

## ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ВОЛОКНА КВАДРАТНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ПІД ДІЄЮ ЗСУВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ЗА НАЯВНОСТІ МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН

Досліджено розвиток пластичних деформацій, локалізованих на поверхні жорсткого волокна квадратного перерізу в ідеально пружнопластичній матриці. З двох протилежних вершин волокна виходять дві однакові міжфазові тріщини. Деформація зумовлена дією зсувного навантаження, паралельного одній із діагоналей волокна, що з'єднує початки тріщин. Встановлено, що доки міжфазна тріщина не перевищує половини довжини грані волокна, пластичні деформації можуть бути локалізовані тільки на межі включення – матриця. Для тріщин, коротших ніж половина довжини грані волокна, визначено залежність довжини смуг пластичного відшаровування від величини навантаження і з'ясовано, що пластичні смуги не можуть повністю охоплювати поверхню волокна на продовженні тріщин.

Деформування тіл з включеннями, жорсткість яких істотно перевищує жорсткість матриці, може спричинити міжфазне розшаровування як наслідок появи тріщин або пластичних деформацій на межі включення – середовище. Аналіз пружнопластичного напружено-деформованого стану біля вершин гострокінцевих концентраторів напружень [8, 10] свідчить, що розвиток міжфазних пластичних смуг супроводжується поступовим ослабленням механічного зв'язку включення і матриці: чим довша смуга, тим слабший зв'язок на її початку. Тому у точках найвищої концентрації напружень досить імовірна поява тріщин як наслідку попередніх локальних розривів переміщень або пластичних зсувів. На сьогодні найповніше вивчено напружено-деформований стан пружних тіл із включеннями за наявності міжфазних тріщин [6, 7, 9]. Аналогічні дослідження для пружнопластичних тіл стосуються лише випадків міжфазного пластичного відшаровування включень, які до навантаження перебували в ідеальному механічному контакті з середовищем [10].

Нижче дослідимо напружено-деформований стан і розвиток міжфазних пластичних смуг від вершин тріщин (рис. 1) на межі нескінченно довгого включення квадратного поперечного перерізу  $|x| + |y| \leq a$ ,  $-\infty < z < +\infty$  у необмеженому ідеально пружнопластичному середовищі зі зсувною границею текучості  $k$  під впливом прикладеного на безмежності зсувного навантаження  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \tau_\infty$ .

За умови, що на поверхні включення наявні міжфазні тріщини довжини  $\ell$  ( $\ell < b$ ), де ( $b = a\sqrt{2}$  – довжина грані включення), які починаються у вершинах включення на його вертикальній діагоналі. Контакт решти поверхні включення з середовищем до навантаження вважаємо ідеальним.

**Формулювання задачі.** Сформулюємо задачу у напруженнях. З огляду на симетрію задачі (парність переміщення відносно осі ординат і непарність відносно осі абсцис), сформулюємо цю задачу для частини першого квадранта поза включенням – області  $D$  ( $x > 0, y > 0, x + y > a$ ):

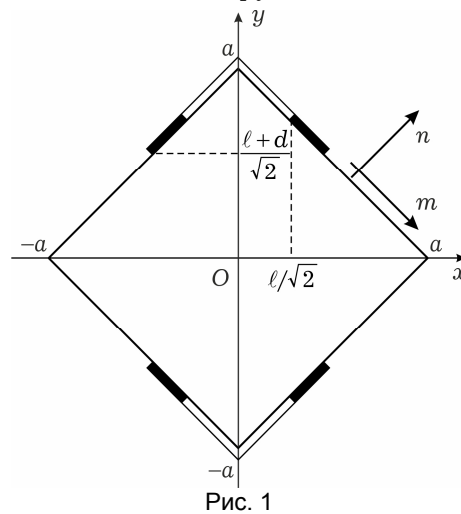


Рис. 1

$$\begin{aligned}
\tau_{xz}(x, 0) &= 0, & y > a, \\
\tau_{nz}(x, y) &= 0, & x + y = a, & 0 < x < \ell/\sqrt{2}, \\
\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 &= k^2 = k^2, & x + y = a, & \ell/\sqrt{2} < x < (\ell + d)/\sqrt{2}, \\
\tau_{mz}(x, y) &= 0, & x + y = a, & (\ell + d)/\sqrt{2} < x < a, \\
\tau_{xz}(0, y) &= 0, & x > a, \\
\tau_{xz}(x, y) &= 0 + o(1), & \tau_{yz}(x, y) &= \tau_\infty + o(1), & \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{1}$$

