

В. А. Шевчук

**ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ПЛАСТИНИ З ТОНКИМ ДВОСТОРОННІМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ ЗА УМОВ НЕСТАЦІОНАРНОГО НАГРІВУ**

*На основі аналітичного розв'язку одновимірної нестационарної задачі теплопровідності для пластини з двостороннім тонким багат шаровим покриттям, отриманого із застосуванням узагальнених граничних умов, проведено дослідження і виявлено закономірності протікання теплового процесу в тілі і покритті при нагріві зовнішнім середовищем зі змінною температурою.*

**Вступ.** Моделюванню та дослідженню процесів теплопровідності та дифузії у пластинах з покриттями присвячено багато робіт [2, 3, 5–11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22–24, 26, 27, 30–36, 39]. При врахуванні часової залежності температури зовнішнього середовища для пластин з одношаровим покриттям аналітичні розв'язки задач теплопровідності наведено в роботах [11, 13, 20], а для багат шарових пластин аналітично-числову наближену процедуру – в [16]. У загальному для пластин з багат шаровими покриттями розв'язування обмежується випадками незмінної в часі температури зовнішнього середовища. Для розв'язування задач теплопровідності для тіл з тонкими покриттями ефективним є підхід з використанням узагальнених граничних умов [15, 17, 21, 28, 29, 37], які у випадках постійної в часі температури зовнішнього середовища для пластин з покриттями застосовувались у [5, 6, 9, 10, 22, 36], а змінної в часі температури зовнішнього середовища – лише в [10]. Проте підхід, використаний у [10], не є достатньо загальним і може бути застосований тільки до обмеженого класу неоднорідних покриттів.

Нижче отримано аналітичний розв'язок одновимірної задачі теплопровідності для пластини з двостороннім багат шаровим покриттям за умов нестационарного конвективного нагріву та проведено дослідження закономірностей процесу теплоперенесення у пластині з ідентичними покриттями при нагріванні за експоненціальним законом у часі.

**Формулювання задачі.** Розглянемо одновимірну крайову задачу теплопровідності для пластини товщини  $h$  з двостороннім багат шаровим покриттям за умов нестационарного конвективного нагріву (рис. 1).

Рівняння теплопровідності і початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t^{(0)}}{\partial \tau} = a^{(0)} \frac{\partial^2 t^{(0)}}{\partial x^2}, \quad 0 < x < h, \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial \tau} = a_i^{(1)} \frac{\partial^2 t_i^{(1)}}{\partial x^2}, \quad x_i^{(1)} < x < x_{i-1}^{(1)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(1)}\}, \quad (2')$$

$$\frac{\partial t_i^{(2)}}{\partial \tau} = a_i^{(2)} \frac{\partial^2 t_i^{(2)}}{\partial x^2}, \quad x_{i-1}^{(2)} < x < x_i^{(2)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(2)}\}, \quad (2'')$$

$$t^{(0)} \Big|_{\tau=0} = t_i^{(k)} \Big|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(k)}\}, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (3)$$

Приймаємо, що на межі покриття – середовище відбувається теплообмін згідно з законом Ньютона:

$$-\lambda_{n^{(2)}}^{(2)} \frac{\partial t_{n^{(2)}}^{(2)}}{\partial x} = \mu^{(2)} \left( t_{n^{(2)}}^{(2)} - t_2^{(E)} \right), \quad x = x_{n^{(2)}}^{(2)} = h + \delta^{(2)}, \quad (4)$$

$$\lambda_{n^{(1)}}^{(1)} \frac{\partial t_{n^{(1)}}^{(1)}}{\partial x} = \mu^{(1)} \left( t_{n^{(1)}}^{(1)} - t_1^{(E)} \right), \quad x = x_{n^{(1)}}^{(1)} = -\delta^{(1)}, \quad (5)$$

а на поверхнях поділу шарів покриття і покриття з тілом виконуються умови ідеального теплового контакту:

$$t_i^{(1)} = t_{i-1}^{(1)}, \quad \lambda_i^{(1)} \frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial x} = \lambda_{i-1}^{(1)} \frac{\partial t_{i-1}^{(1)}}{\partial x}, \quad x = x_{i-1}^{(1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j^{(1)}, \quad i \in \{2, \dots, n^{(1)}\},$$

$$t_1^{(1)} = t^{(0)}, \quad \lambda_1^{(1)} \frac{\partial t_1^{(1)}}{\partial x} = \lambda^{(0)} \frac{\partial t^{(0)}}{\partial x}, \quad x = x_0^{(1)} = 0, \quad (6)$$

$$t_i^{(2)} = t_{i-1}^{(2)}, \quad \lambda_i^{(2)} \frac{\partial t_i^{(2)}}{\partial x} = \lambda_{i-1}^{(2)} \frac{\partial t_{i-1}^{(2)}}{\partial x}, \quad x = x_{i-1}^{(2)} = h + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j^{(2)},$$

$$i \in \{2, \dots, n^{(2)}\},$$

$$t_1^{(2)} = t^{(0)}, \quad \lambda_1^{(2)} \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial x} = \lambda^{(0)} \frac{\partial t^{(0)}}{\partial x}, \quad x = x_0^{(2)} = h. \quad (7)$$

Тут  $t_i^{(k)}$ ,  $t^{(0)}$ ,  $t_1^{(E)}$ ,  $t_2^{(E)}$  – температури  $i$ -го шару  $k$ -го покриття, тіла (пластини) і середовищ відповідно;  $\delta^{(k)} = \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \delta_j^{(k)}$  – товщина  $k$ -го покриття;  $\delta_i^{(k)}$  – товщина  $i$ -го шару  $k$ -го покриття;  $\lambda^{(0)}$ ,  $\lambda_i^{(k)}$  і  $\omega^{(0)}$ ,  $\omega_i^{(k)}$  – коефіцієнти теплопровідності і теплоємності;  $\mu^{(1)}$ ,  $\mu^{(2)}$  – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь покриття;  $a^{(0)} = \lambda^{(0)}/\omega^{(0)}$  – температуропровідність тіла;  $n^{(k)}$  – кількість шарів  $k$ -го покриття. Індекс  $k=1$  стосується покриття, нанесеного на поверхню  $x=0$  пластини, а  $k=2$  – покриття, нанесеного на поверхню  $x=h$ .



Рис. 1

**Розв'язок задачі теплопровідності з узагальненими граничними умовами.** Для розв'язування задачі використано підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покриттів на теплоперенесення в системі узагальненими граничними умовами [21, 29, 37]. Тоді температуру в тілі визначають як розв'язок рівняння (1) для пластини з початковою умовою (3) та узагальненими граничними умовами, які для цього випадку матимуть вигляд [36–38]

$$-\lambda^{(0)} \left( 1 + \frac{\mu^{(2)}}{H^{(2)}} \right) \frac{\partial t^{(0)}}{\partial x} + \mu^{(2)} (t_2^{(E)} - t^{(0)}) = \Omega^{(2)} \frac{\partial t^{(0)}}{\partial \tau}, \quad t^{(0)} \Big|_{\tau=0} = t_0, \quad x = h, \quad (8)$$

$$\lambda^{(0)} \left( 1 + \frac{\mu^{(1)}}{H^{(1)}} \right) \frac{\partial t^{(0)}}{\partial x} + \mu^{(1)} (t_1^{(E)} - t^{(0)}) = \Omega^{(1)} \frac{\partial t^{(0)}}{\partial \tau}, \quad t^{(0)} \Big|_{\tau=0} = t_0, \quad x = 0, \quad (9)$$

де  $\Omega^{(k)} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \omega_i^{(k)} \delta_i^{(k)}$ ,  $\frac{1}{H^{(k)}} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \frac{\delta_i^{(k)}}{\lambda_i^{(k)}}$  – зведені теплоємності та термоопори покриттів,  $k = 1, 2$ .

Для розв'язування використаємо інтегральне перетворення Лапласа

$$\tilde{t}^{(0)}(x, s) = \int_0^{\infty} t^{(0)}(x, \tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

де  $s$  – параметр перетворення.

