

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ У ТІЛІ ПІД ДІЄЮ РІЗНИХ ЗА ФОРМОЮ ЖОРСТКИХ ШТАМПІВ

Розглянуто контактні задачі визначення напружено-деформованого стану в пружній півплощині під дією різних за формою штампів (параболічна, циліндрична, еліптична, гіперболічна). Досліджено особливості розподілу контактного тиску та напружень у пружній півплощині, для чого розроблено програмні модулі із використанням спеціальних вбудованих бібліотек для обчислення еліптичних інтегралів третього роду та побудови 3D-зображень і ліній рівня.

Проблема контактної взаємодії залишається головною при розрахунках надійності роботи контактних пар машин і механізмів. Як правило, відомі математичні моделі розглядають взаємодію тіл за достатньо малої області контакту. Це дає змогу моделювати гладкий штамп параболою. Однак в інженерній практиці часто зустрічаються випадки, коли таке наближення не дає можливості адекватно оцінити реальну ситуацію.

У роботі запропоновано математичну модель контактної взаємодії жорстких штампів різної канонічної форми з пружною півплощиною (плоска задача). З використанням відомих методів розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь про взаємодію жорстких штампів з пружною півплощиною [1, 8] отримано розв'язки для контактного тиску під дією штампів канонічної форми (параболічний, циліндричний, еліптичний, гіперболічний). Аналітичні розв'язки визначаються через еліптичні інтеграли Лежандра першого і третього роду. Досліджено особливості поведінки контактного тиску для різних величин області контакту. Ще з робіт Герца відомо, що максимальні напруження при контактній взаємодії тіл виникають на певній глибині під поверхнею контакту. Визначення місцезнаходження концентрації цих напружень, зокрема τ_{\max} , є особливо важливою проблемою в контактних задачах з урахуванням тертя і зношування [6].

Виконано числовий аналіз напружено-деформованого стану всередині пружного тіла, показано його 3D-зображення та побудовано лінії рівня напружень [2, 7, 9], визначено місце локалізації і величину концентрації напружень всередині пружного тіла.

1. Формулювання задачі. Розглядається взаємодія жорсткого штампа з пружною півплощиною, яка знаходиться в умовах плоскої деформації. У таку півплощину під дією вертикальної сили P вдавлюється жорсткий штамп з профілем основи $f(x)$ і областю контакту $-a \leq x \leq a$ (рис. 1). Через E , E_p , і ν , ν_p позначено модулі Юнга та

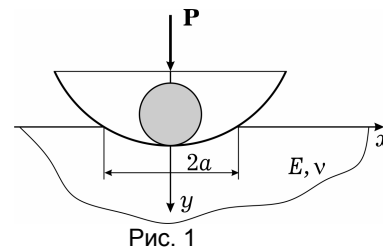


Рис. 1

Пуассона відповідно для півплощини і штампа. Приймаємо, що під штампом дотичні напруження відсутні.

Інтегральне рівняння для визначення контактного тиску має вигляд [1]

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E_*}{2} \frac{df(x)}{dx}, \quad (1)$$

де $\frac{1}{E_*} = \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p}$; $p(x)$ – контактний тиск.

Дослідимо контактну взаємодію пружної півплощини із штампами таких профілей основи:

(а) параболічної форми $f(x) = -\frac{x^2}{2R}$, де R – радіус кривини в точці $x = 0$;

(б) циліндричної форми $f(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$, де R – радіус циліндра;

(в) еліптичної форми $f(x) = -b_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}$, де a_1, b_1 – велика та мала півосі еліпса (для розрахунків вибрано $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$);

(г) гіперболічної форми $f(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + x^2}$ де a_1, b_1 – величини дійсної та уявної півосей гіперболи (для розрахунків вибрано $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$).