де  $d$  – залежна від величини навантаження  $\tau_\infty$  довжина смуги пластичного відшарування;  $n$ ,  $m$  – відповідно нормальний і тангенціальний одиничні вектори до поверхні включення.

Крайові умови (1) описують відповідно симетричність переміщення відносно осі ординат, відсутність напруження на поверхні тріщини, умову пластичності, відсутність переміщення на невідшарованій частині поверхні включення, антисиметричність переміщення відносно осі абсцис, спосіб і величину навантаження.

У випадку антиплоскої деформації у пружній частині тіла компоненти напружень утворюють аналітичну функцію  $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ ,  $\zeta = x + iy$  [9]. Стосовно  $\tau(\zeta)$  умови (1) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0, & \zeta = iy, & y > a, \\
\arg \tau(\zeta) &= -\pi/4, & \zeta = x + iy, & x + y = a, & 0 < x < \ell/\sqrt{2}, \\
|\tau(\zeta)| &= k, & \zeta = x + iy, & x + y = a, & \ell/\sqrt{2} < x < (\ell + d)/\sqrt{2}, \\
\arg \tau(\zeta) &= \pi/4, & \zeta = x + iy, & x + y = a, & (\ell + d)/\sqrt{2} < x < a, \\
\operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0, & \zeta = x, & y > a, \\
\tau(\zeta) &= \tau_\infty + o(1), & \zeta \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{2}$$

Задачу (2) будемо розуміти так. Для заданого  $\tau_\infty \in (0; k)$  треба знайти таке значення  $d$ , за якого задача (2) має розв'язок, і визначити функцію  $\tau(\zeta)$  в області  $\mathcal{D}$ . Тоді  $d$  як функція  $\tau_\infty$  виражатиме залежність довжини смуги пластичного відшарування від величини прикладеного навантаження. Додатково слід забезпечити виконання умови

$$|\tau(\zeta)| < k, \quad \zeta \in \mathcal{D}, \tag{3}$$

яка гарантуватиме, що пластичний стан поза пластичними смугами не досягається.

Умови (2) дають змогу побудувати конформний образ області  $\mathcal{D}$  у комплексній площині  $\tau$  (рис. 2б).

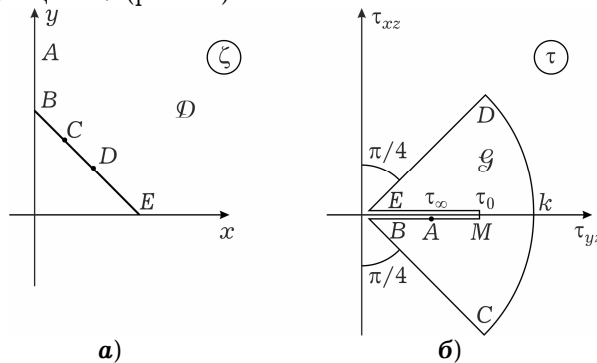


Рис. 2. Області конформного відображення.