Розв'язок рівняння (1) у пластині в трансформантах з урахуванням умов (3), (8), (9) має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{t}^{(0)}(x, s) = & \text{Bi}_*^{(1)} \left( \tilde{t}_1^{(E)} - \frac{t_0}{s} \right) \frac{\Phi_2(h, s) \text{ch}(qx) - \Phi_3(h, s) \text{sh}(qx)}{\Psi(s)} + \\ & + \text{Bi}_*^{(2)} \left( \tilde{t}_2^{(E)} - \frac{t_0}{s} \right) \frac{\Phi_1(x, s)}{\Psi(s)} + \frac{t_0}{s}, \quad 0 \leq x \leq h, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\Phi_k(x, s) = \text{ch}(qx) + \text{Bi}_*^{(k)} (1 + \chi^{(k)} s) \frac{\text{sh}(qx)}{qh}, \quad k = 1, 2,$$

$$\Phi_3(x, s) = \text{sh}(qh) + \text{Bi}_*^{(2)} (1 + \chi^{(2)} s) \frac{\text{ch}(qx)}{qh},$$

$$\begin{aligned} \Psi(s) = & \left[ qh + \frac{\text{Bi}_*^{(1)} \text{Bi}_*^{(2)}}{qh} (1 + \chi^{(1)} s) (1 + \chi^{(2)} s) \right] \text{sh}(qh) + \\ & + \left[ \text{Bi}_*^{(1)} (1 + \chi^{(1)} s) + \text{Bi}_*^{(2)} (1 + \chi^{(2)} s) \right] \text{ch}(qh), \end{aligned}$$

Тут  $q = \sqrt{\frac{s}{a^{(0)}}}$ ;  $\text{Bi}_*^{(k)} = \frac{\text{Bi}^{(k)}}{1 + \xi^{(k)} \text{Bi}^{(k)}}$ ,  $\text{Bi}^{(k)} = \frac{\mu^{(k)} h}{\lambda^{(0)}}$  – критерії Біо;  $\xi^{(k)} = \frac{1/H^{(k)}}{h/\lambda^{(0)}}$

– ефективні термоопори покриттів;  $\chi^{(k)} = \frac{\Omega^{(k)}}{\mu^{(k)}}$ ;  $\tilde{t}_k^{(E)}(s) = \int_0^{\infty} t_k^{(E)}(\tau) e^{-s\tau} d\tau$  –

трансформанти функцій температури середовищ,  $k = 1, 2$ .

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до виразу (10) і використовуючи теорему розкладу та інтегральні співвідношення Дюамеля [1, 18], розв'язок задачі для пластини в безрозмірних координатах отримуємо у вигляді

$$\begin{aligned} t^{(0)}(\rho, \text{Fo}) = & t_0 + \text{Bi}_*^{(1)} \left( t_1^{(E)}(\text{Fo}) - t_0 \right) \frac{1 + \text{Bi}_*^{(2)} - \text{Bi}_*^{(2)} \rho}{\overline{\text{Bi}}} + \\ & + \text{Bi}_*^{(2)} \left( t_2^{(E)}(\text{Fo}) - t_0 \right) \frac{1 + \text{Bi}_*^{(1)} \rho}{\overline{\text{Bi}}} - \\ & - 2\text{Bi}_*^{(1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_2(1, \alpha_j) \cos(\alpha_j \rho) + U_3(1, \alpha_j) \sin(\alpha_j \rho)}{Z(\alpha_j)} \times \\ & \times \left[ (t_1^{(E)}(0) - t_0) e^{-\alpha_j^2 \text{Fo}} + L^{(1)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2) \right] - 2\text{Bi}_*^{(2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_1(\rho, \alpha_j)}{Z(\alpha_j)} \times \\ & \times \left[ (t_2^{(E)}(0) - t_0) e^{-\alpha_j^2 \text{Fo}} + L^{(2)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2) \right], \quad 0 \leq \rho \leq 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут  $\rho = x/h$ ;  $\text{Fo} = a^{(0)} \tau / h^2$  – критерій Фур'є;  $\overline{\text{Bi}} = \text{Bi}_*^{(1)} + \text{Bi}_*^{(2)} + \text{Bi}_*^{(1)} \text{Bi}_*^{(2)}$ ;  $\alpha_j$  – корені трансцендентного рівняння

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\alpha^2 - (\text{Bi}_*^{(1)} - \varepsilon^{(1)} \alpha^2) (\text{Bi}_*^{(2)} - \varepsilon^{(2)} \alpha^2)}{\alpha (\text{Bi}_*^{(1)} + \text{Bi}_*^{(2)} - (\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}) \alpha^2)}, \quad (12)$$

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = \int_0^{\text{Fo}} \frac{dt_k^{(E)}(\zeta)}{d\zeta} e^{\gamma(\text{Fo}-\zeta)} d\zeta, \quad k = 1, 2, \quad (13)$$

$\varepsilon^{(k)} = \frac{\eta^{(k)}}{1 + \xi^{(k)} \text{Bi}_*^{(k)}}$ ,  $\eta^{(k)} = \frac{\Omega^{(k)}}{\omega^{(0)} h}$  – ефективні теплоємності покриттів,

$$U_k(\rho, \alpha_j) = \alpha_j \cos(\alpha_j \rho) + (\text{Bi}_*^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \alpha_j^2) \sin(\alpha_j \rho), \quad k = 1, 2,$$

$$U_3(\rho, \alpha_j) = \alpha_j \sin(\alpha_j \rho) - (\text{Bi}_*^{(2)} - \varepsilon^{(2)} \alpha_j^2) \cos(\alpha_j \rho),$$

$$\begin{aligned} Z(\alpha_j) = & [(1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \alpha_j^2 - (\text{Bi}_*^{(1)} - \varepsilon^{(1)} \alpha_j^2)(\text{Bi}_*^{(2)} - \varepsilon^{(2)} \alpha_j^2)] \alpha_j \cos \alpha_j + \\ & + [\alpha_j^2(1 + \text{Bi}_*^{(1)}(1 + \varepsilon^{(2)}) + \text{Bi}_*^{(2)}(1 + \varepsilon^{(1)}) - (\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \\ & + 3\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}) \alpha_j^2) + \text{Bi}_*^{(1)} \text{Bi}_*^{(2)}] \sin \alpha_j. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок узгодженості крайових умов [10, 12]  $t_1^{(E)}(0) = t_2^{(E)}(0) = t_0$ . Тоді формула (11) набуде вигляду

$$\begin{aligned} t^{(0)}(\rho, \text{Fo}) = & \frac{t_1^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(1)}(1 + \text{Bi}_*^{(2)} - \text{Bi}_*^{(2)} \rho) + t_2^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(2)}(1 + \text{Bi}_*^{(1)} \rho)}{\text{Bi}} - \\ & - 2 \text{Bi}_*^{(1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[U_2(1, \alpha_j) \cos(\alpha_j \rho) + U_3(1, \alpha_j) \sin(\alpha_j \rho)] L^{(1)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2)}{Z(\alpha_j)} - \\ & - 2 \text{Bi}_*^{(2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_1(\alpha_j, \rho) L^{(2)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2)}{Z(\alpha_j)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Підставляючи (14) у формули відновлення [36–38], які у безрозмірних координатах запишемо як

$$\begin{aligned} t_i^{(1)}(\rho, \text{Fo}) = & t^{(0)}(0, \text{Fo}) + \lambda^{(0)} \left( - \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{\delta_{\ell}^{(1)}}{h \lambda_{\ell}^{(1)}} + \frac{\rho - \rho_{i-1}^{(1)}}{\lambda_i^{(1)}} \right) \frac{\partial t^{(0)}(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \Bigg|_{\rho=0}, \\ & \rho_i^{(1)} \leq \rho \leq \rho_{i-1}^{(1)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(1)}\}, \end{aligned} \quad (15')$$

$$\begin{aligned} t_i^{(2)}(\rho, \text{Fo}) = & t^{(0)}(1, \text{Fo}) + \lambda^{(0)} \left( \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{\delta_{\ell}^{(2)}}{h \lambda_{\ell}^{(2)}} + \frac{\rho - \rho_{i-1}^{(2)}}{\lambda_i^{(2)}} \right) \frac{\partial t^{(0)}(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \Bigg|_{\rho=1}, \\ & \rho_{i-1}^{(2)} \leq \rho \leq \rho_i^{(2)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(2)}\}, \end{aligned} \quad (15'')$$

отримуємо вирази для температури в  $i$ -му шарі  $k$ -го покриття:

$$\begin{aligned} t_i^{(k)}(\rho, \text{Fo}) = & \frac{1}{\text{Bi}} [t_1^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(1)}(1 - \text{Bi}_*^{(2)} r_i^{(k)}(\rho)) + \\ & + t_2^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(2)}(1 + \text{Bi}_*^{(1)} r_i^{(k)}(\rho)) + t_k^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(1)} \text{Bi}_*^{(2)}] - \\ & - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{Bi}_*^{(k)} V_i^{(k)}(\rho, \alpha_j) L^{(k)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2) + \text{Bi}_*^{(3-k)} W_i^{(k)}(\rho, \alpha_j) L^{(3-k)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2)}{Z(\alpha_j)}, \\ & \rho_i^{(1)} \leq \rho \leq \rho_{i-1}^{(1)}, \quad \rho_{i-1}^{(2)} \leq \rho \leq \rho_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V_i^{(k)}(\rho, \alpha_j) = & \alpha_j \cos \alpha_j + (\text{Bi}_*^{(3-k)} - \varepsilon^{(3-k)} \alpha_j^2) \sin \alpha_j + \\ & + (-1)^{k+1} r_i^{(k)}(\rho) \alpha_j (\alpha_j \sin \alpha_j - (\text{Bi}_*^{(3-k)} - \varepsilon^{(3-k)} \alpha_j^2) \cos \alpha_j), \end{aligned}$$

$$W_i^{(k)}(\rho, \alpha_j) = \alpha_j [1 + (-1)^{k+1} r_i^{(k)}(\rho) (\text{Bi}_*^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \alpha_j^2)],$$

$$r_i^{(k)}(\rho) = \lambda^{(0)} \left( (-1)^k \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{\delta_\ell^{(k)}}{h\lambda_\ell^{(k)}} + \frac{\rho - \rho_{i-1}^{(k)}}{\lambda_i^{(k)}} \right), \quad \rho_j^{(k)} = \frac{x_j^{(k)}}{h},$$

$$j \in \{0, 1, \dots, n^{(k)}\}, \quad k = 1, 2. \quad (17)$$

Слід зауважити, що у випадку відсутності покриттів (коли  $n^{(1)} = n^{(2)} = 0$ ,  $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = 0$ ,  $\text{Bi}_*^{(1)} = \text{Bi}_*^{(1)}$ ,  $\text{Bi}_*^{(2)} = \text{Bi}_*^{(2)}$ ,  $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = 0$ ) формули (14), (12), (13) рівносильні наведеним у [4, с. 27].