Контактний тиск, обмежений на кінцях області контакту, має вигляд

$$p(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{f'(s)}{\sqrt{a^2 - s^2} (x - s)} ds \quad (2)$$

і задовольняє умови

$$p(\pm a) = 0, \quad P = \int_{-a}^a p(x) dx, \quad \int_{-a}^a \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - s^2}} dx = 0. \quad (3)$$

2. Аналіз особливостей контактної тиску. Аналітичні розв'язки для штампів форм (а)–(г) відомі [1, 8] і мають вигляд

– для параболічного штампа:

$$p(x) = E_* \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2R}; \quad (4)$$

– для штампа циліндричної форми:

$$p(x) = \frac{E_*}{2\pi} \sqrt{a^2 - x^2} (RI_1 - RxI_3), \quad (5)$$

де I_1, I_3 – еліптичні інтеграли Лежандра першого і третього роду:

$$I_1 = \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2}}, \quad I_3 = \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 - s^2} (x - s)}; \quad (6)$$

– для штампа еліптичної форми:

$$p(x) = \frac{E_*}{2\pi} \frac{1}{1 \pm \varepsilon} \sqrt{a^2 - x^2} (RI_1 - RxI_3); \quad (7)$$

– для штампа гіперболічної форми:

$$p(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \frac{E_*}{2} \frac{1}{1 \pm \varepsilon} (RI_1^h - RxI_3^h), \quad (8)$$

де

$$I_1^h = \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2}}, \quad I_3^h = \int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2} \sqrt{R^2 + s^2} (x - s)}.$$

Інтегралі I_1^h, I_3^h після перетворень [4, с. 755] також зводяться до еліптичних інтегралів Лежандра першого і третього роду в тригонометричній формі:

$$I_1^h = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2} \sin^2 \varphi}},$$

$$I_3^h = \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2}} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2} \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2}{\left(\frac{x}{R}\right)^2 - \left(\frac{a}{R}\right)^2} \sin^2 \varphi\right)}}. \quad (9)$$

Розрахунки контактної тиску здійснено за допомогою розроблених програмних модулів із використанням спеціальних вбудованих бібліотек [5, 9] для обчислення інтегралів I_1 , I_3 , I_1^h , I_3^h в усьому діапазоні зміни їх параметрів.

На рис. 2 наведено залежності величини області контакту від величини сили, прикладеної до штамп. Криві 1-4 відповідають циліндричній, еліптичній, параболічній і гіперболічній формам штамп при $\epsilon = 0.1$. Для штампів циліндричної та еліптичної форм при наближенні $a/R \rightarrow 1$ притискальна сила прямує до нескінченості ($P/(RE_*) \rightarrow \infty$).

