УДК 519.6

В. Л. Макаров[1], М. М. Гураль[3], М. В. Кутнів[2,3]

ВАГОВІ ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧІ ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ

Встановлено, що у безпосередній близькості до границі швидкість збіжності різницевих схем розв'язування задачі Штурма – Ліувілля для лінійних звичайних диференціальних рівнянь вища, а також отримано апріорні оцінки точності, які дають кількісне визначення вказаного ефекту. Наведено результати чисельних експериментів, які підтверджують цей ефект.

Побудові та дослідженню різницевих схем розв'язування задачі Штурма – Ліувілля для лінійних звичайних диференціальних рівнянь присвячено ряд робіт, зокрема [1–3].

У [7] вперше було встановлено вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для лінійних еліптичних рівнянь, головна частина яких мала дивергентну форму з умовами Діріхле в канонічних областях (відрізок, квадрат) з урахуванням крайового ефекту. З цих оцінок випливало, наскільки підвищується порядок точності різницевих схем при підході до границі області.

У цій роботі отримано вагові апріорні оцінки точності для різницевих схем, що апроксимують задачу Штурма – Ліувілля для одновимірного лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку.

1. Постановка задачі та її властивості. Розглянемо задачу Штурма – Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\big(k(x)u'(x)\big) - q(x)u(x) + \lambda r(x)u(x) = 0, \qquad x \in (0,1)\,,$$

$$u(0) = u(1) = 0\,, \tag{1}$$

коефіцієнти якої задовольняють умови

$$0 < C_1 \le k(x) \le C_2, \quad k(x) \in L_1(0,1), \quad q(x) = Q'(x), \quad Q(x) \in L_2(0,1)\,,$$

$$-\int_0^1 Q(x)v'(x)\,dx \ge 0 \quad \forall v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1), \qquad v(x) \ge 0 \quad \forall x \in [0,1]\,,$$

$$0 < C_3 \le r(x) \le C_4, \qquad r(x) \in L_1(0,1)\,. \tag{2}$$

Якщо $k(x)$ має розрив першого роду у точці $x = \xi$ $(0 < \xi < 1)$, то у цій точці повинні виконуватись умови спряження (неперервність $u(x)$ і $k(x)u'(x)$):

$$[u] = u(\xi + 0) - u(\xi - 0) = 0, \qquad [ku'] = 0 \qquad \text{при} \qquad x = \xi\,.$$

Будемо шукати слабкий розв'язок задачі (1), (2), тобто такі пари $\{\lambda, u(x)\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $u(x) \ne 0$, для яких виконується тотожність

$$a(u,v) = \lambda(ru,v) \quad \forall v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\,, \tag{3}$$

де

$$a(u,v) = \int_0^1 \left\{k(x)u'(x)v'(x) - Q(x)\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]\right\}dx\,,$$

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx\,. \tag{4}$$

Легко побачити, що білінійна форма $a(u,v)$ є симетричною, неперервною і $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$-еліптичною. Отже, для задачі (3) існує зростаюча послідовність строго додатних власних чисел

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n\le\ldots,\qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,$$

які відповідають ортонормованим власним функціям $u_n(x)$, $n\ge 1$, тобто таким, що

$$a(ru_n,u_m)=\lambda_n\delta_{n,m},\qquad (ru_n,u_m)=\delta_{n,m},\qquad n,m\ge 1,$$

і які утворюють повну систему у гільбертових просторах $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ і $L_{2,r}(0,1)$.

Якщо ввести частку Релея

$$R(v)=\frac{a(v,v)}{(rv,v)},$$

то для власних значень будуть виконуватись співвідношення (див., наприклад, [5, с. 280])

$$\lambda_1=\inf\left\{R(v):v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\right\}=R(u_1),$$

$$\lambda_n=\inf\left\{R(v):v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1),\,(rv,u_m)=0,\ m=1,\ldots,n-1\right\}=R(u_n),\quad n\ge 2.$$

Лема 1. *Для розв'язку варіаційної задачі* (3), (4) *при виконанні умов* (2) *справджуються нерівності*

$$c_1n^2\le\lambda_n\le c_2n^2,\qquad c_1>0, \tag{5}$$

$$\|u_n\|_{0,\infty,(0,1)}\le c_3\sqrt{n}, \tag{6}$$

$$\left\|\frac{u_n(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,(0,1)}\le c_4n, \tag{7}$$

$$\|u_n\|_{1,2,(0,1)}\le c_5n, \tag{8}$$

де c_i, $i=1,\ldots,5$, *не залежать від* n,

$$\|u\|_{0,\infty,(0,1)}=\max_{0\le x\le 1}|u(x)|,\qquad \|u\|_{0,2,(0,1)}=\sqrt{(u,u)},$$

$$\|u\|_{1,2,(0,1)}=\left(\|u\|_{0,2,(0,1)}^2+\|u'\|_{0,2,(0,1)}^2\right)^{1/2}.$$

Д о в е д е н н я. У рівнянні (1) зробимо заміну

$$t=\int_0^x r(\xi)\,d\xi.$$

Тоді з урахуванням позначень

$$\bar{k}(t)=k(x)r(x),\qquad \bar{q}(t)=\frac{q(x)}{r(x)},\qquad \bar{Q}'(t)=\bar{q}(t),\qquad \bar{v}(t)=v(x),$$

будемо мати оцінку

$$\lambda_n=\sup_{\{u_m\}_{m=1}^{n-1}}R(u_m)=\sup_{\{u_m\}_{m=1}^{n-1}}\inf_{\substack{v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\\(rv,u_m)=0}}R(v)=$$

$$=\sup_{\{u_m\}_{m=1}^{n-1}}\inf_{\substack{v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\\(rv,u_m)=0}}\frac{\int_0^1 k(x)\left(v'(x)\right)^2dx-\int_0^1 Q(x)\left(v^2(x)\right)'dx}{\int_0^1 r(x)v^2(x)\,dx}=$$

$$= \sup_{\{u_m\}_{m=1}^{n-1}} \inf_{\substack{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \\ (rv,u_m)=0}} \frac{\int_0^1 \bar{k}(t)\left(\bar{v}'(t)\right)^2 dt - \int_0^1 \bar{Q}(t)(\bar{v}^2(t))' \, dt}{\int_0^1 \bar{v}^2(t)\,dt} \geq$$

$$\geq \sup_{\{u_m\}_{m=1}^{n-1}} \inf_{\substack{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \\ (rv,u_m)=0}} C_1C_3\int_0^1 \left(\bar{v}'(t)\right)^2 dt = C_1C_3\pi^2 n^2 = c_1 n^2 .$$

Для отримання оцінки зверху до правої частини нерівності

$$\int_0^1 \bar{q}(t)\bar{v}^2(t)\,dt = -2\int_0^1 \bar{v}(t)\bar{v}'(t)\int_0^t \bar{q}(\xi)\,d\xi\,dt \leq 2\|\bar{q}\|_{L_p(0,1)} \int_0^1 \left|\bar{v}(t)\bar{v}'(t)\right| dt$$

застосувавши нерівність Коші − Буняковського, будемо мати

$$\int_0^1 \bar{q}(t)\bar{v}^2(t)\,dt \leq 2\|\bar{q}\|_{L_p(0,1)} \left(\int_0^1 \frac{\bar{v}^2(t)}{\bar{k}(t)}\,dt \int_0^1 \bar{k}(t)(\bar{v}'(t))^2\,dt\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{C_1C_3}}\|\bar{q}\|_{L_p(0,1)}\left(\int_0^1 \bar{v}^2(t)\,dt + \int_0^1 \bar{k}(t)(\bar{v}'(t))^2\,dt\right).$$