**Вирази для  $L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma)$  для деяких законів зміни температур середовищ.** Формулами (14), (16) дається розв'язок задачі для довільних законів зміни температур зовнішніх середовищ. Конкретизуємо вирази для  $L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma)$  для деяких закономірностей.

*Лінійна функція зміни температур зовнішніх середовищ.* Тоді

$$t_k^{(E)}(\text{Fo}) = t_0(1 + \text{Pd}^{(k)}\text{Fo}), \quad (18)$$

де

$$\text{Pd}^{(k)} = \left( \frac{d}{d\text{Fo}} \left( \frac{t_k^{(E)}(\text{Fo})}{t_0} \right) \right)_{\max} \quad (19)$$

– критерій Предводителя [18], що характеризує інтенсивність підвищення температури середовища, яке контактує з  $k$ -м покриттям.

Підставляючи (18) у (13), отримуємо

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = \frac{t_0 \text{Pd}^{(k)}}{\gamma} (e^{\gamma \text{Fo}} - 1), \quad k = 1, 2. \quad (20)$$

*Експоненціальна функція зміни температур зовнішніх середовищ.* Тоді

$$t_k^{(E)}(\text{Fo}) = t_k^{(E)m} - (t_k^{(E)m} - t_0) e^{-\text{Pd}^{(k)}\text{Fo}}, \quad (21)$$

де  $t_k^{(E)m}$  – максимальна температура середовища, яке контактує з  $k$ -м покриттям, а критерій Предводителя в цьому випадку визначаємо як

$$\text{Pd}^{(k)} = \left( \frac{d}{d\text{Fo}} \left( \frac{t_k^{(E)}(\text{Fo}) - t_0}{t_k^{(E)m} - t_0} \right) \right)_{\max}.$$

Підставляючи (21) у (13), отримуємо

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = \frac{t_k^{(E)m} - t_0}{1 + \gamma/\text{Pd}^{(k)}} (e^{\gamma \text{Fo}} - e^{-\text{Pd}^{(k)}\text{Fo}}), \quad k = 1, 2. \quad (22)$$

*Логарифмічна функція зміни температур зовнішніх середовищ.* Тоді

$$t_k^{(E)}(\text{Fo}) = t_0 + \ln(t_0 \text{Pd}^{(k)}\text{Fo} + 1), \quad (23)$$

де критерій  $\text{Pd}^{(k)}$  визначається за формулою (19).

Підставляючи (23) у (13), отримуємо

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = e^{\gamma \left( \text{Fo} + \frac{1}{t_0 \text{Pd}^{(k)}} \right)} \left[ \text{Ei} \left( -\gamma \left( \text{Fo} + \frac{1}{t_0 \text{Pd}^{(k)}} \right) \right) - \text{Ei} \left( -\frac{\gamma}{t_0 \text{Pd}^{(k)}} \right) \right],$$

$$k = 1, 2, \quad (24)$$

де  $\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^y}{y} dy$  – інтегральна показникова функція [25, с. 56].

Періодична функція зміни температур зовнішніх середовищ за законом

$$t_k^{(E)}(\text{Fo}) = t_0 + t_k^{(E)m} \sin \text{Pd}^{(k)} \text{Fo}. \quad (25)$$

У цьому випадку  $t_k^{(E)m}$  – амплітуда коливання температури середовища, яке контактує з  $k$ -м покриттям, а критерій Предводителя

$$\text{Pd}^{(k)} = \left( \frac{d}{d\text{Fo}} \left( \frac{t_k^{(E)}(\text{Fo})}{t_k^{(E)m}} \right) \right)_{\max} \text{ прямо пропорційний частоті коливань.}$$

Підставляючи (25) у (13), отримуємо

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = t_k^{(E)m} \text{Pd}^{(k)} \frac{\gamma(e^{\gamma \text{Fo}} - \cos \text{Pd}^{(k)} \text{Fo}) + \text{Pd}^{(k)} \sin \text{Pd}^{(k)} \text{Fo}}{\gamma^2 + (\text{Pd}^{(k)})^2}, \quad k=1, 2. \quad (26)$$

**Симетричний нагрів пластини з ідентичними покриттями.** У цьому випадку маємо  $t_1^{(E)}(\text{Fo}) = t_2^{(E)}(\text{Fo}) = t^{(E)}(\text{Fo})$ ,  $n^{(1)} = n^{(2)} = n$ ,  $\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(2)} = \delta_i$ ,  $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(2)} = \lambda_i$ ,  $\omega_i^{(1)} = \omega_i^{(2)} = \omega_i$  для  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = \delta$ ,  $\xi^{(1)} = \xi^{(2)} = \xi$ ,  $\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta$ ,  $\text{Bi}^{(1)} = \text{Bi}^{(2)} = \text{Bi}$ ,  $\text{Bi}_*^{(1)} = \text{Bi}_*^{(2)} = \text{Bi}_*$ ,  $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon$ . Тоді на підставі формул (14), (12), (13), (16), (17) розв'язок можна подати у вигляді

$$t(\rho, \text{Fo}) = t^{(E)}(\text{Fo}) - 2\text{Bi}_* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X(\rho, \alpha_j) L(\text{Fo}, -\alpha_j^2)}{Z(\alpha_j)}, \quad -\frac{\delta}{h} \leq \rho \leq 1 + \frac{\delta}{h}, \quad (27)$$

$$X(\rho, \alpha_j) = \begin{cases} Y_1(\alpha_j) \cos(\alpha_j \rho) + Y_2(\alpha_j) \sin(\alpha_j \rho), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ Y_1(\alpha_j) - r(\rho) \alpha_j Y_2(\alpha_j), & 1 \leq \rho \leq 1 + \frac{\delta}{h}, \\ X(1 - \rho, \alpha_j), & -\frac{\delta}{h} \leq \rho \leq 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$Y_1(\alpha_j) = \alpha_j (\cos \alpha_j + 1) + (\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha_j^2) \sin \alpha_j, \quad (29')$$

$$Y_2(\alpha_j) = \alpha_j \sin \alpha_j + (\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha_j^2) (1 - \cos \alpha_j), \quad (29'')$$

$$Z(\alpha_j) = [(1 + 4\varepsilon)\alpha_j^2 - (\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha_j^2)] \alpha_j \cos \alpha_j + [\alpha_j^2 (1 + 2\text{Bi}_* (1 + \varepsilon) - \varepsilon (2 + 3\varepsilon) \alpha_j^2) + (\text{Bi}_*)^2] \sin \alpha_j, \quad (30)$$

$\alpha_j$  – корені трансцендентного рівняння

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\alpha^2 - (\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha^2)^2}{2\alpha(\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha^2)}, \quad (31)$$

$$L(\text{Fo}, \gamma) = \int_0^{\text{Fo}} \frac{dt^{(E)}(\zeta)}{d\zeta} e^{\gamma(\text{Fo} - \zeta)} d\zeta, \quad (32)$$

$$r(\rho) = \lambda^{(0)} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{\delta_{\ell}}{h \lambda_{\ell}} + \frac{\rho - \rho_{i-1}^{(2)}}{\lambda_i} \right) [S_+(\rho - \rho_{i-1}^{(2)}) - S_+(\rho - \rho_i^{(2)})], \quad (33)$$

де  $S_+(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$  – функція Гевісайда.

**Числовий приклад.** Розглянемо симетричний нагрів пластини з ідентичними покриттями для випадку нагрівання за експоненціальним законом (21). Тоді, підставляючи (22) у (27), отримуємо розв'язок у безрозмірному

вигляді

$$\theta(\rho, Fo) = 1 - e^{-PdFo} - 2Bi_* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X(\rho, \alpha_j)}{(1 - \alpha_j^2/Pd)Z(\alpha_j)} (e^{-\alpha_j^2 Fo} - e^{-PdFo}),$$

$$-\frac{\delta}{h} \leq \rho \leq 1 + \frac{\delta}{h}, \quad (34)$$

де  $X(\rho, \alpha_j)$ ,  $Z(\alpha_j)$  визначаються співвідношеннями (28), (30),  $\alpha_j$  – корені рівняння (31), а  $\theta(\rho, Fo) = \frac{t(\rho, Fo) - t_0}{t^{(E)m} - t_0}$ ,  $\theta^{(E)}(Fo) = \frac{t^{(E)}(Fo) - t_0}{t^{(E)m} - t_0}$  – безрозмірні температури системи та середовища відповідно;  $Pd = \left(\frac{d\theta^{(E)}}{dFo}\right)_{\max}$  – критерій Предводителя.

Безрозмірними вихідними параметрами задачі є: просторова координата  $\rho$ , час – число Фур'є  $Fo$ , ефективний термоопір покриття  $\xi$ , ефективна теплоємність покриття  $\eta$ , критерій Біо  $Bi$ , критерій Предводителя  $Pd$ .

На рис. 2 – рис. 4 показано зміну в часі контактної температури на поверхні пластина – покриття залежно від ефективних термоопору  $\xi$  і теплоємності  $\eta$  покриття (рис. 2), параметра  $Bi$  (рис. 3) і параметра  $Pd$  (рис. 4). Розрахунки для рис. 2 проведено при  $Bi = 1$ ,  $Pd = 1$ , для рис. 3 – при  $\xi = 0.1$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $Pd = 1$ , для рис. 4 – при  $\xi = 0.1$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $Bi = 1$ . На рис. 3 і рис. 4 штриховими кривими також показано зміну в часі температури середовища. Ці графіки ілюструють вплив теплофізичних характеристик покриття та умов теплообміну з середовищем на характер зміни максимальної температури в пластині на поверхні контакту з покриттям.

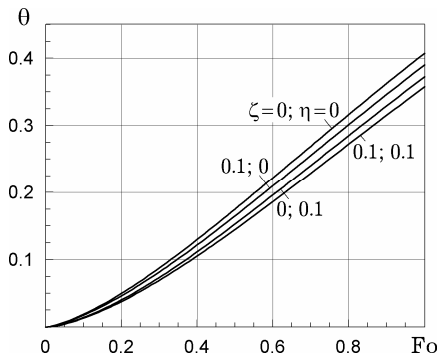


Рис. 2

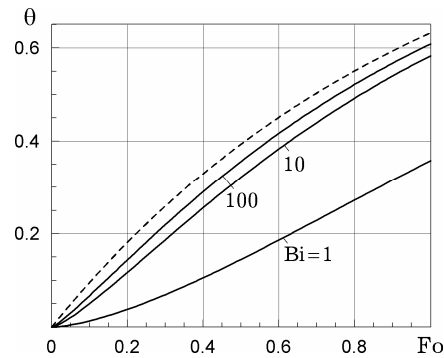


Рис. 3

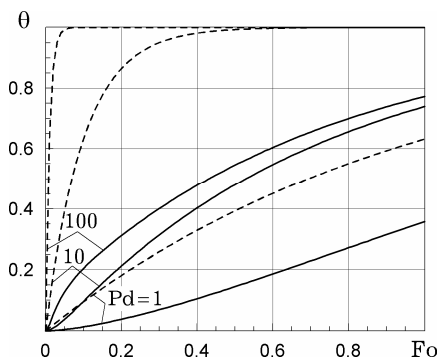


Рис. 4

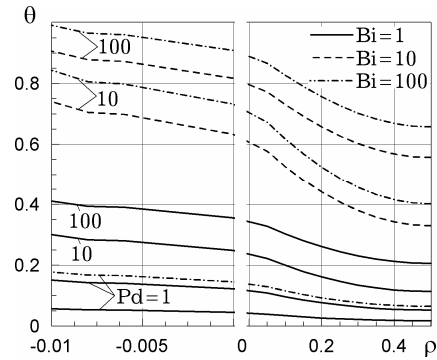


Рис. 5

Як і слід було очікувати, наявність покриття призводить до зменшення контактної температури (крива  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  на рис. 2 – покриття відсутнє). Збільшення інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає збільшенню критерію Біо  $Bi$ ) та швидкості підвищення температури середовища (що відповідає збільшенню критерію Предводителя  $Pd$ ) сприяє зростанню контактної температури (див. рис. 3 і рис. 4 відповідно).

На рис. 5 показано розподіл температури за просторовою координатою  $\rho$  у системі пластини – двостороннє тришарове покриття для моменту часу  $Fo = 0.2$  при значеннях  $Bi = 1, 10, 100$  і  $Pd = 1, 10, 100$  за таких співвідношень геометричних і теплофізичних параметрів шарів покриття:  $\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1$ ,  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 3 : 10 : 2$ ,  $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 3 : 6 : 1$  при  $\lambda^{(0)}/\lambda_1 = 10$ ,  $\omega^{(0)}/\omega_1 = 1$ ,  $\delta/h = 0.01$ . Зважаючи на симетрію задачі, результати наведено для півпластини  $0 \leq \rho \leq 0.5$  з покриттям  $-0.01 \leq \rho \leq 0$ .

Як бачимо на рис. 5, зі збільшенням критеріїв  $Bi$  та  $Pd$  зростають як значення температури, так і температурні перепади в системі пластини – тришарове покриття.

**Висновки.** На основі застосування математичної моделі з узагальненими граничними умовами теплообміну тіл із середовищем через тонкі багатшарові покриття методом інтегрального перетворення Лапласа з використанням інтегральних співвідношень Дюамеля отримано аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для пластини з двостороннім багатшаровим покриттям за умов нестационарного конвективного нагріву при довільних функціях температур зовнішніх середовищ. Записано конкретні вирази розв'язків задачі для випадків лінійної, експоненціальної, логарифмічної і періодичної зміни функцій температур зовнішнього середовища. Детально розглянуто задачу про симетричний нагрів пластини з ідентичними тришаровими покриттями для випадку експоненціального закону зміни температури зовнішнього середовища. Проаналізовано вплив ефективних теплофізичних характеристик покриття – зведених термоопору і теплоємності, а також умов теплообміну із зовнішнім середовищем на контактну температуру поверхні пластини – покриття. Встановлено, що збільшення інтенсивності тепловіддачі з поверхні покриття і швидкості підвищення температури зовнішнього середовища суттєво впливають на температурні перепади за товщиною пластини та шарів покриття.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного гранту НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (номер держреєстрації проекту 0114U005082).

1. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы нестационарной теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1978. – 328 с.
2. *Веселовский В. Б.* Методы расчета и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях. – Днепропетровск: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2002. – 436 с.
3. *Веселовский В. Б.* Решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных теплозащитных покрытий // Прикл. вопросы аэрогазодинамики. – Киев: Наук. думка, 1987. – С. 95–100.
4. *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка, 1979. – 360 с.
5. *Гаврись А. П., Иващук Д. В., Шевчук П. Р.* Определение остаточных напряжений в системе слой – покрытие при двустороннем высокотемпературном напылении // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 29. – С. 8–12.  
Te same: *Gavris' A. P., Ivashchuk D. V., Shevchuk P. R.* Determination of residual stresses in a layered system during two-sided high-temperature spray-coating // J. Soviet Math. – 1993. – **65**, No. 4. – P. 1715–1719.
6. *Гембара Н. О.* Вплив протикорозійного багатшарового покриття на термомужність круглих пластин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – **49**, № 6. – С. 50–54.



- Te same: *Hembara N. O.* Effect of a multilayer anticorrosion coating on the thermoelasticity of round plates // *Mater. Sci.* – 2014. – **49**, No. 6. – P. 761–767.
7. *Дяконюк Л. М., Савула Я. Г.* Комп'ютерне моделювання теплоперенесення у шарі з тонким покриттям // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 1998. – Вип. 50. – С. 93–95.
  8. *Евдокимов Д. В., Ивасишина Д. Н., Кочубей А. А., Поляков Н. В.* Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое // *Диференціальні рівняння та їх застосування.* – Дніпропетровськ: Дніпропетр. нац. ун-т, 2006. – С. 141–156.
  9. *Ержанов Р. Ж., Мацевитый Ю. М., Султангазин У. М., Шершнев В. П.* Сосредоточенная емкость в задачах теплофизики и микроэлектроники. – Киев: Наук. думка, 1992. – 296 с.
  10. *Зарубин В. С.* Расчет и оптимизация термоизоляции. – Москва: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
  11. *Ильченко О. Т.* Температурное поле двухслойной пластины при переменных во времени граничных условиях теплообмена // *Инж.-физ. журн.* – 1970. – **19**, № 6. – С. 1094–1099.  
Te same: *Il'chenko O. T.* Temperature field of a two-layered plate with time-varying heat-transfer conditions // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 1970. – **19**, No. 6. – P. 1567–1570.
  12. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – Москва: Высш. шк., 1985. – 480 с.
  13. *Кирсанов Ю. А.* Тепловое состояние твердых тел с покрытием при несимметричном циклическом теплообмене с внешними средами // *Инж.-физ. журн.* – 1996. – **69**, № 1. – С. 123–128.  
Te same: *Kirsanov Yu. A.* Thermal state of coated solids in asymmetric cyclic heat exchange with ambient media // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 1996. – **69**, No. 1. – P. 104–108.
  14. *Коляно Ю. М., Кушнир Р. М.* Температурные напряжения в нагреваемых источниками тепла пластинках с двусторонними покрытиями // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1980. – Вып. 11. – С. 72–75.
  15. *Комаров Г. М.* Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності // *Доп. НАН України.* – 1996. – № 7. – С. 26–32.
  16. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2002. – **38**, № 6. – С. 31–38.  
Te same: *Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange // *Mater. Sci.* – 2002. – **38**, No. 6. – P. 798–808.
  17. *Лучко Й. Й., Гембара В. М., Гембара Н. О.* Моделювання теплопровідності тонких плит з багатошаровим покриттям // *Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій.* – 2004. – Вип. 6. – С. 65–70.
  18. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
  19. *Люкшин П. А., Люкшин Б. А., Матольгина Н. Ю., Панин С. В.* Расчет температуры и температурных напряжений в многослойном покрытии // *Механика композиц. материалов и конструкций.* – 2010. – **16**, № 4. – С. 563–574.
  20. *Ляшенко Б. А., Терлецкий В. А., Долгов Н. А., Сорока Е. Б.* Распределение температур в пластине с однослойным покрытием при интенсивном нагреве // *Проблемы прочности.* – 1998. – № 3. – С. 128–133.  
Te same: *Lyashenko B. A., Terletskii V. A., Dolgov N. A., Soroka E. B.* Distribution of temperature in a plate with a single layer coating subjected to intense heating // *Strength Mater.* – 1998. – **30**, No. 3. – P. 340–344.
  21. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
  22. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Иващук Д. В.* Влияние тонких покрытий на напряженно-деформированное состояние слоя с двусторонним покрытием при диффузионном насыщении // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1974. – **10**, № 1. – С. 74–80.  
Te same: *Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. R., Ivashchuk D. V.* Effect of thin coatings on the stress-strain state of a layer with a two-sided coating in diffusion impregnation // *Mater. Sci.* – 1974. – **10**, No. 1. – P. 69–74.
  23. *Приходько И. М.* Теплопроводность двухслойной стенки при изменяющихся во времени коэффициентах теплообмена и температуре окружающей среды // *Инж.-физ. журн.* – 1970. – **18**, № 2. – С. 323–327.  
Te same: *Prikhod'ko I. M.* Thermal conductivity of a two-layer wall for a time-varying heat-transfer coefficient and ambient temperature // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 1970. – **18**, No. 2. – P. 239–242.

24. Савула Я. Г. Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1995. – Вип. 42. – С. 3–7.
25. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
26. Третьяченко Г. Н., Барило В. Г. Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий // Проблемы прочности. – 1993. – № 1. – С. 41–49.  
Те саме: *Tret'yachenko G. N., Barilo V. G. Thermal and stressed states of multilayered coatings // Strength Mater.* – 1993. – **25**, No. 1. – P. 34–41.
27. Третьяченко Г. Н., Кравчук Л. В., Курият Р. И., Карпинос Б. С., Семенов Г. Р. Термическая усталость материалов в условиях неоднородного термонапряженного состояния. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
28. Флейшман Н. П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 30–34.
29. Шевчук В. А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.
30. Al-Nimr M. A., Alkam M. K. A generalized thermal boundary condition // Heat Mass Transf. – 1997. – **33**, No. 1-2. – P. 157–161.
31. Du F., Lovell M. R., Wu T. W. Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**, No. 26-27. – P. 4557–4570.
32. Elperin T., Rudin G. Temperature field in multilayer assembly affected by a local laser heating // Int. J. Heat Mass Transf. – 1995. – **38**, No. 17. – P. 3143–3147.
33. Heijnen L. M., Kuijpers T. W., Klostermann J. A. Model description and experiments on carbon diffusion through protective layers // High Temp.-High Press. – 1988. – **20**, No. 3. – P. 305–313.
34. Mezin A., Lepage J., Abel P. B. An analytical solution for non-steady-state diffusion through thin films // Thin Solid Films. – 1996. – **272**, No. 1. – P. 124–131.
35. Sarikaya O., Islamoglu Y., Celik E. Finite element modeling of the effect of the ceramic coatings on heat transfer characteristics in thermal barrier applications // Mater. Design. – 2005. – **26**, No. 4. – P. 357–362.
36. Shevchuk V. A. Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings // Lect. Notes in Comput. Sci. – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – **2330**. – P. 500–509.
37. Shevchuk V. A. Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 1942–1953.
38. Shevchuk V. A. Modeling and computation of heat transfer in a system “body-multilayer coating” // Heat Transf. Res. – 2006. – **37**, No. 5. – P. 421–433.
39. Zhao J., Li Y., Ai X. Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings // Thin Solid Films. – 2008. – **516**, No. 21. – P. 7581–7587.

#### ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАСТИНЫ С ТОНКИМ ДВУСТОРОННИМ МНОГОСЛОЙНЫМ ПОКРЫТИЕМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРЕВЕ

На основе аналитического решения одномерной нестационарной задачи теплопроводности для пластины с двусторонним тонким многослойным покрытием, полученным на основе обобщенных граничных условий, проведено исследование и выявлены закономерности протекания теплового процесса в теле и покрытии при нагреве внешней средой с переменной температурой.

#### HEAT CONDUCTION IN PLATE WITH THIN DOUBLE-SIDED MULTILAYER COATING UNDER NONSTATIONARY HEATING

Based on the analytical solution of a one-dimensional nonstationary problem of heat conduction for a plate with a double-sided thin multilayer coating, obtained with the use of the generalized boundary conditions, the analysis is performed and regularities of the heat transfer process in the body and coating under heating by ambient media with variable temperature are revealed.

В. А. Шевчук

## ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ПЛАСТИНИ З ТОНКИМ ДВОСТОРОННІМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ ЗА УМОВ НЕСТАЦІОНАРНОГО НАГРІВУ

На основі аналітичного розв'язку одновимірної нестационарної задачі теплопровідності для пластини з двостороннім тонким багатошаровим покриттям, отриманого із застосуванням узагальнених граничних умов, проведено дослідження і виявлено закономірності протікання теплового процесу в тілі і покритті при нагріві зовнішнім середовищем зі змінною температурою.

**Вступ.** Моделюванню та дослідженню процесів теплопровідності та дифузії у пластинах з покриттями присвячено багато робіт [2, 3, 5–11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22–24, 26, 27, 30–36, 39]. При врахуванні часової залежності температури зовнішнього середовища для пластин з одношаровим покриттям аналітичні розв'язки задач теплопровідності наведено в роботах [11, 13, 20], а для багатошарових пластин аналітично-числову наближену процедуру – в [16]. У загальному для пластин з багатошаровими покриттями розв'язування обмежується випадками незмінної в часі температури зовнішнього середовища. Для розв'язування задач теплопровідності для тіл з тонкими покриттями ефективним є підхід з використанням узагальнених граничних умов [15, 17, 21, 28, 29, 37], які у випадках постійної в часі температури зовнішнього середовища для пластин з покриттями застосовувались у [5, 6, 9, 10, 22, 36], а змінної в часі температури зовнішнього середовища – лише в [10]. Проте підхід, використаний у [10], не є достатньо загальним і може бути застосований тільки до обмеженого класу неоднорідних покриттів.

Нижче отримано аналітичний розв'язок одновимірної задачі теплопровідності для пластини з двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестационарного конвективного нагріву та проведено дослідження закономірностей процесу теплоперенесення у пластині з ідентичними покриттями при нагріванні за експоненціальним законом у часі.

**Формулювання задачі.** Розглянемо одновимірну крайову задачу теплопровідності для пластини товщини  $h$  з двостороннім багатошаровим покриттям за умов нестационарного конвективного нагріву (рис. 1).

Рівняння теплопровідності і початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t^{(0)}}{\partial \tau} = a^{(0)} \frac{\partial^2 t^{(0)}}{\partial x^2}, \quad 0 < x < h, \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial \tau} = a_i^{(1)} \frac{\partial^2 t_i^{(1)}}{\partial x^2}, \quad x_i^{(1)} < x < x_{i-1}^{(1)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(1)}\}, \quad (2')$$

$$\frac{\partial t_i^{(2)}}{\partial \tau} = a_i^{(2)} \frac{\partial^2 t_i^{(2)}}{\partial x^2}, \quad x_{i-1}^{(2)} < x < x_i^{(2)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(2)}\}, \quad (2'')$$

$$t^{(0)} \Big|_{\tau=0} = t_i^{(k)} \Big|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(k)}\}, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (3)$$

Приймаємо, що на межі покриття – середовище відбувається теплообмін згідно з законом Ньютона:

$$-\lambda_{n^{(2)}}^{(2)} \frac{\partial t_{n^{(2)}}^{(2)}}{\partial x} = \mu^{(2)} \left( t_{n^{(2)}}^{(2)} - t_2^{(E)} \right), \quad x = x_{n^{(2)}}^{(2)} = h + \delta^{(2)}, \quad (4)$$

$$\lambda_{n^{(1)}}^{(1)} \frac{\partial t_{n^{(1)}}^{(1)}}{\partial x} = \mu^{(1)} \left( t_{n^{(1)}}^{(1)} - t_1^{(E)} \right), \quad x = x_{n^{(1)}}^{(1)} = -\delta^{(1)}, \quad (5)$$

а на поверхнях поділу шарів покриття і покриття з тілом виконуються умови ідеального теплового контакту:

$$t_i^{(1)} = t_{i-1}^{(1)}, \quad \lambda_i^{(1)} \frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial x} = \lambda_{i-1}^{(1)} \frac{\partial t_{i-1}^{(1)}}{\partial x}, \quad x = x_{i-1}^{(1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j^{(1)}, \quad i \in \{2, \dots, n^{(1)}\},$$

$$t_1^{(1)} = t^{(0)}, \quad \lambda_1^{(1)} \frac{\partial t_1^{(1)}}{\partial x} = \lambda^{(0)} \frac{\partial t^{(0)}}{\partial x}, \quad x = x_0^{(1)} = 0, \quad (6)$$

$$t_i^{(2)} = t_{i-1}^{(2)}, \quad \lambda_i^{(2)} \frac{\partial t_i^{(2)}}{\partial x} = \lambda_{i-1}^{(2)} \frac{\partial t_{i-1}^{(2)}}{\partial x}, \quad x = x_{i-1}^{(2)} = h + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j^{(2)},$$

$$i \in \{2, \dots, n^{(2)}\},$$

$$t_1^{(2)} = t^{(0)}, \quad \lambda_1^{(2)} \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial x} = \lambda^{(0)} \frac{\partial t^{(0)}}{\partial x}, \quad x = x_0^{(2)} = h. \quad (7)$$

Тут  $t_i^{(k)}$ ,  $t^{(0)}$ ,  $t_1^{(E)}$ ,  $t_2^{(E)}$  – температури  $i$ -го шару  $k$ -го покриття, тіла (пластини) і середовищ відповідно;  $\delta^{(k)} = \sum_{j=1}^{n^{(k)}} \delta_j^{(k)}$  – товщина  $k$ -го покриття;  $\delta_i^{(k)}$  – товщина  $i$ -го шару  $k$ -го покриття;  $\lambda^{(0)}$ ,  $\lambda_i^{(k)}$  і  $\omega^{(0)}$ ,  $\omega_i^{(k)}$  – коефіцієнти теплопровідності і теплоємності;  $\mu^{(1)}$ ,  $\mu^{(2)}$  – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь покриття;  $a^{(0)} = \lambda^{(0)}/\omega^{(0)}$  – температуропровідність тіла;  $n^{(k)}$  – кількість шарів  $k$ -го покриття. Індекс  $k=1$  стосується покриття, нанесеного на поверхню  $x=0$  пластини, а  $k=2$  – покриття, нанесеного на поверхню  $x=h$ .



Рис. 1

**Розв'язок задачі теплопровідності з узагальненими граничними умовами.** Для розв'язування задачі використано підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покриттів на теплоперенесення в системі узагальненими граничними умовами [21, 29, 37]. Тоді температуру в тілі визначають як розв'язок рівняння (1) для пластини з початковою умовою (3) та узагальненими граничними умовами, які для цього випадку матимуть вигляд [36–38]

$$-\lambda^{(0)} \left( 1 + \frac{\mu^{(2)}}{H^{(2)}} \right) \frac{\partial t^{(0)}}{\partial x} + \mu^{(2)} (t_2^{(E)} - t^{(0)}) = \Omega^{(2)} \frac{\partial t^{(0)}}{\partial \tau}, \quad t^{(0)} \Big|_{\tau=0} = t_0, \quad x = h, \quad (8)$$

$$\lambda^{(0)} \left( 1 + \frac{\mu^{(1)}}{H^{(1)}} \right) \frac{\partial t^{(0)}}{\partial x} + \mu^{(1)} (t_1^{(E)} - t^{(0)}) = \Omega^{(1)} \frac{\partial t^{(0)}}{\partial \tau}, \quad t^{(0)} \Big|_{\tau=0} = t_0, \quad x = 0, \quad (9)$$

де  $\Omega^{(k)} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \omega_i^{(k)} \delta_i^{(k)}$ ,  $\frac{1}{H^{(k)}} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \frac{\delta_i^{(k)}}{\lambda_i^{(k)}}$  – зведені теплоємності та термоопори покриттів,  $k = 1, 2$ .

Для розв'язування використаємо інтегральне перетворення Лапласа

$$\tilde{t}^{(0)}(x, s) = \int_0^{\infty} t^{(0)}(x, \tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

де  $s$  – параметр перетворення.

Розв'язок рівняння (1) у пластині в трансформантах з урахуванням умов (3), (8), (9) має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{t}^{(0)}(x, s) = & \text{Bi}_*^{(1)} \left( \tilde{t}_1^{(E)} - \frac{t_0}{s} \right) \frac{\Phi_2(h, s) \text{ch}(qx) - \Phi_3(h, s) \text{sh}(qx)}{\Psi(s)} + \\ & + \text{Bi}_*^{(2)} \left( \tilde{t}_2^{(E)} - \frac{t_0}{s} \right) \frac{\Phi_1(x, s)}{\Psi(s)} + \frac{t_0}{s}, \quad 0 \leq x \leq h, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\Phi_k(x, s) = \text{ch}(qx) + \text{Bi}_*^{(k)} (1 + \chi^{(k)} s) \frac{\text{sh}(qx)}{qh}, \quad k = 1, 2,$$

$$\Phi_3(x, s) = \text{sh}(qh) + \text{Bi}_*^{(2)} (1 + \chi^{(2)} s) \frac{\text{ch}(qx)}{qh},$$

$$\begin{aligned} \Psi(s) = & \left[ qh + \frac{\text{Bi}_*^{(1)} \text{Bi}_*^{(2)}}{qh} (1 + \chi^{(1)} s) (1 + \chi^{(2)} s) \right] \text{sh}(qh) + \\ & + \left[ \text{Bi}_*^{(1)} (1 + \chi^{(1)} s) + \text{Bi}_*^{(2)} (1 + \chi^{(2)} s) \right] \text{ch}(qh), \end{aligned}$$

Тут  $q = \sqrt{\frac{s}{a^{(0)}}}$ ;  $\text{Bi}_*^{(k)} = \frac{\text{Bi}^{(k)}}{1 + \xi^{(k)} \text{Bi}^{(k)}}$ ,  $\text{Bi}^{(k)} = \frac{\mu^{(k)} h}{\lambda^{(0)}}$  – критерії Біо;  $\xi^{(k)} = \frac{1/H^{(k)}}{h/\lambda^{(0)}}$

– ефективні термоопори покриттів;  $\chi^{(k)} = \frac{\Omega^{(k)}}{\mu^{(k)}}$ ;  $\tilde{t}_k^{(E)}(s) = \int_0^{\infty} t_k^{(E)}(\tau) e^{-s\tau} d\tau$  –

трансформанти функцій температури середовищ,  $k = 1, 2$ .

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до виразу (10) і використовуючи теорему розкладу та інтегральні співвідношення Дюамеля [1, 18], розв'язок задачі для пластини в безрозмірних координатах отримуємо у вигляді

$$\begin{aligned} t^{(0)}(\rho, \text{Fo}) = & t_0 + \text{Bi}_*^{(1)} \left( t_1^{(E)}(\text{Fo}) - t_0 \right) \frac{1 + \text{Bi}_*^{(2)} - \text{Bi}_*^{(2)} \rho}{\overline{\text{Bi}}} + \\ & + \text{Bi}_*^{(2)} \left( t_2^{(E)}(\text{Fo}) - t_0 \right) \frac{1 + \text{Bi}_*^{(1)} \rho}{\overline{\text{Bi}}} - \\ & - 2\text{Bi}_*^{(1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_2(1, \alpha_j) \cos(\alpha_j \rho) + U_3(1, \alpha_j) \sin(\alpha_j \rho)}{Z(\alpha_j)} \times \\ & \times \left[ (t_1^{(E)}(0) - t_0) e^{-\alpha_j^2 \text{Fo}} + L^{(1)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2) \right] - 2\text{Bi}_*^{(2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_1(\rho, \alpha_j)}{Z(\alpha_j)} \times \\ & \times \left[ (t_2^{(E)}(0) - t_0) e^{-\alpha_j^2 \text{Fo}} + L^{(2)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2) \right], \quad 0 \leq \rho \leq 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут  $\rho = x/h$ ;  $\text{Fo} = a^{(0)} \tau / h^2$  – критерій Фур'є;  $\overline{\text{Bi}} = \text{Bi}_*^{(1)} + \text{Bi}_*^{(2)} + \text{Bi}_*^{(1)} \text{Bi}_*^{(2)}$ ;  $\alpha_j$  – корені трансцендентного рівняння

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\alpha^2 - (\text{Bi}_*^{(1)} - \varepsilon^{(1)} \alpha^2) (\text{Bi}_*^{(2)} - \varepsilon^{(2)} \alpha^2)}{\alpha (\text{Bi}_*^{(1)} + \text{Bi}_*^{(2)} - (\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}) \alpha^2)}, \quad (12)$$

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = \int_0^{\text{Fo}} \frac{dt_k^{(E)}(\zeta)}{d\zeta} e^{\gamma(\text{Fo}-\zeta)} d\zeta, \quad k = 1, 2, \quad (13)$$

$\varepsilon^{(k)} = \frac{\eta^{(k)}}{1 + \xi^{(k)} \text{Bi}_i^{(k)}}$ ,  $\eta^{(k)} = \frac{\Omega^{(k)}}{\omega^{(0)} h}$  – ефективні теплоємності покриттів,

$$U_k(\rho, \alpha_j) = \alpha_j \cos(\alpha_j \rho) + (\text{Bi}_*^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \alpha_j^2) \sin(\alpha_j \rho), \quad k = 1, 2,$$

$$U_3(\rho, \alpha_j) = \alpha_j \sin(\alpha_j \rho) - (\text{Bi}_*^{(2)} - \varepsilon^{(2)} \alpha_j^2) \cos(\alpha_j \rho),$$

$$\begin{aligned} Z(\alpha_j) = & [(1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \alpha_j^2 - (\text{Bi}_*^{(1)} - \varepsilon^{(1)} \alpha_j^2)(\text{Bi}_*^{(2)} - \varepsilon^{(2)} \alpha_j^2)] \alpha_j \cos \alpha_j + \\ & + [\alpha_j^2(1 + \text{Bi}_*^{(1)}(1 + \varepsilon^{(2)}) + \text{Bi}_*^{(2)}(1 + \varepsilon^{(1)}) - (\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \\ & + 3\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}) \alpha_j^2) + \text{Bi}_*^{(1)} \text{Bi}_*^{(2)}] \sin \alpha_j. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок узгодженості крайових умов [10, 12]  $t_1^{(E)}(0) = t_2^{(E)}(0) = t_0$ . Тоді формула (11) набуде вигляду

$$\begin{aligned} t^{(0)}(\rho, \text{Fo}) = & \frac{t_1^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(1)}(1 + \text{Bi}_*^{(2)} - \text{Bi}_*^{(2)} \rho) + t_2^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(2)}(1 + \text{Bi}_*^{(1)} \rho)}{\text{Bi}} - \\ & - 2 \text{Bi}_*^{(1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[U_2(1, \alpha_j) \cos(\alpha_j \rho) + U_3(1, \alpha_j) \sin(\alpha_j \rho)] L^{(1)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2)}{Z(\alpha_j)} - \\ & - 2 \text{Bi}_*^{(2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_1(\alpha_j, \rho) L^{(2)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2)}{Z(\alpha_j)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Підставляючи (14) у формули відновлення [36–38], які у безрозмірних координатах запишемо як

$$\begin{aligned} t_i^{(1)}(\rho, \text{Fo}) = & t^{(0)}(0, \text{Fo}) + \lambda^{(0)} \left( - \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{\delta_{\ell}^{(1)}}{h \lambda_{\ell}^{(1)}} + \frac{\rho - \rho_{i-1}^{(1)}}{\lambda_i^{(1)}} \right) \frac{\partial t^{(0)}(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \Bigg|_{\rho=0}, \\ & \rho_i^{(1)} \leq \rho \leq \rho_{i-1}^{(1)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(1)}\}, \end{aligned} \quad (15')$$

$$\begin{aligned} t_i^{(2)}(\rho, \text{Fo}) = & t^{(0)}(1, \text{Fo}) + \lambda^{(0)} \left( \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{\delta_{\ell}^{(2)}}{h \lambda_{\ell}^{(2)}} + \frac{\rho - \rho_{i-1}^{(2)}}{\lambda_i^{(2)}} \right) \frac{\partial t^{(0)}(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \Bigg|_{\rho=1}, \\ & \rho_{i-1}^{(2)} \leq \rho \leq \rho_i^{(2)}, \quad i \in \{1, \dots, n^{(2)}\}, \end{aligned} \quad (15'')$$

отримуємо вирази для температури в  $i$ -му шарі  $k$ -го покриття:

$$\begin{aligned} t_i^{(k)}(\rho, \text{Fo}) = & \frac{1}{\text{Bi}} [t_1^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(1)}(1 - \text{Bi}_*^{(2)} r_i^{(k)}(\rho)) + \\ & + t_2^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(2)}(1 + \text{Bi}_*^{(1)} r_i^{(k)}(\rho)) + t_k^{(E)}(\text{Fo}) \text{Bi}_*^{(1)} \text{Bi}_*^{(2)}] - \\ & - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{Bi}_*^{(k)} V_i^{(k)}(\rho, \alpha_j) L^{(k)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2) + \text{Bi}_*^{(3-k)} W_i^{(k)}(\rho, \alpha_j) L^{(3-k)}(\text{Fo}, -\alpha_j^2)}{Z(\alpha_j)}, \\ & \rho_i^{(1)} \leq \rho \leq \rho_{i-1}^{(1)}, \quad \rho_{i-1}^{(2)} \leq \rho \leq \rho_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V_i^{(k)}(\rho, \alpha_j) = & \alpha_j \cos \alpha_j + (\text{Bi}_*^{(3-k)} - \varepsilon^{(3-k)} \alpha_j^2) \sin \alpha_j + \\ & + (-1)^{k+1} r_i^{(k)}(\rho) \alpha_j (\alpha_j \sin \alpha_j - (\text{Bi}_*^{(3-k)} - \varepsilon^{(3-k)} \alpha_j^2) \cos \alpha_j), \end{aligned}$$

$$W_i^{(k)}(\rho, \alpha_j) = \alpha_j [1 + (-1)^{k+1} r_i^{(k)}(\rho) (\text{Bi}_*^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \alpha_j^2)],$$

$$r_i^{(k)}(\rho) = \lambda^{(0)} \left( (-1)^k \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{\delta_\ell^{(k)}}{h\lambda_\ell^{(k)}} + \frac{\rho - \rho_{i-1}^{(k)}}{\lambda_i^{(k)}} \right), \quad \rho_j^{(k)} = \frac{x_j^{(k)}}{h},$$

$$j \in \{0, 1, \dots, n^{(k)}\}, \quad k = 1, 2. \quad (17)$$

Слід зауважити, що у випадку відсутності покриттів (коли  $n^{(1)} = n^{(2)} = 0$ ,  $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = 0$ ,  $\text{Bi}_*^{(1)} = \text{Bi}_*^{(1)}$ ,  $\text{Bi}_*^{(2)} = \text{Bi}_*^{(2)}$ ,  $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = 0$ ) формули (14), (12), (13) рівносильні наведеним у [4, с. 27].

**Вирази для  $L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma)$  для деяких законів зміни температур середовищ.** Формулами (14), (16) дається розв'язок задачі для довільних законів зміни температур зовнішніх середовищ. Конкретизуємо вирази для  $L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma)$  для деяких закономірностей.

*Лінійна функція зміни температур зовнішніх середовищ.* Тоді

$$t_k^{(E)}(\text{Fo}) = t_0(1 + \text{Pd}^{(k)}\text{Fo}), \quad (18)$$

де

$$\text{Pd}^{(k)} = \left( \frac{d}{d\text{Fo}} \left( \frac{t_k^{(E)}(\text{Fo})}{t_0} \right) \right)_{\max} \quad (19)$$

– критерій Предводителя [18], що характеризує інтенсивність підвищення температури середовища, яке контактує з  $k$ -м покриттям.