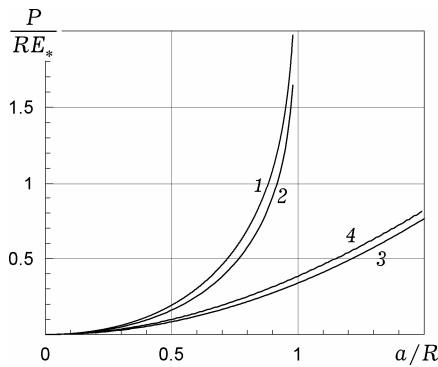


Рис. 2

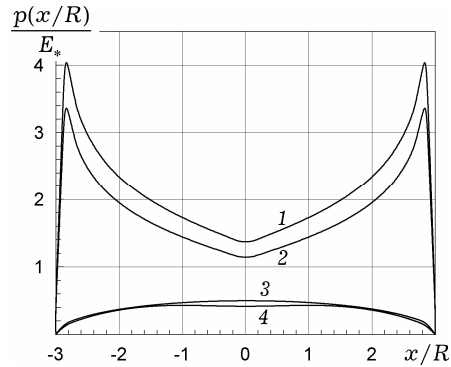


Рис. 3

Розподіли контактної тиску для малої області контакту, $a/R < 0.2$, практично співпадають для всіх форм штампів і є аналогічні до розподілу контактної тиску для штампів параболічної форми. Проведений числовий аналіз це підтверджує. Опосередковано це підтверджує і рис. 2. При збільшенні області контакту проявляються особливості розподілу контактної тиску (рис. 3). При наближенні області контакту до величини діаметра штампів циліндричної форми або до горизонтальної осі штампів еліптичної форми розподіл контактної тиску досягає максимуму біля краю області контакту. Важливо відмітити, що розподіли контактної тиску для штампів гіперболічної і параболічної форм практично співпадають, але для штампів гіперболічної форми при наближенні області контакту до асимптот гіперболи проявляється ефект, аналогічний для штампів скінченної довжини.

3. Напружено-деформований стан у півплощині. У роботі проведено розрахунки компонент напружень в півплощині за формулами [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{2y}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}.\end{aligned}\quad (10)$$

Для обчислення компонент напружень за формулами (10) використовували квадратурні формули середніх прямокутників [3, 5]. Результати числових розрахунків $G_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E_*}$ наведено на рис. 4 – рис. 7 у формі 3D-зображень і ліній рівня [5, 9].

На рис. 4 і рис. 5 показано розподіли напружень G_{xx} для циліндричного штампа: рис. 4 побудовано для випадку $a/R = 0.1$, рис. 5 – для $a/R = 0.97$. При $a/R = 0.1$ максимального значення, $G_{xx} = 0.0183$, напруження досягають у точці $(x/R, y/R) = (0, -0.0500)$, а при відношенні $a/R = 0.97$ максимального значення, $G_{xx} = 1.3144$, напруження досягають у двох точках: $(x_1/R, y_1/R) = (-0.7000, -0.0500)$ і $(x_2/R, y_2/R) = (0.7000, -0.0500)$.

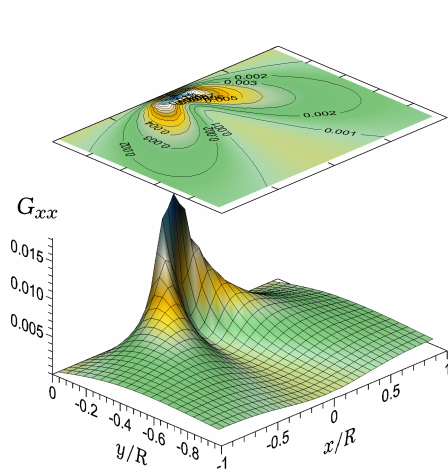


Рис. 4

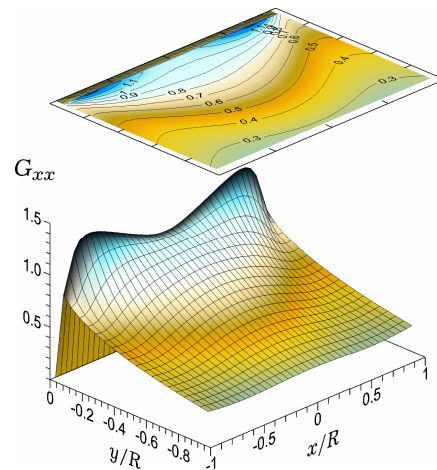


Рис. 5

На рис. 6 наведено розподіл безрозмірного напруження G_{yy} для штампів еліптичної форми при $a/R = 0.97$ та $\varepsilon = 0.1$. Максимального значення, $G_{yy} = 1.6009$, напруження досягають у двох точках: $(x_1/R, y_1/R) = (-0.8500, -0.0500)$ і $(x_2/R, y_2/R) = (0.8500, -0.0500)$.

На рис. 7 наведено розподіл безрозмірного напруження G_{xy} для штампів гіперболічної форми при $a/R = 0.97$. Максимального значення, $G_{xy} = 0.0937$, напруження досягають у точці $(x_1/R, y_1/R) = (-0.8500, -0.4500)$, а мінімального, $G_{xy} = -0.0937$, – у точці $(x_2/R, y_2/R) = (0.8500, -0.4500)$.