Пояснення потребує параметр  $\tau_0$ , що характеризує область  $\mathcal{G}$ , в яку функцією  $\tau = \tau(\zeta)$  відображається область  $\mathcal{D}$ . У більшості аналогічних до (2) задач конформний образ області  $\mathcal{D}$  є повністю визначеним [2]. А ось у розглядуваному випадку неможливо припустити, що перша, четверта та п'ята з умов (2) означають, що частина границі області  $\mathcal{D}$ , яка співпадає з ділянками координатних осей, відображається на площину  $\tau$  в розріз уздовж відрізка  $[0; \tau_\infty]$ . Таке припущення означало би, що на координатних осях на ділянках межі області  $\mathcal{D}$  напруження  $\tau_{yz}$  монотонно змінюється від 0 до  $\tau_\infty$ . У такому випадку на межі областей  $\mathcal{D}$  і  $\mathcal{G}$  було би чотири точки  $A, B, C, E$  з наперед відомими координатами, що суперечить теоремі Рімана про існування конформного відображення [1]. Тому зробимо припущення про немонотонність напруження  $\tau_{yz}$  на вказаних ділянках межі області  $\mathcal{D}$ , а через  $\tau_0$  позначимо його максимальне значення:

$$\tau_0 = \max \left\{ \max_{[a; +\infty)} \tau_{yz}(0, y), \max_{[a; +\infty)} \tau_{yz}(x, 0) \right\}.$$

Тоді вибором значення величини  $\tau_0$  (довжини розрізу в області  $\mathcal{G}$ ) можна забезпечити існування потрібного відображення принаймні для деякого інтервалу навантажень із діапазону  $(0; k)$ .

Введемо допоміжну комплексну площину і шукатимемо потрібне відображення у параметричній формі:

$$\tau = \tau(t), \quad \zeta = \zeta(t), \quad t \in \mathcal{H} = \{\text{Im } t > 0\}. \quad (4)$$

Взаємна відповідність точок межі областей  $\mathcal{D}$  і  $\mathcal{H}$  подана на рис. 2, рис. 3.

Друге з відображень (4) легко знайти за допомогою перетворення Крістоффеля – Шварца [1]:

$$\zeta = \frac{b}{V(3/4, 3/4)} \int_0^t \frac{d\eta}{\sqrt[4]{\eta(\eta-1)}}. \quad (5)$$

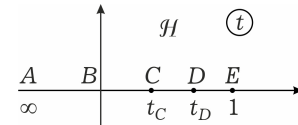


Рис. 3. Допоміжна комплексна площина.

Тут  $V(x, y)$  – повна бета-функція,  $V(3/4, 3/4) = 1.694$ . Під  $(t - p)^q$  ( $0 < q < 1$ ,  $p$  – дійсне число) розумітимемо аналітичну в  $\mathcal{H}$  функцію, що приймає дійсні додатні значення в точках  $t > p$  дійсної осі.

Координату точки  $C$  у площині  $t$  визначимо як розв'язок рівняння

$$\frac{\ell}{b} = \frac{1}{V(3/4, 3/4)} \int_0^{t_C} \frac{d\eta}{\sqrt[4]{\eta(1-\eta)}}, \quad (6)$$

який для всіх допустимих довжин тріщин  $\ell \in [0; b]$  існує, єдиний та може бути знайдений методом половинного ділення.

Першу із функцій (4) знаходимо, komponуючи елементарні відображення. Забезпечивши зображену на рис. 2, рис. 3 відповідність точок  $A, B$ , отримуємо

$$t = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}}{2} \frac{(f_1(\tau, \tau_0, \tau_\infty) + f_2(\tau, \tau_0, \tau_\infty))}{\mathcal{A}f_1(\tau, \tau_0, \tau_\infty) + \mathcal{B}f_2(\tau, \tau_0, \tau_\infty)}, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} f_1(\tau, \tau_0, \tau_\infty) &= \tau_0^2 \sqrt{(k^8 + \tau_\infty^8) - 2k^4 \tau^4}, \\ f_2(\tau, \tau_0, \tau_\infty) &= \sqrt{(k^8 + \tau^8) \tau_0^4 - (k^8 + \tau_0^8) \tau^4}, \\ \mathcal{A} &= \tau_0^2 (k^4 - \tau_\infty^4), \quad \mathcal{B} = \sqrt{(k^8 + \tau_\infty^8)(\tau_0^4 - \tau_\infty^4)}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що в площині  $\tau$  точки  $C$  і  $D$  мають відповідно координати  $\tau = k \exp(-i\pi/4)$  і  $\tau = k \exp(i\pi/4)$ , за формулою (6) обчислюємо їхні координати в площині  $t$ :