Враховуючи, що

$$\int_0^1 \bar{q}(t)\bar{v}^2(t)\,dt = -\int_0^1 \bar{Q}(t)(\bar{v}^2(t))'\,dt ,$$

отримаємо

$$\lambda_n = \sup_{\{u_m\}_{m=1}^{n-1}} \inf_{\substack{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \\ (rv,u_m)=0}} \frac{\int_0^1 \bar{k}(t)(\bar{v}'(t))^2\,dt - \int_0^1 \bar{Q}(t)(\bar{v}^2(t))'\,dt}{\int_0^1 \bar{v}^2(t)\,dt} \leq$$

$$\leq \sup_{\{u_m\}_{m=1}^{n-1}} \inf_{\substack{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \\ (rv,u_m)=0}} \left(\int_0^1 \bar{k}(t)(\bar{v}'(t))^2\,dt + \frac{1}{\sqrt{C_1C_3}}\|\bar{q}\|_{L_p(0,1)} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^1 \bar{v}^2(t)\,dt + +\int_0^1 \bar{k}(t)(\bar{v}'(t))^2\,dt\right)\right)\left(\int_0^1 \bar{v}^2(t)\,dt\right)^{-1} \leq$$

$$\leq \sup_{\{u_m\}_{m=1}^{n-1}} \inf_{\substack{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \\ (rv,u_m)=0}} \frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{C_1C_3}}\|\bar{q}\|_{L_p(0,1)}\right)\int_0^1 \bar{k}(t)(\bar{v}'(t))^2\,dt}{\int_0^1 \bar{v}^2(t)\,dt} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{C_1C_3}}\|\bar{q}\|_{L_p(0,1)} \leq c_{21} \sup_{\{u_m\}_{m=1}^{n-1}} \inf_{\substack{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \\ (rv,u_m)=0}} \frac{\int_0^1 (\bar{v}'(t))^2\,dt}{\int_0^1 \bar{v}^2(t)\,dt} + c_{22} \leq$$

$$\leq c_2 n^2 .$$

Нерівність (5) доведено.

Розглянемо далі

$$\overline{u}_n^2(t) = \overline{u}_n^2(t) - \overline{u}_n^2(0) = 2\int_0^t \overline{u}_n(\xi)\overline{u}_n'(\xi)\,d\xi \le 2\left(\int_0^t \overline{u}_n^2(\xi)\,d\xi\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\int_0^t (\overline{u}_n'(\xi))^2\,d\xi\right)^{1/2} \le 2\left(\int_0^1 (\overline{u}_n'(\xi))^2\,d\xi\right)^{1/2} \le c_{31}n\,.$$

Звідси маємо

$$\|u_n\|_{0,\infty,(0,1)} \le c_3\sqrt{n}\,.$$

Нерівність (6) доведено.

Для доведення нерівності (7) розглянемо тотожності

$$u_n^2(x) = (1-x)u_n^2(x) + xu_n^2(x)\,,$$

$$u_n^2(x) = \left(\int_0^x u_n'(\xi)\,d\xi\right)^2 = \left(\int_x^1 u_n'(\xi)\,d\xi\right)^2.$$

Здійснимо підстановку другої тотожності у першу та застосуємо нерівність Коші – Буняковського, тоді

$$u_n^2(x) = (1-x)\left(\int_0^x u_n'(\xi)\,d\xi\right)^2 + x\left(\int_x^1 u_n'(\xi)\,d\xi\right)^2 \le$$

$$\le x(1-x)\int_0^x (u_n'(\xi))^2\,d\xi + x(1-x)\int_x^1 (u_n'(\xi))^2\,d\xi \le$$

$$\le x(1-x)\int_0^1 (u_n'(\xi))^2\,d\xi = x(1-x)\pi^2 n^2\,.$$

Поділивши ліву і праву частини цієї нерівності на $x(1-x)$, матимемо

$$\frac{u_n^2(x)}{x(1-x)} \le \pi^2 n^2\,,$$

з якої випливає нерівність (7).

Згідно з нерівністю Фрідріхса одержимо

$$\|u_n\|_{1,2,(0,1)} = \left(\int_0^1 (u^2(\xi) + (u'(\xi))^2)\,d\xi\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(c_{51}\int_0^1 (u'(\xi))^2\,d\xi + \int_0^1 (u'(\xi))^2\,d\xi\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left((c_{51}+1)\int_0^1 (u'(\xi))^2\,d\xi\right)^{1/2} \le ((c_{51}+1)\pi^2 n^2)^{1/2} \le c_5 n\,.$$

Лему доведено повністю. ♦

2. Різницева задача Штурма – Ліувілля і її властивості. На рівномірній сітці $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1,\dots,N-1,\ h = 1/N\}$ апроксимуємо задачу (1) за допомогою різницевої схеми (див., наприклад, [3, гл. 3, § 1]):

$$(\tilde{a}y_{\bar{x}})_x - \tilde{d}y + \lambda^h \rho y = 0, \qquad x \in \omega_h, \qquad y(0) = y(1) = 0\,. \tag{9}$$

Отже, різницева задача Штурма – Ліувілля полягає у знаходженні таких значень параметра λ^h (власних значень), для яких існує нетривіальний розв'язок $y(x)$ (власні функції) задачі (9).

Припустимо, що коефіцієнти різницевої схеми (9) задовольняють умови

$$0 < C_1' \le \tilde{a} \le C_2', \quad 0 < C_3' \le \rho \le C_4', \quad \tilde{d} \ge 0, \quad \left\{ \sum_{\xi=h}^{1-h} h\tilde{d}^p(\xi) \right\}^{1/p} \le C_5', \quad (10)$$

де сталі C_j', $j = 1,\ldots,5$, не залежать від h.

Розглянемо також інтегральний наслідок з (1) – точну триточкову різницеву схему

$$(au_{\bar{x}})_x - du + \lambda T^x(ru) = 0, \qquad x \in \omega_h, \qquad y(0) = y(1) = 0, \qquad (11)$$

де (див. [4, гл. 2, § 1])

$$a(x_i) = \left[\frac{1}{h} v_1^i(x_i)\right]^{-1}, \qquad d(x_i) = T_1^{x_i}(Q), \qquad i = 1,\ldots, N-1,$$

$$T^{x_i}(w) = \frac{1}{hv_1^i(x_i)} \int_{x_i-h}^{x_i} v_1^i(\xi)w(\xi)\,d\xi + \frac{1}{hv_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_i+h} v_2^i(\xi)w(\xi)\,d\xi,$$

$$T_1^{x_i}(w) = -\frac{1}{hv_1^i(x_i)} \int_{x_i-h}^{x_i} \frac{dv_1^i(\xi)}{d\xi} w(\xi)\,d\xi - \frac{1}{hv_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_i+h} \frac{dv_2^i(\xi)}{d\xi} w(\xi)\,d\xi, \quad (12)$$

$v_1(x)$, $v_2(x)$ – шаблонні функції.

Різницеву задачу (9) будемо розглядати у просторі $\overset{\circ}{H}_h$ сіткових функцій y таких, що $y(0) = y(1) = 0$, зі скалярними добутками та нормами

$$(y,v) = \sum_{\xi\in\omega_h} hy(\xi)v(\xi), \qquad (y,v] = \sum_{\xi\in\omega_h^+} hy(\xi)v(\xi), \qquad \omega_h^+ = \omega_h \cup x_N,$$

$$\|y\|_{0,2,\omega_h} = (y,y)^{1/2}, \qquad \|y\|_{0,2,\omega_h^+} = (y,y]^{1/2},$$

$$\|y\|_{1,2,\omega_h} = \left(\|y\|_{0,2,\omega_h}^2 + \|y_{\bar{x}}\|_{0,2,\omega_h^+}^2\right)^{1/2}, \qquad \|y\|_{0,\infty,\omega_h} = \max_{\xi\in\omega_h} |y(\xi)|.$$

Помноживши (9) скалярно на y і, враховуючи формулу Ґріна (див. [3, с. 47]), знаходимо

$$\lambda_h = R_N(y) = \frac{(\tilde{a}, y_{\bar{x}}^2] + (\tilde{d}, y^2)}{(\rho, y^2)}.$$

Легко бачити, що різницева задача (9) еквівалентна варіаційній задачі

$$\lambda_1^h = \min_y R_N(y), \quad \lambda_n^h = \max_{\{y_m\}_{m=1}^{n-1}} \min_{\substack{y\in\overset{\circ}{H}_h \\ (\rho y, y_m)=0}} R_N(y), \qquad n = 2,3,\ldots, N-1. \quad (13)$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови* (10). *Тоді для розв'язку різницевої задачі* (9) *справджуються такі твердження:*

1°. *Існує* $N-1$ *власних значень* $0 < \lambda_1^h < \lambda_2^h < \ldots < \lambda_{N-1}^h$, *яким відповідають власні функції* $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_{N-1}(x)$. *Кожному власному значенню відповідає тільки одна власна функція.*

2°. *Власні функції* $\{y_n(x)\}$ *утворюють ортонормовану систему*:

$$(\rho y_n, y_m) = \sum_{\xi\in\omega_h} h\rho(\xi)y_n(\xi)y_m(\xi) = \delta_{n,m}.$$

3°. *Виконуються такі оцінки*:

$$M_1'n^2 \le \lambda_n^h \le M_2'n^2, \qquad n = 1,\ldots, N-1, \qquad (14)$$

де M_1', M_2' – *додатні сталі, що не залежать від* n *і* h,

$$\|y_n\|_{0,\infty,\omega_h} \le c_3'\sqrt{n}, \qquad \left\|\frac{y_n(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h} \le c_4'n, \qquad \|y_n\|_{1,2,\omega_h} \le c_5'n. \quad (15)$$

Д о в е д е н н я. Доведення пунктів ***1°***, ***2°*** випливають зі сформульованих вище тверджень і висновків. Доведемо пункт ***3°***.

Із (13) отримаємо

$$\lambda_n^h \ge \frac{C_1'}{C_4'} \max_{\{y_m\}_{m=1}^{n-1}} \min_{\substack{y \in \overset{\circ}{H}_h \\ (\rho y, y_m)=0}} \frac{(y_{\bar{x}}^2, 1]}{(y^2, 1)} \ge M' n^2 .$$

Далі використаємо нерівність

$$(\tilde{d}, y^2) = \sum_{i=1}^{N-1} h \left(\sum_{j=1}^{i} h \tilde{d}_j \right)_{\bar{x}} y_i^2 = - \sum_{i=0}^{N-1} h \sum_{j=1}^{i} h \tilde{d}_j (y_{i+1} + y_i) y_{x,i} \le$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{C_1'}} \sum_{i=1}^{N-1} h \tilde{d}_i \sum_{i=1}^{N} h a_i y_{\bar{x},i}^2 \sum_{i=1}^{N-1} h y_i^2 \le \frac{C_5'}{\sqrt{C_1'}} \left[\left(a, y_{\bar{x}}^2\right] + (1, y^2) \right].$$

Звідси матимемо

$$\lambda_n^h \le \tilde{M}_1 \max_{\{y_m\}_{m=1}^{n-1}} \min_{\substack{y \in \overset{\circ}{H}_h \\ (\rho y, y_m)=0}} \frac{(y_{\bar{x}}^2, 1]}{(y^2, 1)} + \tilde{M}_2 \le M_2' n^2 .$$

Отже, нерівності (14) доведено.

Нехай x − довільний вузол сітки $\overline{\omega}_h$. Розглянемо тотожність

$$y_n^2(x) = \sum_{\xi=h}^{x} h [y_n^2(\xi)]_{\bar{\xi}} = \sum_{\xi=h}^{x} h [y_n(\xi) + y_n(\xi - h)] (y_n(\xi))_{\bar{\xi}} . \tag{16}$$

Застосовуючи до правої частини (16) нерівність Коші − Буняковського і враховуючи, що $(\rho, y_n^2) = 1$, $\left(a, (y_n)_{\bar{x}}^2\right] \le \lambda_n^h$, отримуємо

$$y_n^2(x) \le \frac{2}{\sqrt{C_1' C_3'}} \left(\sum_{\xi=h}^{x} h \tilde{a}(\xi) (y_n(\xi))_{\bar{\xi}}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\xi=h}^{x} h \rho(\xi) y_n^2(\xi) \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{C_1' C_3'}} \left(\tilde{a}, (y_n(x))_{\bar{x}}^2 \right]^{1/2} \le \frac{2}{\sqrt{C_1' C_3'}} (\lambda_n^h)^{1/2} \le M^2 n .$$

Звідси випливає нерівність $\| y_n \|_{0,\infty,\omega_h} \le c_3' \sqrt{n}$.

Функцію $y_n(x)$ на сітці $\overline{\omega}_h$ можна подати у вигляді

$$y_n^2(x) = (1-x) y_n^2(x) + x y_n^2(x). \tag{17}$$

З іншого боку, оскільки $y_n(0) = y_n(1) = 0$, то

$$y_n^2(x) = \left(\sum_{\xi=h}^{x} (y_n)_{\bar{\xi}}(\xi) h \right)^2 = \left(\sum_{\xi=x+h}^{1} (y_n)_{\bar{\xi}}(\xi) h \right)^2 .$$

Підставимо ці рівності у (17):

$$y_n^2(x) = (1-x) \left(\sum_{\xi=h}^{x} (y_n)_{\bar{\xi}}(\xi) h \right)^2 + x \left(\sum_{\xi=x+h}^{1} (y_n)_{\bar{\xi}}(\xi) h \right)^2 .$$

Оцінимо суми у правій частині, використовуючи нерівність Коші − Буняковського:

$$y_n^2(x) \le (1-x) \sum_{\xi=h}^{x} h \sum_{\xi=h}^{x} (y_n)_{\bar{\xi}}^2(\xi) h + x \sum_{\xi=x+h}^{1} h \sum_{\xi=x+h}^{1} (y_n)_{\bar{\xi}}^2(\xi) h \le$$

$$\le x(1-x) \sum_{\xi=h}^{1} (y_n)_{\bar{\xi}}^2(\xi) h = x(1-x) \left((y_n)_{\bar{\xi}}^2, 1 \right) \le c_{41} x(x-1) n^2 .$$

Звідси

$$\frac{y_n^2(x)}{x(1-x)} \le c_{41} n^2 ,$$

а тому справджується оцінка

$$\left\| \frac{y_n(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \right\|_{0,\infty,\omega_h} \le c_4' n\,.$$

Враховуючи, що при $y_n(0) = y_n(1) = 0$ виконується нерівність $\|y_n\|_{0,2,\omega_h} \le$ $\le \frac{1}{4}\|(y_n)_{\bar{x}}\|_{0,2,\omega_h^+}$ (див. [4, с. 55]), і, крім того, $\big(1,(y_n)^2_{\bar{x}}\big] \le \pi^2 n^2$, будемо мати

$$\|y_n\|_{1,2,\omega_h} = \big(\|y_n\|^2_{0,2,\omega_h} + \|(y_n)_{\bar{x}}\|^2_{0,2,\omega_h^+}\big)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{4}\big(1,(y_n)^2_{\bar{x}}\big] + \big(1,(y_n)^2_{\bar{x}}\big]\right)^{1/2} \le \frac{\sqrt{5}}{2}\big(1,(y_n)^2_{\bar{x}}\big]^{1/2} \le c_5' n\,. \qquad \blacklozenge$$

3. Вагові оцінки точності різницевих власних функцій. Для похибки $z = y - u$ різницевої схеми (9) з урахуванням (11) маємо схему

$$(\tilde{a} z_{\bar{x}})_x - \tilde{d} z + \lambda^h \rho z = \Psi(x), \qquad x \in \omega_h, \qquad z(0) = z(1) = 0\,, \tag{18}$$

де похибка апроксимації схеми (9)

$$\Psi(x) = ((a - \tilde{a})u_{\bar{x}})_x - (d - \tilde{d})u + (\lambda - \lambda^h)\rho u +$$

$$+ \lambda^h[T^x(ru) - \rho u] = \psi(x) + (\lambda - \lambda^h)\rho u\,.$$

Тут

$$\psi(x) = \eta_x + \psi^*(x), \qquad \eta_x = ((a - \tilde{a})u_{\bar{x}})_x\,,$$

$$\psi^*(x) = \lambda^h[T^x(ru) - \rho u] - (d - \tilde{d})u\,.$$

Оскільки λ^h – власне значення задачі (9), то неоднорідне рівняння (18) розв'язне тільки в тому випадку, коли власна функція y задачі (9) ортогональна до правої частини рівняння (18), тобто, коли виконується тотожність

$$(\Psi, y) = (\psi, y) + (\lambda - \lambda^h)(\rho u, y) = 0\,. \tag{19}$$

Покладемо

$$\tilde{a}(x) = \overset{m_1}{a}(x), \qquad \tilde{d}(x) = \overset{m_2}{T_1^x}(Q) = \overset{m_2}{d}(x), \qquad \rho(x) = \overset{m_3}{T^x}(r)\,. \tag{20}$$

Для коефіцієнтів $\overset{m_1}{a}(x)$, $\overset{m_2}{d}(x)$ та оператора $\overset{m_3}{T^x}(r)$ відсіченої різницевої схеми виконуються оцінки (див. [4, гл. 2, § 3])

$$0 \le \left|a(x) - \overset{m_1}{a}(x)\right| \le c h^{(m_1+1)(1+\lambda-1/p)} \|Q\|^{m_1+1}_{\lambda,p,e(x)}\,, \qquad e(x) = (x-h, x)\,,$$

$$\left|d(x) - \overset{m_2}{d}(x)\right| = \left|T_1^x(Q) - \overset{m_2}{T_1^x}(Q)\right| \le c h^{(m_2+1)(1+\lambda-1/p)-1/p+\lambda-1} \|Q\|^{m_2+2}_{\lambda,p,\bar{e}(x)}\,,$$

$$\bar{e}(x) = (x-h, x+h)\,,$$

$$\left|T^x(r) - \overset{m_3}{T^x}(r)\right| \le c h^{(m_3+1)(1+\lambda-1/p)} \|r\|_{0,\infty,(0,1)} \|Q\|^{m_3+1}_{\lambda,p,\bar{e}(x)}\,. \tag{21}$$

З урахуванням умов (10) для розв'язку різницевої схеми (9), (20) маємо таке твердження.

Лема 3. *Нехай виконуються умови* (2), λ_n *і* λ_n^h *– власні значення задач* (3), (9), (20) *відповідно. Тоді справджується оцінка*

$$\left|\lambda_n^h - \lambda_n\right| \le M(n)\left\{\left\|(a - \overset{m_1}{a})u_{\bar{x}}\right\|_{0,2,\omega_h^+} + \left\|d - \overset{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h} \|u\|_{0,\infty,\omega_h} + \right.$$

$$\left. + \left\|T^x(ru) - \overset{m_3}{T^x}(r)u\right\|_{0,1,\omega_h}\right\},$$

де $M(n) = \mathrm{const} > 0$ *не залежить від* h.

Д о в е д е н н я. Розглянемо рівність (19). Нехай $u(x)$ і $y(x)$ − нормовані власні функції задач (1) і (9) відповідно. Оскільки $\|y-u\|_{0,\infty,\omega_h} \to 0$ при $h \to 0$ (див., наприклад, [3, с. 177]), то при достатньо малому h можна стверджувати, що $(\rho u, y) \neq 0$. Власному значенню λ^h відповідає тільки одна власна функція, визначена з точністю до довільного множника c_0. Виберемо множник c_0 таким чином, щоб функція $\overline{y} = c_0 y$ була ортогональною до різниці $\overline{z} = \overline{y} - u$:

$$(\rho\overline{y}, \overline{z}) = 0. \tag{22}$$

Звідси отримуємо

$$(\rho, uy) = (\rho y, \overline{y} - \overline{z}) = (\rho y, \overline{y}) - (\rho y, \overline{z}) = (\rho y, \overline{y}) = c_0(\rho, y^2) = c_0.$$

Оскільки $y(x) \to u(x)$ при $h \to 0$, то $c_0 \to 1$ при $h \to 0$. Будемо вважати, що $c_0 > 0$.

Далі, з огляду на те, що

$$(\rho, u^2) = \left(\rho, (\overline{y} - \overline{z})^2\right) = (\rho, \overline{z}^2) - 2(\rho, \overline{z}\,\overline{y}) + (\rho, \overline{y}^2) = (\rho, \overline{z}^2) + (\rho, \overline{y}^2) =$$

$$= (\rho\overline{z}, \overline{z}) + c_0^2 = (\rho\overline{z}, \overline{y} - u) + c_0^2 = c_0^2 - (\rho, \overline{z}u),$$

маємо

$$1 - c_0^2 = -(\rho, \overline{z}u) - \left((\rho, u^2) - \|u\|^2_{L_{2,r}}\right). \tag{23}$$

Умову (19) використаємо для визначення $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda^h = \frac{-(\psi, y)}{(\rho u, y)} = \frac{-\left(\psi, \dfrac{c_0 y}{c_0}\right)}{(\rho(\overline{y} - \overline{z}), y)} = \frac{-(\psi, \overline{y})}{c_0(\rho c_0 y, y)} = \frac{-(\psi, \overline{y})}{c_0^2}.$$

Перетворимо тепер праву частину цієї тотожності, враховуючи, що $\psi = \eta_x + \psi^*$:

$$(\psi, \overline{y}) = -\left(\eta, \overline{y}_{\overline{x}}\right] + (\psi^*, \overline{y}).$$

Звідси і з оцінок (14), (15) випливає

$$|\Delta\lambda_n| = \left|\lambda_n - \lambda_n^h\right| = \frac{|(\psi, \overline{y})|}{c_0^2} \le \frac{\left|\left(\eta, \overline{y}_{\overline{x}}\right]\right| + \left|(\psi^*, \overline{y})\right|}{c_0^2} \le$$

$$\le M(n)\left(\|\eta\|_{0,2,\omega_h^+}\|y\|_{1,2,\omega_h} + \left(1, \left|\psi^*\right|\right]\right) \le$$

$$\le M(n)\left(\sum_{\xi=h}^{1} h\left|(a - \tilde{a})u_{\overline{x}}\right| + \sum_{\xi=h}^{1} h\left|\lambda[T^x(ru) - \rho u] - (d - \tilde{d})u\right|\right) \le$$

$$\le M(n)\left\{\left\|(a - \overset{m_1}{a})u_{\overline{x}}\right\|_{0,2,\omega_h^+} + \left\|d - \overset{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h}\|u\|_{0,\infty,\omega_h} + \right.$$

$$\left. + \left\|T^x(ru) - \overset{m_3}{T^x}(r)u\right\|_{0,1,\omega_h}\right\}. \qquad \blacklozenge$$

Лема 4. *Нехай виконуються умови* (2). *Тоді* $\exists h_0 > 0$ *таке, що* $\forall h \in (0, h_0)$ *справджується оцінка*

$$\left\|\frac{y_n(x) - u_n(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h} \le M(n)\left\{\ln\frac{1}{h}\left[\left\|(a - \overset{m_1}{a})u_{\overline{x}}\right\|_{0,2,\omega_h^+} + \right.\right.$$

$$\left. + \left\|(d - \overset{m_2}{d})u\right\|_{0,1,\omega_h} + \left\|T^x(ru) - \overset{m_3}{T^x}(r)u\right\|_{0,1,\omega_h}\right] +$$

$$\left. + \left|\sum_{x\in\omega_h} h\,\overset{m_3}{T^x}(r)u^2(x) - \int_0^1 r(x)u^2(x)\,dx\right|\right\}.$$

Д о в е д е н н я. Зведемо задачу (18) до рівняння

$$\bar{z}(x) = \lambda^h \big(G(x,\xi), \rho(\xi)\bar{z}(\xi)\big) + \big(G(x,\xi), \Psi(\xi)\big), \tag{24}$$

де $G(x,\xi) = G^h(x,\xi)$ – різницева функція Ґріна оператора $\Lambda y = (a y_{\bar{x}})_x - dy$ з крайовими умовами $y(0) = y(1) = 0$.

Власна функція $\bar{y}$ задачі (9) задовольняє рівняння

$$\bar{y}(x) = \lambda^h \big(G(x,\xi), \rho(\xi)\bar{y}(\xi)\big). \tag{25}$$

Нехай $\lambda^h = \lambda_n^h$ – n-те власне значення, а $y = y_n(x)$ – n-та нормована власна функція, $(\rho, y_n^2) = 1$.

Щоб отримати замість (24), (25) рівняння із симетричним ядром, зробимо таку заміну:

$$v(x) = \sqrt{\rho(x)}\,\bar{z}(x), \quad \varphi(x) = \sqrt{\rho(x)}\,\bar{y}(x), \quad K(x,\xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}\,G(x,\xi).$$

Тоді рівняння (24), (25) набудуть вигляду

$$v_n(x) = \lambda_n^h \big(K(x,\xi), v(\xi)\big) + f(x),$$

$$f(x) = \big(K(x,\xi), \bar{\Psi}(\xi)\big), \qquad \bar{\Psi} = \Psi/\sqrt{\rho},$$

$$\varphi_n(x) = \lambda_n^h \big(K(x,\xi), \varphi_n(\xi)\big). \tag{26}$$

Умова ортогональності $f(x)$ до функцій $\varphi_n(x)$ виконується з огляду на умову (19):

$$\big(\varphi_n(x), f(x)\big) = \big(\varphi_n(x), (K(x,\xi), \bar{\Psi}(\xi))\big) = \big(\bar{\Psi}(\xi), (K(x,\xi), \varphi_n(x))\big) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^h}\big(\bar{\Psi}(\xi), \varphi_n(\xi)\big) = \frac{1}{\lambda_n^h}\left(\frac{\Psi}{\sqrt{\rho}}, \sqrt{\rho}\, y_n\right) = \frac{1}{\lambda_n^h}(\Psi, y_n) = 0.$$

Умову (22) запишемо так:

$$(\varphi_n, v_n) = 0. \tag{27}$$

Будемо шукати розв'язок $v(x) = v_n(x)$ рівняння (26) у вигляді

$$v(x) = f(x) + \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} c_k \varphi_k(x)$$

при додатковій умові (27). Підставимо цей вираз у (26):

$$v(x) = f(x) + \lambda_n^h \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} c_k \big(K(x,\xi), \varphi_k(\xi)\big) + \lambda_n^h \big(K(x,\xi), f(\xi)\big). \tag{28}$$

Розкладаючи $f(x)$ за власними функціями $\{\varphi_k\}$:

$$f(x) = \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} d_k \varphi_k(x), \qquad d_k = (f, \varphi_k),$$

отримаємо

$$\big(K(x,\xi), f(\xi)\big) = \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} \frac{d_k}{\lambda_k^h}\varphi_k(x), \qquad c_k = \frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h} c_k + \frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h}(f, \varphi_k).$$

Тоді, підставивши

$$c_k = \frac{\lambda_n^h (f, \varphi_k)}{\lambda_k^h \left(1 - \dfrac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h}\right)} = \frac{\lambda_n^h (f, \varphi_k)}{\lambda_k^h - \lambda_n^h}$$

у (28), отримаємо

$$v(x) = f(x) + \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} \frac{\lambda_n^h (f, \varphi_k)}{\lambda_k^h \left(1 - \dfrac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h}\right)} \varphi_k(x) = \sum_{k=1, k\neq n}^{N-1} \frac{\lambda_n^h (f, \varphi_k)}{\lambda_k^h - \lambda_n^h}\varphi_k(x).$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на $\sqrt{x(1-x)}$ і оцінимо величину $\dfrac{v(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$:

$$\left|\frac{v(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\right| \le \sum_{k=1,k\ne n}^{N-1}\left|\frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h-\lambda_n^h}\left(\frac{f}{\sqrt{x(1-x)}},\sqrt{x(1-x)}\varphi_k\right)\frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\right| \le$$

$$\le \max_{x\in\omega_h}\left|\frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\right|\frac{1}{2}\sum_{k=1,k\ne n}^{N-1}\frac{\lambda_n^h}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|}\left|\frac{\varphi_k}{\sqrt{x(1-x)}}\right|.$$

Оскільки згідно з (10) і (15)

$$\left|\frac{\varphi_k}{\sqrt{x(1-x)}}\right| = \frac{\sqrt{\rho(x)}\,|\bar{y}(x)|}{\sqrt{x(1-x)}} \le \frac{\sqrt{C_4'}\,c_0\,|y(x)|}{\sqrt{x(1-x)}} \le \sqrt{C_4'}\,c_0c_4'k\,,$$

то отримаємо

$$\left|\frac{v(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\right| \le M\left\|\frac{f}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}\lambda_n^h\sum_{k=1,k\ne n}^{N-1}\frac{k}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ − довільне число, що не залежить від h. Виберемо номер n_0 такий, що $\lambda_{n_0}^h \ge (1+\varepsilon)\lambda_n^h$. Тоді згідно з (14)

$$\sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{k}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|} \le \sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{k}{\left|\lambda_k^h-\dfrac{\lambda_{n_0}^h}{1+\varepsilon}\right|} \le \sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{k}{\left|\dfrac{\lambda_k^h(1+\varepsilon)-\lambda_{n_0}^h}{1+\varepsilon}\right|} \le$$

$$\le \sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{k}{\left|\dfrac{\varepsilon\lambda_k^h}{1+\varepsilon}\right|} \le \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{k}{\lambda_k^h} \le \frac{M'(n)}{\varepsilon}\sum_{k=n_0}^{N-1}\frac{1}{k} \le$$

$$\le M(n)\ln N = M(n)\ln\frac{1}{h},$$

де $M(n) = \mathrm{const} > 0$ не залежить від h.

Оскільки $\lambda_k^h \to \lambda_k$ для $k \le n_0$ при $h \to 0$, то $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{k}{\left|\lambda_k^h-\lambda_n^h\right|} \le M(n)\ln\frac{1}{h}$ при достатньо малому $h \le h_0$.

Таким чином, виконується оцінка

$$\left\|\frac{v}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h} \le M(n)\ln\frac{1}{h}\left\|\frac{f}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}. \tag{29}$$

Перетворимо вираз для $f(x)$:

$$f(x) = \left(K(x,\xi),\bar{\Psi}(\xi)\right) = \left(\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(\xi)}\,G(x,\xi),\frac{\Psi(\xi)}{\sqrt{\rho(\xi)}}\right) =$$

$$= \sqrt{\rho(x)}\left(G(x,\xi),\Psi(\xi)\right) = (\lambda^h-\lambda)\sqrt{\rho(x)}\left(G(x,\xi),\rho(\xi)u(\xi)\right) +$$

$$+ \sqrt{\rho(x)}\left(G(x,\xi),\eta_{\xi}(\xi)+\psi^*(\xi)\right) =$$

$$= \Delta\lambda^h\sqrt{\rho(x)}\left(G(x,\xi),\rho(\xi)u(\xi)\right) +$$

$$+\sqrt{\rho(x)}\left\{\left(G_{\bar{\xi}}(x,\xi),\eta(\xi)\right] + \left(G(x,\xi),\psi^*(\xi)\right)\right\}. \tag{30}$$

Поділимо обидві частини (30) на $\sqrt{x(1-x)}$ і для різницевої функції Ґріна $G(x,\xi)$ використаємо оцінки з [7]

$$0 \le G(x,\xi) \le \frac{C_2'}{C_1'}\begin{cases} x(1-\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \le x \le 1, \end{cases}$$

$$\left|G_{\overline{\xi}}(x,\xi)\right| \le \frac{C_2'}{C_1'}\left[\frac{1}{C_1'}\left\|\frac{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h} x(1-x) + \begin{cases} x, & 0 \le x \le \xi, \\ 1-x, & \xi \le x \le 1. \end{cases}\right]$$

Тоді згідно з нерівністю Коші – Буняковського та умовами (10) будемо мати

$$\left|\left(\frac{G(x,\xi)}{\sqrt{x(1-x)}}, \rho(\xi)u(\xi)\right)\right| \le \left\{\frac{C_2'}{C_1'}(1-x)\sum_{\xi=h}^{x} h\xi\rho(\xi)|u(\xi)| + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2'}{C_1'}x\sum_{\xi=x+h}^{1-h} h(1-\xi)\rho(\xi)|u(\xi)|\right\}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \le$$

$$\le \left\{\frac{C_2'}{C_1'}(1-x)\left[\sum_{\xi=h}^{x} h\xi^2\rho(\xi)\sum_{\xi=h}^{x} h\rho(\xi)u^2(\xi)\right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2'}{C_1'}x\left[\sum_{\xi=x+h}^{1-h} h(1-\xi)^2\rho(\xi)\sum_{\xi=x+h}^{1-h} h\rho(\xi)u^2(\xi)\right]^{1/2}\right\}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \le$$

$$\le \left\{\frac{C_2'C_4'}{C_1'}x(1-x)\left[\sum_{\xi=h}^{x} h\rho(\xi)u^2(\xi)\right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2'C_4'}{C_1'}x(1-x)\left[\sum_{\xi=x+h}^{1-h} h\rho(\xi)u^2(\xi)\right]^{1/2}\right\}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \le$$

$$\le M\sqrt{(1-x)x}\left\{\sum_{\xi\in\omega_h} h\rho(\xi)u^2(\xi)\right\}^{1/2} \le M_2,$$

$$\left|\left(\frac{G_{\overline{\xi}}(x,\xi)}{\sqrt{x(1-x)}}, \eta(\xi)\right]\right| \le \sum_{\xi=h}^{x} h\left|\frac{G_{\overline{\xi}}(x,\xi)}{\sqrt{x(1-x)}}\right||\eta(\xi)| + \sum_{\xi=x+h}^{1} h\left|\frac{G_{\overline{\xi}}(x,\xi)}{\sqrt{x(1-x)}}\right||\eta(\xi)| \le$$

$$\le \frac{C_2'}{C_1'}\left\{\sum_{\xi=h}^{x} h\frac{1}{C_1'}\left\|\frac{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h}\sqrt{x(1-x)}|\eta(\xi)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{\xi=h}^{x} h\frac{1-x}{\sqrt{x(1-x)}}|\eta(\xi)|\right\} +$$

$$+ \frac{C_2'}{C_1'}\left\{\sum_{\xi=x+h}^{1} h\frac{1}{C_1'}\left\|\frac{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h}\sqrt{x(1-x)}|\eta(\xi)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{\xi=x+h}^{1} h\frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}|\eta(\xi)|\right\} \le$$

$$\le \frac{C_2'}{C_1'}\frac{1}{C_1'}\left\|\frac{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h}\sqrt{x(1-x)}\sum_{\xi=h}^{1} h|\eta(\xi)| +$$

$$+ \frac{C_2'}{C_1'}\left\{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\left(\sum_{\xi=h}^{x} h\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi=h}^{x} h\eta^2(\xi)\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\left(\sum_{\xi=x+h}^{1} h\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi=x+h}^{1} h\eta^2(\xi)\right)^{1/2}\right\} \le$$

$$\le \frac{C_2'}{C_1'}\frac{1}{C_1'}\left\|\frac{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h}\sqrt{x(1-x)}\left(\sum_{\xi=h}^{1} h\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi=h}^{1} h\eta^2(\xi)\right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{C_2'}{C_1'}\left\{\sqrt{1-x}\left(\sum_{\xi=h}^{x} h\eta^2(\xi)\right)^{1/2} + \sqrt{x}\left(\sum_{\xi=x+h}^{1} h\eta^2(\xi)\right)^{1/2}\right\} \le$$

$$\le \frac{C_2'}{C_1'}\left\{\frac{1}{2C_1'}\left\|\overset{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h}\|\eta\|_{0,2,\omega_h^+}+\sqrt{1-x}\left(\sum_{\xi=h}^{x}h\eta^2(\xi)\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{x}\left(\sum_{\xi=x+h}^{1}h\eta^2(\xi)\right)^{1/2}\right\}\le$$

$$\le \frac{C_2'}{C_1'}\left\{\frac{1}{2C_1'}\left\|\overset{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h}\|\eta\|_{0,2,\omega_h^+}+\sqrt{2}\,\|\eta\|_{0,2,\omega_h^+}\right\},$$

$$\left|\left(\frac{G(x,\xi)}{\sqrt{x(1-x)}},\psi^*(\xi)\right)\right|\le\left|\sum_{\xi=h}^{x}h\,\frac{G(x,\xi)}{\sqrt{x(1-x)}}\,\psi^*(\xi)\right|+$$

$$+\left|\sum_{\xi=x+h}^{1-h}h\,\frac{G(x,\xi)}{\sqrt{x(1-x)}}\,\psi^*(\xi)\right|\le\frac{C_2'}{C_1'}\left[\frac{1-x}{\sqrt{x(1-x)}}\sum_{\xi=h}^{x}h\xi\left|\psi^*(\xi)\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}\sum_{\xi=x+h}^{1-h}h(1-\xi)\left|\psi^*(\xi)\right|\right]\le$$

$$\le\frac{C_2'}{C_1'}\sqrt{x(1-x)}\left\|\psi^*\right\|_{0,1,\omega_h}\le\frac{C_2'}{2C_1'}\left\|\psi^*\right\|_{0,1,\omega_h}.$$

Звідси отримаємо оцінку

$$\left\|\frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}\le\frac{C_2'}{C_1'}\left\{\frac{1}{2C_1'}\left\|\overset{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h}\|\eta\|_{0,2,\omega_h^+}+\sqrt{2}\,\|\eta\|_{0,2,\omega_h^+}\right\}+$$

$$+\frac{C_2'}{2C_1'}\left\|\psi^*\right\|_{0,1,\omega_h}+M_2\left|\Delta\lambda^h\right|\le$$

$$\le M_1\left[\|\eta\|_{0,2,\omega_h^+}+\left\|\psi^*\right\|_{0,1,\omega_h}\right]+M_2\left|\Delta\lambda^h\right|.$$

Підставимо цю оцінку у (29), повернемося до функції $\overline{z}=\dfrac{v}{\sqrt{\rho}}$ і врахуємо оцінку (14) і лему 3:

$$\left\|\frac{\overline{z}}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}\le M(n)\ln\frac{1}{h}\left[\|\eta\|_{0,2,\omega_h^+}+\left\|\psi^*\right\|_{0,1,\omega_h}\right].$$

Оскільки

$$\overline{z}=\overline{y}-u=c_0y-u,\quad y=\frac{\overline{z}-u}{c_0},\quad z=y-u=\frac{\overline{z}-u}{c_0}-u=\frac{\overline{z}}{c_0}-\frac{1-c_0}{c_0}u,$$

то

$$\frac{z}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{1}{c_0}\frac{\overline{z}}{\sqrt{x(1-x)}}+\frac{1-c_0}{c_0}\frac{u}{\sqrt{x(1-x)}}=$$

$$=\frac{1}{c_0}\frac{\overline{z}}{\sqrt{x(1-x)}}+\frac{1-c_0^2}{c_0(1+c_0)}\frac{u}{\sqrt{x(1-x)}},$$

де c_0 − стала, введена раніше. Звідси отримаємо

$$\left\|\frac{z}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}=\frac{1}{c_0}\left\|\frac{\overline{z}}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}+\frac{\left|1-c_0^2\right|}{c_0(1+c_0)}\left\|\frac{u}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}\le$$

$$\le M_1(n)\left(\left\|\frac{\overline{z}}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}+\left|1-c_0^2\right|\right)$$

при достатньо малому h, оскільки величина $\left\|\dfrac{u}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}$ обмежена, а $c_0\to 1$ при $h\to 0$.

Із формули (23) випливає, що

$$\left|1-c_0^2\right| = |(\rho,\bar{z}u)| + \left|(\rho,u^2) - \|u\|^2_{L_{2,r}}\right| \le (\rho,\bar{z}^2)^{1/2}(\rho,u^2)^{1/2} + $$
$$+\left|(\rho,u^2) - \|u\|^2_{L_{2,r}}\right|,$$

і, отже,

$$\left\|\frac{z}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h} \le M_1(n)\left\|\frac{\bar{z}}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h} + M_2(n)\left|(\rho,u^2) - \|u\|^2_{L_{2,r}}\right|.$$

Підставляючи сюди оцінку для $\left\|\frac{\bar{z}}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h}$, отримаємо

$$\left\|\frac{y_n - u_n}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h} \le M_1(n)\ln\frac{1}{h}\left[\|\eta\|_{0,2,\omega_h^+} + \left\|\psi^*\right\|_{0,1,\omega_h}\right] +$$
$$+ M_2(n)\left|(\rho,u^2) - \|u\|^2_{L_{2,r}}\right|.$$

Оскільки

$$\eta = (a-\tilde{a})u_{\bar{x}}, \qquad \psi^* = (d-\tilde{d})u + \lambda[T^x(ru) - \rho u],$$

де $\tilde{a}(x) = \overset{m_1}{a}(x)$, $\tilde{d}(x) = \overset{m_2}{d}(x)$, $\rho(x) = \overset{m_3}{T^x}(r)$, то лему доведено. ♦

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (2). *Тоді* $\exists h_0 > 0$ *таке, що* $\forall h \in (0,h_0]$ *точність різницевої схеми* (9), (20) *визначається оцінками*

$$\left\|\frac{y_n(x) - u_n(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\right\|_{0,\infty,\omega_h} \le M(n)h\ln\frac{1}{h}, \qquad \left|\lambda_n - \lambda_n^h\right| \le M(n)h$$

при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 0$.

Д о в е д е н н я. За допомогою (21) отримаємо такі оцінки:

$$\left\|\left(a - \overset{m_1}{a}\right)u_{\bar{x}}\right\|_{0,2,\omega_h} \le \left\|a - \overset{m_1}{a}\right\|_{0,2,\omega_h}\|u_{\bar{x}}\|_{0,\infty,\omega_h} \le$$
$$\le c_1 h^{(m_1+1)1/2}\left(\sum_{\xi\in\omega_h} h\|Q\|^{2(m_1+1)}_{0,2,e(\xi)}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{h}}|u|_{1,2,(0,1)} \le c_1 h,$$

$$\left\|\left(d - \overset{m_2}{d}\right)u\right\|_{0,1,\omega_h} \le \left\|d - \overset{m_2}{d}\right\|_{0,1,\omega_h}\|u\|_{0,\infty,\omega_h} \le$$
$$\le c_2 h^{(m_2+1)1/2-3/2}\sum_{\xi\in\omega_h} h\|Q\|^{m_2+2}_{0,2,e(\xi)} \le c_2 h,$$

$$\left\|T^x(ru) - \overset{m_3}{T^x}(r)u \pm T^x(r)u\right\|_{0,1,\omega_h} \le c_3 h^{(m_3+1)1/2+1} \le c_3 h.$$

Зробимо заміну змінних $x = x_i + sh$, тоді

$$(\rho,u^2) - \|u\|^2_{L_{2,r}} = (\rho,y^2) - \int_0^1 r(x)u^2(x)\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{N-1} h\left(\rho_i y_i^2 - \int_{-0.5}^{0.5} r(x_i+sh)u^2(x_i+sh)\,ds\right) -$$
$$-\int_0^{0.5h} 2u^2\,dx - \int_{1-0.5h}^{1} 2u^2\,dx = \sum_{i=1}^{N-1}\Delta_i h + O(h^2),$$

де

$$\Delta_i = \rho_i y_i^2 - \int\limits_{-0.5}^{0.5} r(x_i + sh) u^2(x_i + sh)\, ds .$$

Інтеграли від 0 до $0.5h$ і від $1 - 0.5h$ до 1 є величинами порядку $O(h^3)$, оскільки $u^2 = O(h^2)$ з огляду на крайові умови.

Враховуючи, що

$$r(x_i + sh) u^2(x_i + sh) = (r_i + shr_i')(u_i^2 + sh(u_i^2)') + O(h^2) =$$

$$= r_i u_i^2 + sh(ru_i^2)' + O(h^2),$$

$$\int\limits_{-0.5}^{0.5} s\, ds = 0 ,$$

отримуємо, що $\Delta_i = O(h^2)$ і, як наслідок,

$$(\rho, u^2) - \|u\|_{L_{2,r}}^2 = O(h^2) \qquad \text{при} \qquad r \in C^{(2)}.$$

Таким чином, згідно з лемою 4 маємо

$$\left\| \frac{y_n(x) - u_n(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \right\|_{0,\infty,\omega_h} \le M(n) h \ln \frac{1}{h},$$

а згідно з лемою 3 маємо

$$\left| \lambda_n^h - \lambda_n \right| \le M(n) h . \qquad \blacklozenge$$

Зауваження 1. При виконанні умов теореми 1 будуть виконуватись оцінки

$$\|y_n - u_n\|_{0,\infty,\omega_h} \le M(n) h, \qquad \left|\lambda_n - \lambda_n^h\right| \le M(n) h .$$

4. Чисельні експерименти. Для підтвердження виконання теореми 1 були проведені чисельні експерименти.

Нехай задача Штурма – Ліувілля (1) задана у класі гладких коефіцієнтів. Тоді для її апроксимації використаємо однорідну різницеву схему:

$$(a y_{\bar{x}})_x - d(x) y + \lambda^h \rho y = 0, \qquad 0 < x = ih < 1 ,$$

$$y(0) = y(1) = 0 ,$$

яка в індексній формі має вигляд

$$a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h^2} - d_i y_i = -\lambda^h \rho_i y_i, \quad i = 1, \dots, N-1 ,$$

$$y_0 = y_N = 0 , \qquad (31)$$

де

$$a_i = \left[\int\limits_{-1}^{0} \frac{ds}{k(x_i + sh)} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1},$$

$$d_i = \int\limits_{-0.5}^{0.5} q(x_i + sh)\, ds = \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\, dx ,$$

$$\rho_i = \int\limits_{-0.5}^{0.5} r(x_i + sh)\, ds = \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} r(x)\, dx, \qquad h = \frac{1}{N}. \qquad (32)$$

У [3, с. 184] доведено, що різницева схема (31), (32) має другий порядок точності у класі достатньо гладких коефіцієнтів k, q, $r \in C^{(2)}[0,1]$. Розв’язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (31), знаходимо власні значення

$\lambda^h = \lambda_m^h$, $m = 1,\ldots,N-1$, і власні функції $y(x) = y_m(x)$, $m = 1,\ldots,N-1$. Виконаємо нормування власних функцій

$$(\rho, y^2) = 1.$$

Для однозначного визначення власних функцій вводимо додаткові умови вибору знаку: $y_{x,0} > 0$.

Оскільки у прикладі, який буде розглядатися нижче $k(x), q(x), r(x) \in$ $\in C^\infty[0,1]$, можемо посилити теорему 1.

Теорема 2. *Нехай* $k(x), q(x), r(x) \in C^\infty[0,1]$, $0 < c_1 \le k(x) \le c_2$ *і виконуються умови* (2). *Тоді точність різницевої схеми* (31), (32) *характеризується оцінками*

$$\left\| \frac{y_n(x) - u_n(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \right\|_{0,\infty,\omega_h} \le M(n) h^2 \ln\frac{1}{h}, \qquad \left|\lambda_n - \lambda_n^h\right| \le M(n) h^2.$$

Зауважимо, що хоча умова $0 < c_1 \le r(x)$ у розглянутому нижче прикладі не виконується, але числові розрахунки показали, що теорема 2 залишається в силі.

Чисельно покажемо, що різницева схема (31), (32) для розглянутого нижче прикладу має другий порядок точності, тобто покажемо, що при $h \to 0$ виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{h\to 0} p = \lim_{h\to 0} \log_2 \frac{\left\| \dfrac{u_n(x) - y_n(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \right\|_{0,\infty,\omega_h}}{\left\| \dfrac{u_n(x) - y_n(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \right\|_{0,\infty,\omega_{h/2}}} = 2. \tag{33}$$

Приклад 1. Розв'яжемо задачу Штурма − Ліувілля

$$u'' + \lambda x u = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{34}$$

Зауважимо, що для рівняння (34) $k(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = x$. Точним розв'язком задачі (34) є власні значення

$$\lambda_m = \left(\frac{3}{2} j_{1/3,m}\right)^2, \qquad m = 1,2,\ldots,$$

та відповідні їм власні функції

$$u_m(x) = \sqrt{x}\, I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda_m}\, x^{3/2}\right), \qquad m = 1,2,\ldots,$$

де $I_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{v+2k}}{k!\,\Gamma(v+k+1)}$ − функції Бесселя першого роду, $j_{v,m}$ − нулі функції Бесселя $I_v(x)$ (див., наприклад, [6]).

Результати розв'язування задачі (34) наведено в табл. 1. Для практичної оцінки швидкості збіжності використано величини

$$\text{err} = \left\| \frac{y-u}{\sqrt{x(1-x)}} \right\|_{0,\infty,\omega_h}, \qquad p = \log_2 \frac{\left\| \dfrac{y-u}{\sqrt{x(1-x)}} \right\|_{0,\infty,\omega_h}}{\left\| \dfrac{y-u}{\sqrt{x(1-x)}} \right\|_{0,\infty,\omega_{h/2}}}.$$

Таблиця 1

m	N	$\lvert \lambda - \lambda^h \rvert$	err	p
1	4	1.084854	0.1194288	
	8	0.278844	0.0288960	2
	16	0.070084	0.0071490	2
	32	0.017474	0.0017873	2
2	4	17.88658	0.7826642	
	8	5.158253	0.2047427	1.93
	16	1.305093	0.0523921	1.97
	32	0.327183	0.0129684	2
3	4	36.42563	1.1165380	
	8	27.16533	0.6750151	0.72
	16	6.947830	0.1577196	2
	32	1.745430	0.0393347	2

Отже, співвідношення (33) виконується при достатньо малому значенні h.

1. *Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М.* Точные и усеченные разностные схемы для одного класса задач Штурма – Лиувилля с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 7. – С. 1265–1275.
2. *Приказчиков В. Г.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма – Лиувилля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – **9**, № 2. – С. 315–336.
3. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. – Москва: Наука, 1971. – 553 с.
4. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – Москва: Высш. шк., 1987. – 296 с.
5. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – Москва: Мир, 1980. – 512 с.
6. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции (формулы, графики, таблицы). – Москва: Наука, 1964. – 344 с.
7. *Makarov V.* On a priori estimates of difference schemes giving an account of the boundary effect // C. R. Acad. Bulg. Sci. – 1989. – **42**, No. 5. – P. 41–44.

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Установлено, что в непосредственной близости к границе скорость сходимости разностных схем решения задачи Штурма – Лиувилля для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений выше, а также получены априорные оценки точности, которые дают количественное определение указанного эффекта. Приведены результаты численных экспериментов, которые подтверждают этот эффект.

WEIGHTED ESTIMATES OF ACCURACY OF DIFFERENCE SCHEMES FOR STURM – LIOUVILLE PROBLEM

It is established that in a direct closeness to the boundary the rate of convergence of difference schemes for the solution of Sturm – Liouville problem for linear ordinary differential equations is higher. A priori estimates of accuracy are also obtained which give quantitative determination of the indicated effect. The results of numerical experiments that confirm this effect are presented.

[1] Ін-т математики НАН України, Київ,
[2] Жешув. технолог. ун-т, Жешув, Польща,
[3] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
14.07.14