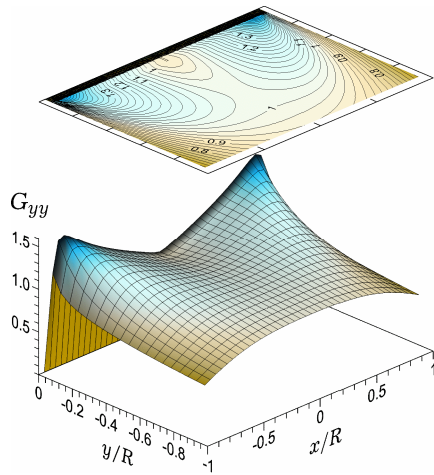


Рис. 6

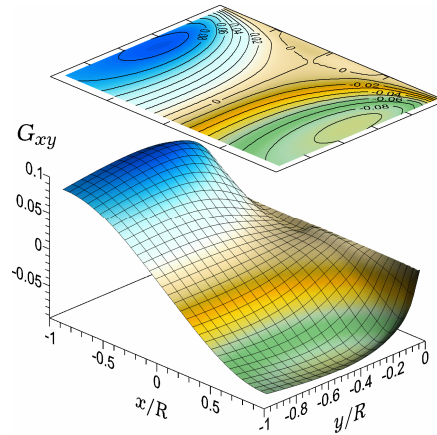


Рис. 7

Важливим параметром напружено-деформованого стану є характеристика $\tau_{\max}(x, y)$, яку розраховуємо за формулою [6]

$$\tau_{\max}(x, y) = \frac{1}{2} |\sigma_{yy} - \sigma_{xx}|. \quad (11)$$

На рис. 8 наведено розподіл безрозмірного напруження $\bar{\tau}_{\max} = \tau_{\max}/E_*$ за допомогою ліній рівня для штампа циліндричної форми при $a/R = 0.1$ (рис. 8а) і при $a/R = 0.97$ (рис. 8б).

Для випадку $a/R = 0.1$ максимального значення, $\bar{\tau}_{\max} = 0.0155$, напруження досягають у точці $(x_1/R, y_1/R) = (0, -0.0800)$, а для випадку $a/R = 0.97$ максимального значення, $\bar{\tau}_{\max} = 0.3888$, напруження досягають у точці $(x_2/R, y_2/R) = (0, -1.1600)$.

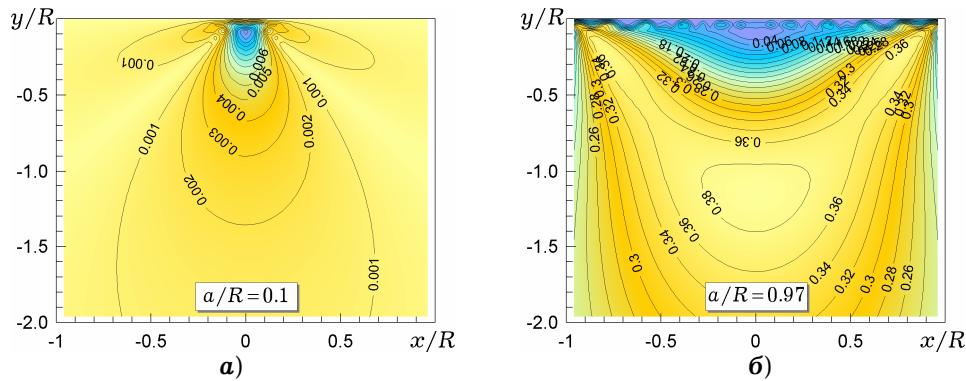


Рис. 8

На рис. 9 наведено розподіл безрозмірного напруження $\bar{\tau}_{\max}$ за допомогою ліній рівня для штампа параболічної форми при $a/R = 0.1$ (рис. 9а) і при $a/R = 0.97$ (рис. 9б).

