УДК 517.95+534.1

П. Я. Пукач

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ У СТЕРЖНЯХ ФОЙГТА – КЕЛЬВІНА З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ СИЛ ОПОРУ

Викладено методику якісного дослідження розв'язку математичної моделі згинних коливань в'язкопружного тіла під дією дисипативних сил і нелінійних сил опору в обмеженій області на основі загальних підходів теорії нелінійних крайових задач. Методика базується на застосуванні методу Гальоркіна і дозволяє обґрунтувати коректність розв'язку моделі, а також дає можливість при її дослідженні застосовувати наближені методи.

Актуальність проблеми та огляд основних результатів. Математичні моделі коливальних систем, що описують реальні технологічні процеси, здебільшого ґрунтуються на нелінійних диференціальних рівняннях. З нелінійністю математичних моделей динамічних процесів пов'язані основні труднощі їх аналітичного дослідження, оскільки лише на основі аналізу розв'язків (точних чи наближених) диференціальних рівнянь можна судити про вплив параметрів систем на динамічні явища, прогнозувати резонанси ще на стадії проектування, вибирати оптимальні міцнісні характеристики деталей і вузлів машин. Найбільш ефективними аналітичними методами дослідження квазілінійних коливальних систем є методи Пуанкаре, Ван дер Поля, асимптотичний метод Крилова − Боголюбова − Митропольського (див., наприклад, [3, 4]). Разом з тим, розвиток техніки та перехід до швидкісного машинобудування вимагає постановки і розв'язання нових задач, математичні моделі яких не можна дослідити асимптотичними методами нелінійної механіки: задачі про коливання гнучких елементів пасових або ланцюгових передач, стрічкових систем для запису та відтворення інформації, конвеєрних ліній, різного роду канатних витягів, устаткування для рулонування паперу, металевої стрічки, дроту, нитки, устаткування для буріння нафтових і газових свердловин, трубопроводів та ін. Для більшості прикладних задач очевидною є дія узагальнених сил внутрішньої дисипації в коливальній системі. Зокрема, згинні хвилі в стержнях Фойгта − Кельвіна описуються лінійним рівнянням п'ятого порядку [1, с. 60], яке враховує вплив дисипативних сил на динамічний процес. Ця стаття присвячена якісному вивченню математичної моделі згинних коливань у стержнях Фойгта − Кельвіна під дією нелінійних сил опору. У випадку суттєво нелінійної залежності амплітуди коливань від сил опору отримати аналітичний розв'язок не вдається, тому не існує загальних методик визначення динамічних характеристик коливального процесу. Зазначена проблема є актуальною інженерно-технічною задачею [5] і в загальному випадку розв'язана лише для доволі вузького класу коливальних систем [2, 6, 7]. У праці [7] досліджено існування слабких розв'язків змішаних задач в обмеженій області для деякої системи лінійних рівнянь з частинними похідними, одна з невідомих функцій у якій описує вертикальне зміщення балки. Відповідне рівняння такої системи є частковим випадком розглянутого у цій роботі рівняння, яке узагальнює модель коливань балки у середовищі з опором. Актуальність вивчення крайових задач для таких рівнянь пояснюється проблемою зношування контактних поверхонь, яка є головним фактором недовговічності використання промислового устаткування [4].

Постановка задачі. Наведемо методику якісного дослідження розв'язку математичної моделі нелінійних коливань у стержнях Фойгта − Кельвіна під дією нелінійних сил опору, яка описується змішаною задачею для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+$$
$$+\,g(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t), \qquad p>2\,, \tag{1}$$
з початковими
$$u(x,0)=u_0(x)\,, \tag{2}$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x) \tag{3}$$
і крайовими умовами
$$u(0,t)=\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=0, \qquad u(\ell,t)=\frac{\partial^2 u(\ell,t)}{\partial x^2}=0\,. \tag{4}$$
Задачу розглядаємо в області $Q_T=(0,\ell)\times(0,T)$, $\ell,\ T<+\infty$.

Метою роботи є дослідження змішаної задачі (1)–(4) для рівняння згинних коливань, яке моделює вплив дисипативних сил і нелінійних сил опору на динамічний процес, та отримання умов коректності розв'язку математичної моделі – достатніх умов існування та єдиності розв'язку.

Формулювання основного результату. Позначимо $Q_\tau=(0,\ell)\times(0,\tau)$ для довільного $\tau\in[0,T]$; $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ – скалярний добуток між просторами V^* і V, де V^* – функціональний простір, спряжений до V. Стосовно коефіцієнтів, правої частини рівняння (1) і початкових даних припускаємо виконання таких умов:

(**A**) $a\in L^\infty(Q_T)$, $a(x,t)\ge a_0>0$, для майже всіх $(x,t)\in Q_T$;

(**B**) b, $\dfrac{\partial b}{\partial t}\in L^\infty(Q_T)$, $b(x,t)\ge b_0>0$, для майже всіх $(x,t)\in Q_T$;

(**G**) $g\in L^\infty(0,\ell)$, $g(x)\ge g_0>0$;

(**F**) $f\in L^{p'}(Q_T)$, $p'=\dfrac{p}{p-1}$;

(**U**) $u_0\in H_0^2(0,\ell)$, $u_1\in L^2(0,\ell)$.

Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) в області Q_T називаємо функцію
$$u\in C([0,T],H_0^2(0,\ell))\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}\in C\big([0,T],H^{-2}(0,\ell)+L^{p'}(0,\ell)\big)\bigcap L^2\big((0,T),H_0^2(0,\ell)\bigcap L^p\big((0,T),L^p(0,\ell)\big)\,,$$
яка задовольняє умови (2), (4) та інтегральну тотожність для довільного $\tau\in(0,T]$
$$\int\limits_{Q_\tau}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-f(x,t)v\right]dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}g(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t}v\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_0^\ell\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)v(x,\tau)-u_1(x)v(x,0)\right]dx=0 \tag{5}$$
для довільної функції
$$v\in L^2((0,T),H_0^2(0,\ell))\bigcap L^p((0,T),L^p(0,\ell))\,,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}\in L^2((0,T),L^2(0,\ell))\,.$$

Основний результат статті: при виконанні умов (**A**), (**B**), (**G**), (**F**), (**U**) існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1)−(4) в області Q_T.

Методика отримання основного результату. Для доведення *існування* розв'язку задачі (1)−(4) використаємо схему [2]. Розглянемо в області Q_T послідовність наближень Гальоркіна

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\omega_k(x), \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

де $\{\omega_k\}$ − ортонормована в $L^2(0,\ell)$ система лінійно незалежних елементів із простору $H_0^2(0,\ell) \cap L^p(0,\ell)$ таких, що лінійні комбінації $\{\omega_k\}$ щільні в $H_0^2(0,\ell) \cap L^p(0,\ell)$. При цьому функції C_k^N визначаємо як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} + g(x)\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^N}{\partial t} - f(x,t)\right)\omega_k + a(x,t)\frac{\partial^3 u^N}{\partial x^2 \partial t}\frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + b(x,t)\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x^2}\right]dx = 0, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

з початковими умовами

$$C_k^N(0) = u_0^N(x), \qquad \frac{\partial C_k^N(0)}{\partial t} = u_1^N(x),$$

де

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0,k}^N \omega_k(x), \quad u_1^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}^N \omega_k(x),$$

$$\left\|u_1^N - u_1\right\|_{L^2(0,\ell)} \to 0, \qquad \left\|u_0^N - u_0\right\|_{H_0^2(0,\ell)} \to 0, \qquad N \to +\infty.$$

На підставі теореми Каратеодорі існує неперервний розв'язок такої задачі Коші, що має абсолютно неперервну похідну за t на проміжку $[0,\tau_0]$ для деякого $\tau_0 \le T$. З отриманих нижче оцінок випливатиме, що $\tau_0 = T$. Помножимо кожне рівняння системи (6) на $\dfrac{\partial C_k^N}{\partial t}$, підсумуємо усі рівняння за k від 1 до N та проінтегруємо результат за t на проміжку $[0,\tau]$, $\tau \le T$. Міркуючи подібно, як у [2], отримуємо, зокрема, що для довільного $\tau \in (0,T]$ $\dfrac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} \in L^2\big((0,T), H^{-2}(0,\ell) + L^{p'}(0,\ell)\big)$, тобто існує скалярний добуток $\left\langle \dfrac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, \dfrac{\partial u^N}{\partial t}\right\rangle$ між просторами $H^{-2}(0,\ell) + L^{p'}(0,\ell)$, $H_0^2(0,\ell) \cap L^p(0,\ell)$ та існує інтеграл $\displaystyle\int_0^\tau \left\langle \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, \frac{\partial u^N}{\partial t}\right\rangle dt$. В результаті одержимо рівність

$$\int_0^\tau \left\langle \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, \frac{\partial u^N}{\partial t}\right\rangle dt + \int_{Q_\tau}\left[a(x,t)\frac{\partial^3 u^N}{\partial x^2 \partial t}\frac{\partial^3 u^N}{\partial x^2 \partial t} + g(x)\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p\right]dx\,dt +$$

$$+ \int_{Q_\tau}\left[b(x,t)\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u^N}{\partial x^2 \partial t} - f(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial t}\right]dx\,dt = 0. \tag{7}$$

З урахуванням умов (**A**), (**B**), (**G**), (**F**), (**U**) проведемо перетворення і встановимо деякі оцінки інтегралів з рівності (7):

$$\int_0^\tau \left\langle u_{tt}^N, u_t^N \right\rangle dt = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\frac{\partial u^N}{\partial t}(x,\tau)\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^\ell (u_1^N(x))^2\, dx\,,$$

$$\int_{Q_\tau} a(x,t)\frac{\partial^3 u^N}{\partial x^2 \partial t}\frac{\partial^3 u^N}{\partial x^2 \partial t}\,dx\,dt \ge a_0 \int_{Q_\tau}\left(\frac{\partial^3 u^N}{\partial x^2 \partial t}\right)^2 dx\,dt\,,$$

$$\int_{Q_\tau} g(x)\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p dx\,dt \ge g_0 \int_{Q_\tau}\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p,$$

$$\int_{Q_\tau} f\frac{\partial u^N}{\partial t}\,dx\,dt \le \delta_1 \int_{Q_\tau}\left|u_t^N\right|^p dx\,dt + C_1\int_{Q_\tau}|f|^{p'}\,dx\,dt\,,$$

$$\int_{Q_\tau} b(x,t)\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u^N}{\partial x^2 \partial t}\,dx\,dt = \int_{Q_\tau}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(b(x,t)\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right]dx\,dt \ge$$

$$\ge \frac{b_0}{2}\int_0^\ell\left(\frac{\partial^2 u^N(x,\tau)}{\partial x^2}\right)^2 dx - \frac{b_1}{2}\int_{Q_\tau}\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{b(x,0)\partial^2 u_0^N}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_0^N}{\partial x^2}\,dx\,.$$

Тут δ_1 – довільна додатна стала, C_1 – додатна стала, залежна від p і δ_1; $b_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_T}\left|\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}\right|$.

Враховуючи наведені оцінки та міркуючи аналогічно, як у [2], для довільного $\tau \in (0,T]$ отримаємо

$$\int_0^\ell\left[\left(\frac{\partial u^N(x,\tau)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x,\tau)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx +$$

$$+ \int_{Q_\tau}\left[\left(\frac{\partial^3 u^N(x,\tau)}{\partial x^2 \partial t}\right)^2 + \left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p\right]dxdt \le C_2\,, \qquad (8)$$

де C_2 – додатна стала, що не залежить від N.

З нерівності (8) робимо висновок про існування деякої підпослідовності $\{u^{N_k}\}$ послідовності $\{u^N\}$ такої, що при $N_k \to \infty$

$u^{N_k} \to u$ $\quad$ $*$-слабко в $\quad$ $L^\infty((0,T), H_0^2(0,\ell))$,

$\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}$ $\quad$ $*$-слабко в $\quad$ $L^\infty((0,T), L^2(0,\ell))$,

$\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}$ $\quad$ слабко в $\quad$ $L^2((0,T), H_0^2(0,\ell))$,

$\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}$ $\quad$ слабко в $\quad$ $L^p((0,T), L^p(0,\ell))$.