$$t_{C,D} = \frac{(k^2 \mp \tau_\infty^2)^2 (f_1(\tau_\infty, \tau_0, \tau_\infty) - f_2(\tau_\infty, \tau_0, \tau_\infty))}{2((k^4 + \tau_0^4) f_1(\tau_\infty, \tau_0, \tau_\infty) \pm 2k^2 \tau_0^2 f_2(\tau_\infty, \tau_0, \tau_\infty))} \quad (8)$$

(верхній знак у формулі (8) стосується точки  $t_C$ , нижній –  $t_D$ ).

За відомою величиною  $t_C$  (визначеною за формулою (6)), знайдемо параметр  $\tau_0$ , розв'язавши відносно нього рівняння (8). Зазначимо, що розв'язок (8) існує не для всіх  $t_C \in (0, 1)$ ,  $\tau_\infty \in (0, k)$  (це буде пояснено пізніше).

Довжину смуги пластичного відшаровування у частках довжини грані включення дає формула

$$d = \frac{\ell}{B(3/4, 3/4)} \int_{t_C}^{t_D} \frac{d\eta}{\sqrt[4]{\eta(1-\eta)}}. \quad (9)$$

Залежності довжини смуг пластичного відшаровування від величини навантаження  $\tau_\infty/k$  для значень відношення довжини тріщин до довжини грані включення  $\frac{\ell}{b} = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$  наведено на рис. 4.

Для з'ясування впливу міжфазної тріщини на пластичне відшаровування включення звернемося до властивостей пластичного відшаровування аналогічного включення, яке у недеформованому середовищі перебувало в ідеальному з ним контакті за такого ж способу навантаження. Дослідження для цього випадку у припущенні про локалізацію пластичних смуг уздовж межі включення – середовище, які розпочинаються від вершин включення на його вертикальній діагоналі, виконано у [5], а дослідження розвитку континуальних пластичних зон з початками в цих же точках проведено у [3]. Міжфазні пластичні смуги поступово збільшуються з ростом навантаження, покриваючи всю поверхню включення, коли  $\tau_\infty$  наближається до  $k$ . А континуальні пластичні зони зосереджені у кутах, утворених гранями включення і перпендикуляром до його вертикальної діагоналі. Зі збільшенням навантаження вони спочатку збільшуються майже гомотетично, а згодом ріст пластичних деформацій уздовж граней включення поступово припиняється. Навіть якщо  $\tau_\infty$  наближається до  $k$ , континуальні пластичні зони не охоплюють цілої поверхні включення: при великих навантаженнях пластичні смуги не просуваються уздовж включення далі і ростуть у напрямку, перпендикулярному до його вертикальної діагоналі.

Аналізуючи зображену на рис. 4 картину розвитку пластичного відшаровування, можна зауважити декілька його стадій: спочатку близьку до квадратичної залежність за малих навантажень, далі приблизно лінійну залежність, а під кінець – гальмування росту смуги. У всьому діапазоні зміни зовнішнього навантаження ріст пластичних смуг описується досить складними співвідношеннями. Тому зупинимось докладніше на практично важливому етапі початкового їхнього розвитку і застосуємо для цього лінійну модель пластичної зони (ЛМПЗ) [4].

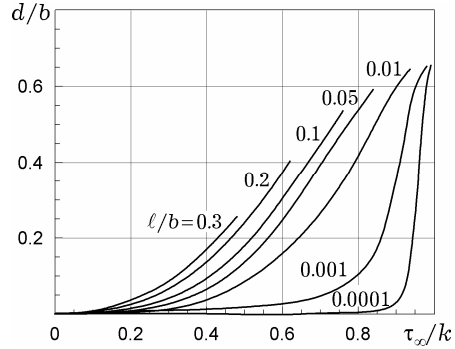


Рис. 4. Залежності довжини пластичних смуг від величини навантаження.

**Початкова стадія пластичного відшаровування.** Як відомо, ЛМПЗ дає можливість дослідження пластичних зон (зокрема смуг) при малих навантаженнях на основі пружного розв'язку задачі. Її застосування, крім пружного, потребує ще двох відповідних допоміжних розв'язків задачі: у пружній та пружно-пластичній постановках, що не містять параметрів розмірності довжини. Згідно з ЛМПЗ пластичну зону визначають за допоміжним пружнопластичним розв'язком, узгодженим з допоміжним пружним розв'язком, який узгоджено з основним пружним розв'язком.

**Пружний розв'язок.** Позначимо тепер функцію  $\tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$  через  $\tau^{(e)}(\zeta)$ . Крайова задача для  $\tau^{(e)}(\zeta)$  відрізняється від (2) тим, що не містить умов пластичності та параметра  $d$  (у рівностях (2) слід покласти  $d = 0$ ). Четверта з умов (2) повинна виконуватися на всій грані включення. Тобто третю та четверту умови (2) треба замінити такою одною:  $\arg \tau^{(e)}(\zeta) = \pi/4$ ,  $\zeta = x + iy$ ,  $\ell/\sqrt{2} < x < a$ . Крім того, на функцію  $\tau^{(e)}(\zeta)$  не накладається обмеження (3) і  $\tau^{(e)}(\zeta) \rightarrow \infty$  при  $\zeta \rightarrow \pm ia$ .

Визначення функції  $\tau^{(e)}(\zeta)$  можна знову звести до задачі конформного відображення. Конформним образом області  $\mathcal{D}$  у площині  $\tau$  буде тепер кут з розрізом (область  $\mathcal{G}_1$ , рис. 5). Параметр  $\tau_0$ , що має сенс максимального напруження  $\tau_{yz}$  на межі області  $\mathcal{D}$  поза гранню включення, уведено з метою забезпечення існування конформного відображення області  $\mathcal{D}$  на область  $\mathcal{G}_1$ .

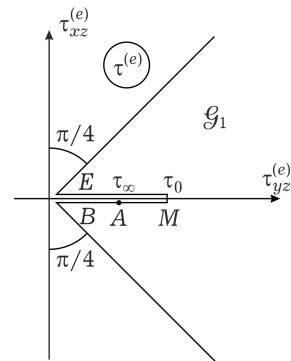


Рис. 5. Область  $\mathcal{G}_1$ .

Функцію  $\tau^{(e)}(\zeta)$  шукаємо в параметричному вигляді (4). Скориставшись площиною допоміжного комплексного параметра  $t$ , яка від зображеної на рис. 3 відрізняється тільки відсутністю точки  $D$  на дійсній осі, за допомогою композиції елементарних відображень отримаємо

$$\tau^{(e)}(t) = \tau_\infty \tau_0 \frac{\sqrt[4]{4t(t-1)}}{\sqrt{2\tau_0^2 t - \tau_0^2 - \sqrt{\tau_0^4 - \tau_\infty^4}}}, \quad \tau_0 = \frac{\tau_\infty}{\sqrt{2\sqrt[4]{t_C - t_C^2}}}. \quad (10)$$

Очевидно, що, як і слід було сподіватися, пружний розв'язок існує для всіх довжин  $\ell$  міжфазних тріщин  $0 < \ell < b$  і довільного рівня навантаження  $0 < \tau_\infty < k$ . Функцію  $\tau^{(e)}(\zeta)$  для цього випадку дають формули (5), (10).

З'ясуємо асимптотику пружного розв'язку у вершині тріщини. Із формули (5) випливає, що при  $\zeta \rightarrow \zeta_0$ , де  $\zeta_0 = \frac{\ell}{\sqrt{2}} + i\left(a - \frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)$ , маємо

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{a(1-i)}{B(3/4, 3/4)} \frac{(t-t_C)}{\sqrt[4]{t_C(1-t_C)}} + o(t-t_C). \quad (11)$$

В околі точки  $t = t_C$  функція (10) набуває такого вигляду:

$$\tau^{(e)}(t) = \tau_\infty \frac{\sqrt[4]{t_C(t_C-1)}}{\sqrt{t-t_C}} e^{i\pi/4} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t-t_C}}\right). \quad (12)$$

Виключивши з рівностей (11), (12) змінну  $t$ , отримуємо асимптотику  $\tau^{(e)}(\zeta)$  в околі вершини тріщини:

$$\tau^{(e)}(\zeta) = \tau_\infty \sqrt[4]{2} e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt[4]{t_C(1-t_C)}}{\sqrt{B(3/4, 3/4)}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\zeta_0 - \zeta}} + o((\zeta - \zeta_0)^{-1/2}). \quad (13)$$

Поле пружних напружень сингулярне в околі вершини міжфазної тріщини з показником  $1/2$ , як і у випадку, коли обидва її береги є вільними від напружень поверхнями середовища. Коефіцієнт сингулярного члена напружень прямує до нуля для безмежно малої тріщини, оскільки  $t_C \rightarrow 0$  при  $\ell \rightarrow 0$ . Для гранично допустимої довжини тріщини (випадок  $\ell \rightarrow b$ ) вершини міжфазних тріщин досягають горизонтальних вершин включення, а напруження весь час залишаються нульовими, сингулярний член пружного розв'язку стає безмежно малим, оскільки в цьому випадку  $t_C \rightarrow 1$ .

Допоміжними для ЛМПЗ є пружна та пружнопластична задачі для деформівного середовища  $x + y > 0$  і жорсткого включення  $x + y < 0$ , з'єднаних уздовж променя  $x + y = 0$ ,  $x > 0$  за наявності півбезмежної тріщини  $x + y = 0$ ,  $x < 0$  на їх спільній межі (рис. 6) в стані антиплоскої деформації, спричиненої прикладеними на безмежності нескінченно малими напруженнями.

Сформулюємо допоміжну крайову пружнопластичну задачу для функції напружень, яку тепер позначатимемо  $\tau_1(\zeta)$ . Подібно, як для  $\tau(\zeta)$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \arg \tau_1(\zeta) &= -\pi/4, & \arg \zeta &= 3\pi/4, & 0 < |\zeta| < +\infty, \\ |\tau_1(\zeta)| &= k, & \arg \zeta &= -\pi/4, & 0 < |\zeta| < d, \\ \arg \tau_1(\zeta) &= \pi/4, & \arg \zeta &= -\pi/4, & d < |\zeta| < +\infty, \\ \tau_1(\zeta) &= \frac{K}{\sqrt{\zeta}} e^{i\pi/8} + o(\zeta^{-1/2}), & \zeta &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $M$  – дійсна додатна константа, яка окреслює величину прикладеного навантаження.

Розв'язком задачі (14) є аналітична функція, що обумовлює конформне відображення області  $\mathcal{D}_1 = \{\zeta \mid \operatorname{Re}((1+i)\zeta) > 0\}$  на круговий сектор  $\mathcal{G}_2 = \{\tau \mid |\tau| < k, -\pi/4 < \arg \tau < \pi/4\}$  (на рис. 7 зазначено відповідність трьох точок на межах областей  $\mathcal{D}_1$  і  $\mathcal{G}_2$ ).

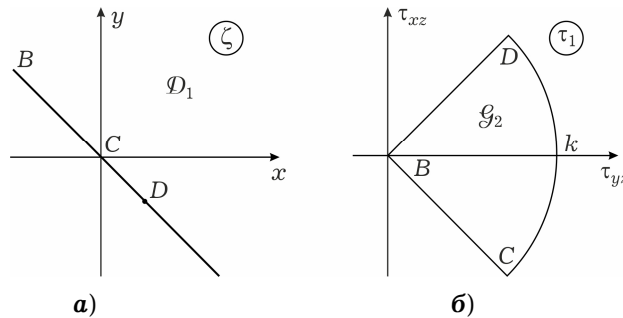


Рис. 7. Області конформного відображення допоміжної пружнопластичної задачі.

Внаслідок композиції елементарних відображень отримуємо

$$\tau_1(\zeta) = k \frac{1-i}{2^{3/4} \sqrt{d}} (\sqrt{(1+i)\zeta} - \sqrt{(1+i)\zeta - d\sqrt{2}}), \quad d = 2\sqrt{2} \left(\frac{K}{k}\right)^2. \quad (15)$$

Для знаходження допоміжного пружного розв'язку  $\tau_1^{(e)}(\zeta)$  не обов'язково ставити і розв'язувати відповідну крайову задачу. Його можна отри-

мати з допоміжного пружнопластичного розв'язку, спрямувавши до нескінченності границю текучості:

$$\tau_1^{(e)}(\zeta) = Ke^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\zeta}}. \quad (16)$$

Основний і допоміжний пружні розв'язки повинні бути узгодженими (асимптотично еквівалентними у вершині тріщини), що, як випливає з формул (13), (16), забезпечується рівністю

$$K = \tau_\infty \sqrt[4]{2} \frac{\sqrt[4]{t_C(1-t_C)}}{\sqrt{B(3/4, 3/4)}} \sqrt{a}. \quad (17)$$

Із формул (15), (17) отримуємо залежність довжини смуги пластичного відшарування від величини навантаження за ЛМПЗ:

$$d = \frac{2\sqrt{2} \tau_\infty^2 \sqrt[4]{t_C(1-t_C)}}{k^2 B^2(3/4, 3/4)}. \quad (18)$$

Отже, на початковій стадії розвитку міжфазна пластична смуга розвивається за квадратичним законом, так само, як смуга на продовженні тріщини. На відміну від цього випадку, за умови ідеального контакту включення з середовищем на розвиток міжфазної смуги істотно впливає величина кута  $\alpha$  при вершині включення: для малих навантажень довжина смуги  $d$  пропорційна  $\tau_\infty^{(\pi-\alpha)/(2\pi)}$ .

Порівняння результатів точного розв'язку (суцільні криві) та наближеного за ЛМПЗ (штрихові криві) для  $l/b = 0.01, 0.2, 0.3$  подано на рис. 8.

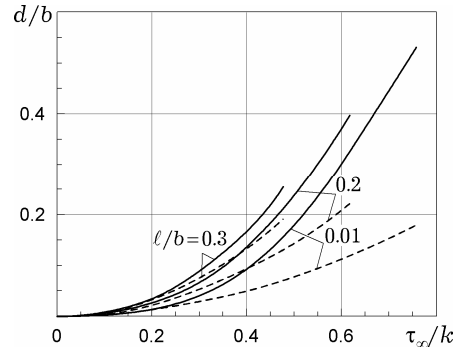


Рис. 8. Довжини смуг пластичного відшарування за точним розв'язком і наближеним за ЛМПЗ.

**Висновки.** За наявності міжфазних тріщин пластичні смуги не досягають кутових точок включення на його горизонтальних діагоналях (подібно, як і континуальні пластичні зони за умови ідеального попереднього контакту включення з середовищем). Основною відмінністю розвитку міжфазних пластичних смуг на продовженні міжфазних тріщин є обмеженість діапазону навантажень, в якому пластичні деформації можуть бути локалізованими лише на межі включення-середовище. Цей діапазон тим вузьчий, чим більші довжини тріщин. Наприклад, для зовсім малих тріщин ( $l = 0.001b$ ) максимально допустиме навантаження всього на 2% менше від границі текучості матеріалу, а коли міжфазна тріщина сягає 20% грані включення, максимально допустиме навантаження дорівнює вже  $0.62k$ . Для наведених на рис. 4 результатів числових експериментів сумарна довжина тріщини та міжфазної тріщини перебуває у межах від  $0.55b$  до  $0.65b$ . Якщо  $l = 0.5b$ , пластичне відшарування за односмуговою схемою стає неможливим вже для навантаження  $0.01k$ . Оскільки у кутових точках включення, що лежать на його горизонтальній діагоналі, нульовими є обидві компоненти напружень, то пластичні зони не можуть досягати цих точок, поки навантаження залишається меншим від границі текучості матеріалу. Факт, що пластичні смуги не можуть продовжувати розвиватися по поверхні, покривши лише її частину, є доволі цікавим і свідчить про виявлену тут обмежену спроможність односмугової моделі пластичного відшарування включення. Є підстави вважати, що для дослідження відшарування включення за наявності міжфазних тріщин слід допускати, крім появи міжфазних пластичних смуг, виникнення смуг, що розвиваються углибину середовища, або континуальних пластичних зон.

1. Иванов В. И., Попов В. Ю. Конформные отображения и их приложения. – Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
2. Клошников В. Д. Математическая теория пластичности. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 208 с.
3. Кривень В. А. Двоперіодична пружнопластична задача поздовжнього зсуву тіла з жорсткими ромбічними включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 1. – С. 109–113.
4. Кривень В. А. Лінійна модель пластичної зони біля гострокінцевого концентратора напружень за поздовжнього зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 4. – С. 41–46.  
Te same: Kryven' V. A. Linear model of a plastic zone in the vicinity of a sharp notch under the conditions of longitudinal shear // Mater. Sci. – 2004. – 40, No. 4. – P. 475–483.
5. Кривень В. А., Сулим Г. Т. Влияние пластического отслоения жестких включений на эффективный модуль сдвига // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 35. – С. 87–93.
6. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 344с.
7. Саврук М. П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами. – Львів: Сполум, 2012. – 384 с. – Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довід, посіб. / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Т. 14.
8. Сулим Г. Т. Основы математической теории термопружной равновaги деформированных твердых тел с тонкими включениями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. Bhattacharya S., Singh I. V., Mishra B. K., Bui T. Q. Fatigue crack growth simulations of interfacial cracks in bi-layered FGMs using XFEM // Comput. Mech. – 2013. – 52, No. 4. – P. 799–814.
10. Kryven V. A., Sulym G. T., Yavorska M. I. Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear // J. Theor. Appl. Mech. (Poland). – 2006. – 44, No. 4. – P. 837–848.

#### ПЛАСТИЧЕСКОЕ ОТСЛОЕНИЕ ВОЛОКНА КВАДРАТНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СДВИГОВОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МЕЖФАЗНЫХ ТРЕЩИН

*Исследовано развитие пластических деформаций, локализованных на поверхности жесткого волокна квадратного поперечного сечения в идеально упругопластической матрице. От двух противоположных вершин волокна исходят одинаковые межфазные трещины. Деформация обусловлена сдвиговой нагрузкой, параллельной диагонали волокна, соединяющей начала трещин. Выявлено, что пока длина межфазной трещины не превышает половины длины грани волокна, пластические деформации могут быть локализованы только на границе включение – матрица. Для трещин, длина которых меньше половины длины грани волокна, определена зависимость длины полос пластического отслаивания от величины нагрузки и показано, что пластические полосы не могут полностью охватывать поверхность волокна на продолжении трещин.*

#### PLASTIC EXFOLIATION OF SQUARE-SHAPED FIBER UNDER SHEAR LOAD IN THE PRESENCE OF INTERFACIAL CRACKS

*The development of plastic deformations localized on the surface of a rigid fiber of square cross-section in a perfect elastoplastic matrix is investigated. Two identical interfacial cracks start from the opposite vertices of the fiber. The deformations are caused by a shear load parallel to the diagonal of the fiber, connecting the cracks tips. It is shown that in the case when the length of the interfacial crack is not more than half of the fiber edge length, plastic deformations can be localized only on the inclusion–matrix edge. For the cracks shorter than half of the length of fiber edge the dependence of the strips of plastic exfoliation on the load are determined. It is also shown that the plastic strips can't cover the total surface of the fiber on the crack extension.*

Тернопільськ. нац. техн. ун-т  
ім. Івана Пулюя, Тернопіль

Одержано  
07.11.13