Для випадку $a/R = 0.1$ максимального значення, $\bar{\tau}_{\max} = 0.0150$, напруження досягають у точці $(x_1/R, y_1/R) = (0, -0.0800)$, а для випадку $a/R = 0.97$ максимального значення, $\bar{\tau}_{\max} = 0.1456$, напруження досягають у точці $(x_2/R, y_2/R) = (0, -0.7600)$.

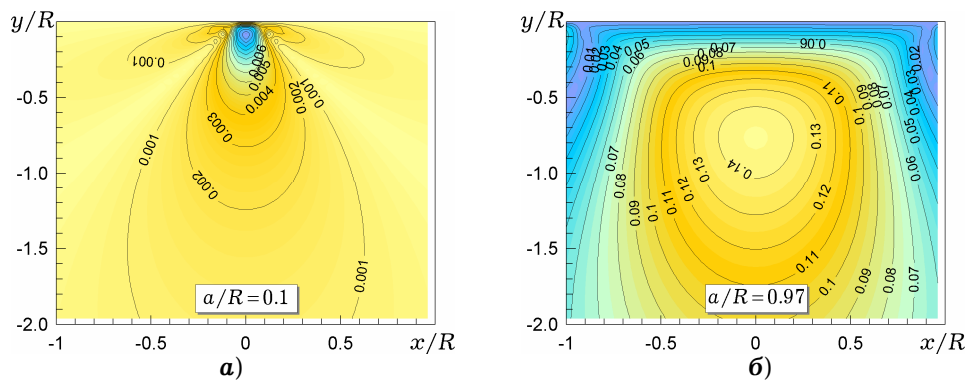


Рис. 9

Отриманий розв'язок дає змогу визначити залежність місцеположення максимального значення τ_{\max} від геометричних і механічних параметрів контактної пари та її навантаження, а також визначити пластичні зони для високих концентрацій напружень з використанням підходів [1, 6]. Якщо прийняти, що матеріал після переходу в пластичний стан описується рівняннями ідеальної пластичності з константою пластичності α , то значення $\tau_{\max} = \alpha$ визначає початок пластичної зони, а лінії рівня дозволяють встановити їх величину і місцезнаходження.

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
2. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MatLab 7: Программирование, численные методы. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
3. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – Москва: Наука, 1972. – 367 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1973. – 832 с.
5. Кукуджанов В. Н. Численные методы в механике сплошных сред: Учеб. пособие. – Москва: МАТИ - Рос. гос. технолог. ун-т им. К. Э. Циолковского, 2006. – 157 с.
6. Максимук О. Періодична контактна задача про взаємодію зубчастої та плоскої поверхонь // Машинознавство. – 2001. – № 2. – С. 13–17.
7. Паасонен В. И. Инструмент научных исследований MATLAB. Учеб. пособие. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 2000. – 61 с.
8. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
9. McMahou D. MATLAB demystified. – New York–London: McGraw-Hill, 2007. – viii+326 p.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТЕЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ПО ФОРМЕ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ

Рассмотрены контактные задачи определения напряженно-деформированного состояния в упругой полуплоскости под действием различных по форме штампов (параболическая, цилиндрическая, эллиптическая, гиперболическая). Исследованы особенности распределения контактного давления и напряжений в упругой полуплоскости, для чего разработаны программные модули с использованием специальных встроенных библиотек для вычисления эллиптических интегралов третьего рода и построения 3D-изображений и линий уровня.

ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE IN A BODY UNDER THE ACTION OF RIGID STAMPS OF VARIOUS SHAPES

The contact problems on the determination of the stress-strain state in an elastic half-plane under the action of different-shape (parabolic, cylindrical, elliptical, hyperbolic) stamps are considered. The features of the contact pressure and stress distributions in the half-plane are investigated by making use of the developed software modules with special embedded libraries for the computation of elliptic integrals of the third kind and the construction of 3D-images and level lines.

¹ Східноєвроп. нац. ун-т ім. Лесі Українки, Луцьк,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів