Q_{30} \tilde{\theta}_1^3 + Q_{21} \tilde{\theta}_1^2 \tilde{\eta}_1 + Q_{12} \tilde{\theta}_1 \tilde{\eta}_1^2 + Q_{03} \tilde{\eta}_1^3 + Q_{1A} \tilde{\theta}_1 + Q_{A1} \tilde{\eta}_1. \end{aligned}$$

Для знаходження амплітуди розв'язку системи (14) необхідно знайти власні функції спряженого оператора її лівої частини

$$\hat{E}^* = \begin{vmatrix} \ell^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - q_{10} & -Q_{10} \\ -q_{01} & L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - Q_{01} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Оператор \hat{E}^* має такі ж власні значення, як оператор \hat{E} лінійної системи (7). Однак власні функції $\tilde{\theta}^* = \lambda \cos(kx)$, $\tilde{\eta}^* = \lambda \zeta \cos(kx)$ оператора \hat{E}^* мають інші коефіцієнти перерозподілу амплітуд. Множник ζ визначаємо за формулою (10), а коефіцієнт $\lambda = k\pi^{-1}c^{-1}(1 - \xi\zeta)^{-1}$ - з умови нормування

$$\int_0^{2\pi/k} (\tilde{\theta} \tilde{\theta}^* + \tilde{\eta} \tilde{\eta}^*) dx = 1. \quad (16)$$

Необхідною умовою існування розв'язку системи (14) є виконання альтернативи Фредгольма [4], тобто права частина (14) повинна бути ортогональною до власної функції оператора \hat{E}^* . У другому порядку малості за v умови ортогональності виконуються тотожно, а для третього порядку малості за v отримуємо рівняння для визначення амплітуди sv неоднорідних розв'язків:

$$\int_0^{2\pi/k} (\bar{q} \tilde{\theta}^* + \bar{Q} \tilde{\eta}^*) dx = 0, \quad (17)$$

яке після нескладних перетворень можна записати у наступному вигляді:

$$Rc^2 v^2 + P\mu = 0, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} P &= 2(2g_3(q_{20} + \zeta Q_{20}) + (g_6 + \xi g_3)(q_{11} + \zeta Q_{11}) + \\ &\quad + 2\xi g_6(q_{02} + \zeta Q_{02}) + q_{1A} + \xi q_{A1} + \zeta(Q_{1A} + \xi Q_{A1})), \\ R &= 2g_1(q_{20} + \zeta Q_{20}) + (g_4 + \xi g_1)(q_{11} + \zeta Q_{11}) + 2\xi g_4(q_{02} + \zeta Q_{02}) + \\ &\quad + 2[2g_2(q_{20} + \zeta Q_{20}) + (g_5 + \xi g_2)(q_{11} + \zeta Q_{11}) + \\ &\quad + 2\xi g_5(q_{02} + \zeta Q_{02})] + (3/2)[q_{30} + \zeta Q_{30} + \\ &\quad + (q_{21} + \zeta Q_{21})\xi + (q_{12} + \zeta Q_{12})\xi^2 + (q_{03} + \zeta Q_{03})\xi^3]. \end{aligned}$$

Таким чином, показано, що в околі точок біфуркації система (2) допускає розв'язки у вигляді квазігармонічних структур. Із виразу (18) випливає, що амплітуда розв'язку $c^2 v^2$ однозначно визначається величинами P і R : $c^2 = -P/R$. З виразу для амплітуди відповідно випливає, що якщо $-P/R > 0$, то галуження розв'язку, який виникає внаслідок біфуркації, має закритичний характер. При цьому зі збільшенням параметра біфуркації A , починаючи з критичного значення $A = A_c$, відбувається плавне зростання амплітуди виникаючих квазігармонічних розв'язків. При $P/R > 0$ розв'язки $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$ визначені в докритичній області. Як результат, внаслідок біфуркації спонтанно виникають просторово-неоднорідні розв'язки скінченної амплітуди. \blacklozenge

Найбільш істотно на характер біфуркації впливає відношення характерних довжин системи $\varepsilon = \ell/L$. При $\varepsilon \ll 1$ в першій точці біфуркації величина $P \rightarrow d(q'_0)/dA < 0$, а величина R визначається виразом

$$R \sim \frac{kL(q''_{00})^2}{(Q'_0)^2} \frac{1}{(Q'_1 q'_0 - Q'_0 q'_1) Q'_0 q'_1} > 0.$$

Як результат, відбувається докритичне галуження розв'язку і в системі здійснюється жорсткий режим формування дисипативних структур. При збільшенні ε відбувається перехід від жорсткого до м'якого режиму біфуркації просторово-однорідних розв'язків. При цьому розв'язки, які галузяться м'яким чином, є стійкими в околі точки біфуркації, а їхні амплітуди пропорційні квадратному кореню з рівня надкритичності системи $A - A_c$. Розв'язки, які галузяться жорстким чином, є нестійкими і еволюціонують до стійких дисипативних структур великої амплітуди, властивості яких принципово відрізняються від квазігармонічних [1, 8–10].

Приклад застосування методики. Для визначення режиму формування просторово-неоднорідних розв'язків у точках біфуркації достатньо обчислити знаки виразів P і R . Розв'язки системи (2) в першому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1 &= [-P\mu/R]^{-1/2} \cos(kx), \\ \tilde{\eta}_1 &= [-P\mu/R]^{-1/2} \xi \cos(kx), \end{aligned} \quad (19)$$

який явно демонструє, що галуження має закритичний характер при $P/R > 0$ і докритичний – при $P/R < 0$. Як зазначалося вище, при $\varepsilon = \ell/L \rightarrow 0$ у першій точці біфуркації розв'язки галузяться жорстким чином. Зростання величини ℓ/L приводить до зміни галуження в системі. Тобто існує таке граничне значення ε_0 , при якому характер галуження змінюється з жорсткого на м'який.

Продемонструємо описану методику на конкретній модельній системі, яка має важливе як прикладне, так і фундаментальне значення у дослідженні явищ самоорганізації та нелінійній динаміці [2, 10]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \ell^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \theta^2 - \eta + 1, \quad (20')$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = L^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \eta(\eta - (\theta - A)^3). \quad (20'')$$

Для цієї системи при умовах Неймана на границях для P і R отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} P &= -4g_3(1 + 3\eta(\theta - A)\zeta) - 3(g_6 + \xi g_3)(\theta - A)^2 \zeta + \\ &+ 4\zeta g_6(1 + \xi) + 6\zeta(\eta(\theta - A) + \xi(\theta - A)^2), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
R = & 2g_1(-1 - 3\eta(\theta - A)^2\zeta) - (3/2)(g_4 + \xi g_1)(\theta - A)^2\zeta + 2\xi g_4\zeta + \\
& + 2[2g_2(-1 - 3\eta(\theta - A)\zeta) - (3/2)(g_5 + \xi g_2)(\theta - A)^2\zeta + \\
& + 2\xi g_5\zeta] - \frac{3}{2}[\eta\zeta + (\theta - A)\zeta\xi], \tag{22}
\end{aligned}$$

де коефіцієнти g_i є такими:

$$\begin{aligned}
g_1 = & [\tilde{D} - (2\eta - (\theta - A)^3 + 4k^2L^2)\tilde{B}][16k^4\ell^2L^2 + 4k^2(-2\theta L^2 + (2\eta + \\
& + (\theta - A)^3)\ell^2) + 3\eta(\theta - A)^2 - 2\theta(2\eta - (\theta - A)^3)]^{-1}, \\
g_2 = & \frac{\tilde{D} - (2\eta - (\theta - A)^3)\tilde{B}}{3\eta(\theta - A)^2 - 2\theta(2\eta - (\theta - A)^3)}, \\
g_3 = & \frac{3\eta(\theta - A)^2}{3\eta(\theta - A)^2 - 2\theta(2\eta - (\theta - A)^3)}, \\
g_4 = & [-3\eta(\theta - A)^2\tilde{B} - (-2\theta + 4k^2\ell^2)\tilde{D}][16k^4\ell^2L^2 + 4k^2(-2\theta L^2 + (-2\eta - \\
& - (\theta - A)^2)\ell^2) + 3\eta(\theta - A)^2 - 2\theta(2\eta - (\theta - A)^3)]^{-1}, \\
g_5 = & \frac{-3\eta(\theta - A)^2\tilde{B} + 2\theta\tilde{D}}{3\eta(\theta - A)^2 - 2\theta(2\eta - (\theta - A)^3)}, \\
g_6 = & \frac{6\theta\eta(\theta - A)^2}{3\eta(\theta - A)^2 - 2\theta(2\eta - (\theta - A)^3)}, \\
\tilde{B} = & -\frac{1}{2}, \quad \tilde{D} = \frac{1}{2}(-3\eta(\theta - A) - (3/2)(\theta - A)^2\xi + \xi^2).
\end{aligned}$$

За отриманими з розв'язку системи (20) виразами (21) і (22) відповідно для P і R побудовано залежність між параметром біфуркації A і $\varepsilon^2 = \ell^2/L^2$ (штрихова крива), яка розділяє області з різним типом галуження розв'язків системи (рис. 1). Ця крива в деякій точці перетинається з кривою нейтральної стійкості системи (суцільна крива). Значення A та $\varepsilon^2 = \ell^2/L^2$ у точці перетину відповідають точці біфуркації стаціонарного просторово-однорідного розв'язку. Якщо значення біфуркаційного параметра A знаходяться нижче від цієї точки, то галуження розв'язку в точці біфуркації буде докритичним. Якщо ж значення A знаходяться вище від цієї точки, то біфуркація буде закритичною.

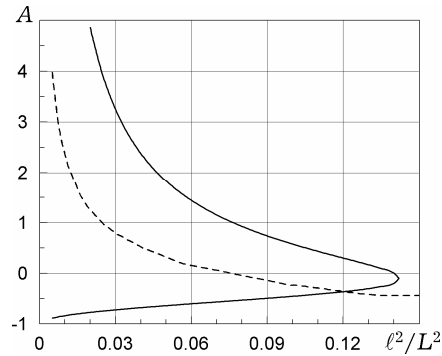


Рис. 1. Криві нейтральної стійкості та розділу типу галуження розв'язків системи (20).

Характерний вигляд розв'язків $\theta(x)$, $\eta(x)$ системи рівнянь (20), які виникають внаслідок різного типу біфуркацій, подано на рис. 2а і рис. 2б. Сис-

тему (20) проінтегровано чисельно. Криві на рис. 2а відповідають просторово-неоднорідним розв'язкам, які виникають внаслідок докритичної біфуркації просторово-однорідних станів системи, і обчислені при $l^2/L^2 = 2.29 \cdot 10^{-2}$, $A = -0.751$, а криві на рис. 2б – відповідають випадку закритичної біфуркації і обчислені при $l^2/L^2 = 10^{-2}$, $A = -0.83$.

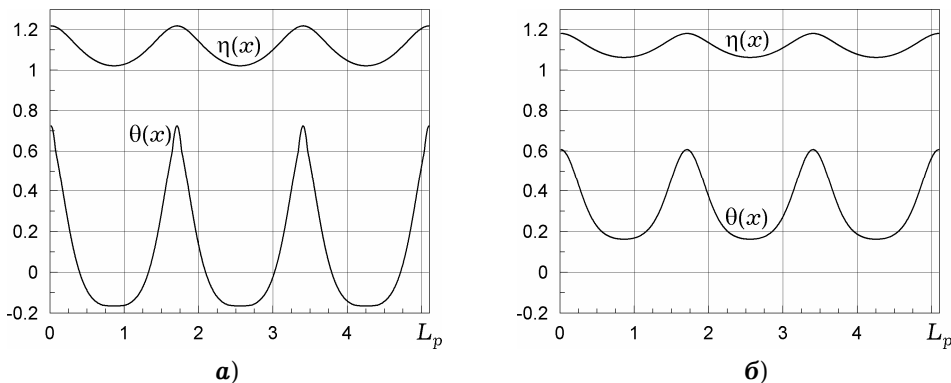


Рис. 2. Характерний вигляд просторово-неоднорідних розв'язків системи (20) при різних типах біфуркації.

Висновки. У роботі запропоновано схему застосування методу малого параметра до побудови та аналізу розв'язків базових систем реакції-дифузії. Представлена схема дозволяє не лише отримати аналітично наближені розв'язки загальних систем реакції-дифузії, але й дає інформацію про тип галуження розв'язків у точці біфуркації. Проаналізовано спектр задач та умови, при яких методи малого параметра можуть бути застосовані до базових систем реакції-дифузії. Разом з тим слід зазначити, що запропонована методика отримання малоамплітудних розв'язків може бути застосована і до узагальнених систем реакції-дифузії [6, 8] з похідними дробового порядку замість класичних похідних. Проведені дослідження показали, що розв'язки у вигляді дисипативних структур виникають і в узагальнених системах реакції-дифузії в широкому діапазоні зміни дробового порядку системи [7, 9]. Динаміка їх формування для певного діапазону зміни параметрів системи (включаючи порядок дробової похідної) подібна до динаміки формування дисипативних структур у системах цілого порядку. І для таких випадків можна успішно застосувати описану в роботі схему, прийнявши до уваги, що умови стійкості просторово-однорідного стану для узагальнених систем істотно відрізняються від класичних і залежать від величини дробового порядку системи.

1. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. – Москва: Наука, 1987. – 240 с.
2. Гафійчук В. В., Щербаченко Т. М., Васюник З. І. Математичне моделювання просторово-часової самоорганізації у системах типу реакція – дифузія // Доп. АН України. – 1992. – № 7. – С. 14–20.
3. Джозеф Д. Устойчивость движения жидкости. – Москва: Мир, 1981. – 639 с.
Те саме: Joseph D. D. Stability of fluid motions. – Vol. I, II. – New York: Springer-Verlag, 1976.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1973. – 473 с.
Те саме: Korn G. A., Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers. – New York: McGraw-Hill, 1961.
5. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. – Москва: Наука, 1983. – 320 с.
6. Datsko B. Y., Gafiychuk V. V. Mathematical modeling of fractional reaction-diffusion systems with different order time derivatives // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 3. – С. 193–201.

- Te same: *Datsko B. Y., Gafiychuk V. V.* Mathematical modeling of fractional reaction-diffusion systems with different order time derivatives // *J. Math. Sci.* – 2010. – **165**, No. 3. – P. 392–402.
7. *Datsko B., Gafiychuk V.* Complex nonlinear dynamics in subdiffusive activator-inhibitor systems // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Si.* – 2012. – **17**, No. 4. – P. 1673–1680.
 8. *Gafiychuk V. V., Datsko B. Yo.* Pattern formation in a fractional reaction-diffusion system // *Physica. A.* – 2006. – **365**, No. 2. – P. 300–306.
 9. *Gafiychuk V., Datsko B., Meleshko V.* Mathematical modeling of time fractional reaction-diffusion systems // *J. Comput. Appl. Math.* – 2008. – **220**, No. 1. – P. 215–225.
 10. *Kerner B. S., Osipov V. V.* Autosolitons. – Dordrecht: Kluwer, 1994. – 496 p.
 11. *Nicolis G., Prigogine I.* Self-organization in non-equilibrium systems: From dissipative structures to order through fluctuations. – New York: Wiley, 1977. – 512 p.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ: УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ, ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ, АНАЛИЗ БИФУРКАЦИЙ

Для нелинейных систем реакции-диффузии предложена методика построения и анализа решений на основе метода малого параметра. Описанная методика не только позволяет получить аналитически приближенные квазигармонические малоамплитудные решения, которые возникают в результате бифуркации пространственно-однородных состояний системы, но и определить тип бифуркации в системе. Приведены примеры применения данного подхода к анализу бифуркаций и построения решений конкретной математической модели реакции-диффузии.

SMALL PARAMETER METHOD IN NONLINEAR REACTION-DIFFUSION SYSTEMS: CONDITIONS OF APPLICATION, CONSTRUCTION OF SOLUTIONS, BIFURCATION ANALYSIS

For non-linear reaction-diffusion systems the technique for construction and analysis of solutions on the basis of a small parameter method is proposed. The described technique allows not only to obtain analytically approximate small-amplitude quasi-harmonic solutions that arise as a result of bifurcation of spatially homogeneous states of the system, but also to specify the type of bifurcation in the system. Examples of the application of this approach to the analysis of bifurcations and constructing solutions for specific mathematical model of reaction-diffusion equations are presented.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
27.12.12