Зауважимо також, що

$$\left\| \frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \right\|_{L^p((0,T),L^p(0,\ell))} \le C_3, \qquad C_3 = \text{const} > 0\,. \tag{9}$$

З нерівності (9) випливає, що

$$\left| \frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \to \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{слабко в} \quad L^{p'}((0,T),L^{p'}(0,\ell))\,.$$

Можна показати, що функція u задовольняє інтегральну тотожність (5) та умови (4), а також довести, що

$$u \in C([0,T],H_0^2(0,\ell)), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in C([0,T],H^{-2}(0,\ell) + L^{p'}(0,\ell))\,,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \qquad x \in (0,\ell)\,.$$

$$u_0^{N_k} \to u_0 \qquad \text{сильно в} \qquad H_0^2(0,\ell)\,.$$

Отже, u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Для встановлення *єдиності* покладемо $w = u^1 - u^2$, де u^1, u^2 – два узагальнені розв'язки (1)–(4). Оскільки

$$u^1(x,0) = u^2(x,0)\,, \qquad \frac{\partial u^1}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u^2}{\partial t}(x,0)\,,$$

то, міркуючи аналогічно, як при отриманні нерівності (8), одержимо

$$\int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w(x,\tau)}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx + \int_{Q_\tau} \left[\left(\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|^p \right] dx\,dt \le 0\,.$$

Отже, $u^1 = u^2$ майже скрізь в Q_T, звідки випливає єдиність розв'язку.

Висновки. Встановлено умови коректності (достатні умови існування та єдиності) розв'язку в математичній моделі згинних коливань з урахуванням нелінійних сил опору в умовах гіпотези Фойгта – Кельвіна, яка враховує вплив дисипативних сил на динамічний процес. Проблема встановлення описаних вище класів коректності викликає інтерес не лише з огляду практичного застосування, а й з точки зору теоретичного вивчення різних крайових задач, в яких крайові умови описують механічні моделі, що вивчаються в нелінійній теорії коливань. Видається важливим розглянути у подальших дослідженнях аналогічні питання для випадку нелінійних коливань необмежених стержнів і балок. При цьому плануємо дослідити узагальнені розв'язки як у вагових соболєвських просторах, так і в просторах локально інтегровних функцій. Отримані якісні результати обґрунтовують можливість застосування до вказаної задачі методу Гальоркіна, а в подальшому при дослідженні динамічних характеристик розв'язків розглянутих математичних моделей коливань застосовувати різноманітні наближені методи.

1. *Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семерикова Н. П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – Москва: Физматлит, 2002. – 208 с.
2. *Пукач П. Я.* Змішана задача для сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 59–69.
3. *Сліпчук А. М.* Дослідження впливу стискаючої (розтягуючої) сили на нелінійні поперечні коливання балки // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. «Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні». – 2011. – № 713. – С. 191–196.
4. *Сокіл Б. І., Сеник А. П., Назар І. І., Сокіл М. Б.* Поперечні коливання нелінійно пружного середовища і метод Д'Аламбера у їх дослідженні // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. «Динаміка, міцність та проектування машин і приладів». – 2004. – № 509. – С. 105–110.

5. *Ahmadian H., Jalali H., Pourahmadian F.* Nonlinear model identification of a frictional contact support // Mech. Syst. Signal Pr. – 2010. – **24**, No. 8. – P. 2844–2854.
6. *Andrews K. T., Dumont Y., M'Bengue M. F., Purcell J., Shillor M.* Analysis and simulations of a nonlinear elastic dynamic beam // Z. angew. Math. Phys. – 2012. – **63**, No. 6. – P. 1005–1019.
7. *Gu R. J., Kuttler K. L., Shillor M.* Frictional wear of a thermoelastic beam // J. Math. Anal. Appl. – 2000. – **242,** No. 2. – P. 212–236.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СТЕРЖНЯХ ФОЙХТА – КЕЛЬВИНА С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Изложена методика качественного исследования решения математической модели изгибных колебаний вязкоупругого тела под действием диссипативных сил и нелинейных сил сопротивления в ограниченной области на основе общих подходов теории нелинейных краевых задач. Указанная методика базируется на применении метода Галеркина и позволяет обосновать корректность решения модели, а также дает возможность при ее исследовании применять приближенные методы.

INVESTIGATION OF BENDING VIBRATIONS IN VOIGT – KELVIN BARS TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEAR RESISTANCE FORCES

The technique of qualitative investigation of the solution of mathematical model of bending vibrations of viscoelastic body under the action of dissipative forces and nonlinear resistance forces in a bounded domain on the basis of general approaches of the theory of nonlinear boundary value problems is described. The method is based on application of Galerkin's method and allows to substantiate the correctness of solution of the problem and also enables to use approximate methods on its investigation.

Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів

Одержано
09.01.13