Підставляючи (18) у (13), отримуємо

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = \frac{t_0 \text{Pd}^{(k)}}{\gamma} (e^{\gamma \text{Fo}} - 1), \quad k = 1, 2. \quad (20)$$

*Експоненціальна функція зміни температур зовнішніх середовищ.* Тоді

$$t_k^{(E)}(\text{Fo}) = t_k^{(E)m} - (t_k^{(E)m} - t_0) e^{-\text{Pd}^{(k)}\text{Fo}}, \quad (21)$$

де  $t_k^{(E)m}$  – максимальна температура середовища, яке контактує з  $k$ -м покриттям, а критерій Предводителя в цьому випадку визначаємо як

$$\text{Pd}^{(k)} = \left( \frac{d}{d\text{Fo}} \left( \frac{t_k^{(E)}(\text{Fo}) - t_0}{t_k^{(E)m} - t_0} \right) \right)_{\max}.$$

Підставляючи (21) у (13), отримуємо

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = \frac{t_k^{(E)m} - t_0}{1 + \gamma/\text{Pd}^{(k)}} (e^{\gamma \text{Fo}} - e^{-\text{Pd}^{(k)}\text{Fo}}), \quad k = 1, 2. \quad (22)$$

*Логарифмічна функція зміни температур зовнішніх середовищ.* Тоді

$$t_k^{(E)}(\text{Fo}) = t_0 + \ln(t_0 \text{Pd}^{(k)}\text{Fo} + 1), \quad (23)$$

де критерій  $\text{Pd}^{(k)}$  визначається за формулою (19).

Підставляючи (23) у (13), отримуємо

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = e^{\gamma \left( \text{Fo} + \frac{1}{t_0 \text{Pd}^{(k)}} \right)} \left[ \text{Ei} \left( -\gamma \left( \text{Fo} + \frac{1}{t_0 \text{Pd}^{(k)}} \right) \right) - \text{Ei} \left( -\frac{\gamma}{t_0 \text{Pd}^{(k)}} \right) \right],$$

$$k = 1, 2, \quad (24)$$

де  $\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^y}{y} dy$  – інтегральна показникова функція [25, с. 56].

Періодична функція зміни температур зовнішніх середовищ за законом

$$t_k^{(E)}(\text{Fo}) = t_0 + t_k^{(E)m} \sin \text{Pd}^{(k)} \text{Fo}. \quad (25)$$

У цьому випадку  $t_k^{(E)m}$  – амплітуда коливання температури середовища, яке контактує з  $k$ -м покриттям, а критерій Предводителя

$$\text{Pd}^{(k)} = \left( \frac{d}{d\text{Fo}} \left( \frac{t_k^{(E)}(\text{Fo})}{t_k^{(E)m}} \right) \right)_{\max} \text{ прямо пропорційний частоті коливань.}$$

Підставляючи (25) у (13), отримуємо

$$L^{(k)}(\text{Fo}, \gamma) = t_k^{(E)m} \text{Pd}^{(k)} \frac{\gamma(e^{\gamma \text{Fo}} - \cos \text{Pd}^{(k)} \text{Fo}) + \text{Pd}^{(k)} \sin \text{Pd}^{(k)} \text{Fo}}{\gamma^2 + (\text{Pd}^{(k)})^2}, \quad k=1, 2. \quad (26)$$

**Симетричний нагрів пластини з ідентичними покриттями.** У цьому випадку маємо  $t_1^{(E)}(\text{Fo}) = t_2^{(E)}(\text{Fo}) = t^{(E)}(\text{Fo})$ ,  $n^{(1)} = n^{(2)} = n$ ,  $\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(2)} = \delta_i$ ,  $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(2)} = \lambda_i$ ,  $\omega_i^{(1)} = \omega_i^{(2)} = \omega_i$  для  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = \delta$ ,  $\xi^{(1)} = \xi^{(2)} = \xi$ ,  $\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta$ ,  $\text{Bi}^{(1)} = \text{Bi}^{(2)} = \text{Bi}$ ,  $\text{Bi}_*^{(1)} = \text{Bi}_*^{(2)} = \text{Bi}_*$ ,  $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon$ . Тоді на підставі формул (14), (12), (13), (16), (17) розв'язок можна подати у вигляді

$$t(\rho, \text{Fo}) = t^{(E)}(\text{Fo}) - 2\text{Bi}_* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X(\rho, \alpha_j) L(\text{Fo}, -\alpha_j^2)}{Z(\alpha_j)}, \quad -\frac{\delta}{h} \leq \rho \leq 1 + \frac{\delta}{h}, \quad (27)$$

$$X(\rho, \alpha_j) = \begin{cases} Y_1(\alpha_j) \cos(\alpha_j \rho) + Y_2(\alpha_j) \sin(\alpha_j \rho), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ Y_1(\alpha_j) - r(\rho) \alpha_j Y_2(\alpha_j), & 1 \leq \rho \leq 1 + \frac{\delta}{h}, \\ X(1 - \rho, \alpha_j), & -\frac{\delta}{h} \leq \rho \leq 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$Y_1(\alpha_j) = \alpha_j (\cos \alpha_j + 1) + (\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha_j^2) \sin \alpha_j, \quad (29')$$

$$Y_2(\alpha_j) = \alpha_j \sin \alpha_j + (\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha_j^2) (1 - \cos \alpha_j), \quad (29'')$$

$$Z(\alpha_j) = [(1 + 4\varepsilon)\alpha_j^2 - (\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha_j^2)] \alpha_j \cos \alpha_j + [\alpha_j^2 (1 + 2\text{Bi}_* (1 + \varepsilon) - \varepsilon (2 + 3\varepsilon) \alpha_j^2) + (\text{Bi}_*)^2] \sin \alpha_j, \quad (30)$$

$\alpha_j$  – корені трансцендентного рівняння

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\alpha^2 - (\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha^2)^2}{2\alpha(\text{Bi}_* - \varepsilon \alpha^2)}, \quad (31)$$

$$L(\text{Fo}, \gamma) = \int_0^{\text{Fo}} \frac{dt^{(E)}(\zeta)}{d\zeta} e^{\gamma(\text{Fo} - \zeta)} d\zeta, \quad (32)$$

$$r(\rho) = \lambda^{(0)} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{\delta_{\ell}}{h \lambda_{\ell}} + \frac{\rho - \rho_{i-1}^{(2)}}{\lambda_i} \right) [S_+(\rho - \rho_{i-1}^{(2)}) - S_+(\rho - \rho_i^{(2)})], \quad (33)$$

де  $S_+(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$  – функція Гевісайда.

**Числовий приклад.** Розглянемо симетричний нагрів пластини з ідентичними покриттями для випадку нагрівання за експоненціальним законом (21). Тоді, підставляючи (22) у (27), отримуємо розв'язок у безрозмірному



вигляді

$$\theta(\rho, Fo) = 1 - e^{-PdFo} - 2Bi_* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X(\rho, \alpha_j)}{(1 - \alpha_j^2/Pd)Z(\alpha_j)} (e^{-\alpha_j^2 Fo} - e^{-PdFo}),$$

$$-\frac{\delta}{h} \leq \rho \leq 1 + \frac{\delta}{h}, \quad (34)$$

де  $X(\rho, \alpha_j)$ ,  $Z(\alpha_j)$  визначаються співвідношеннями (28), (30),  $\alpha_j$  – корені рівняння (31), а  $\theta(\rho, Fo) = \frac{t(\rho, Fo) - t_0}{t^{(E)m} - t_0}$ ,  $\theta^{(E)}(Fo) = \frac{t^{(E)}(Fo) - t_0}{t^{(E)m} - t_0}$  – безрозмірні температури системи та середовища відповідно;  $Pd = \left(\frac{d\theta^{(E)}}{dFo}\right)_{\max}$  – критерій Предводителя.

Безрозмірними вихідними параметрами задачі є: просторова координата  $\rho$ , час – число Фур'є  $Fo$ , ефективний термоопір покриття  $\xi$ , ефективна теплоємність покриття  $\eta$ , критерій Біо  $Bi$ , критерій Предводителя  $Pd$ .

На рис. 2 – рис. 4 показано зміну в часі контактної температури на поверхні пластина – покриття залежно від ефективних термоопору  $\xi$  і теплоємності  $\eta$  покриття (рис. 2), параметра  $Bi$  (рис. 3) і параметра  $Pd$  (рис. 4). Розрахунки для рис. 2 проведено при  $Bi = 1$ ,  $Pd = 1$ , для рис. 3 – при  $\xi = 0.1$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $Pd = 1$ , для рис. 4 – при  $\xi = 0.1$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $Bi = 1$ . На рис. 3 і рис. 4 штриховими кривими також показано зміну в часі температури середовища. Ці графіки ілюструють вплив теплофізичних характеристик покриття та умов теплообміну з середовищем на характер зміни максимальної температури в пластині на поверхні контакту з покриттям.

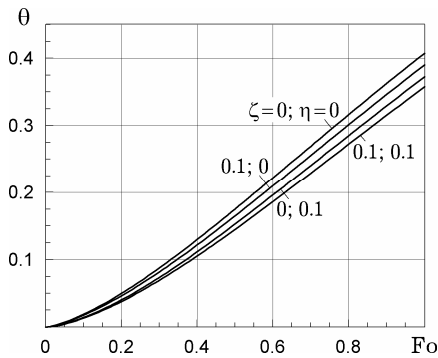


Рис. 2

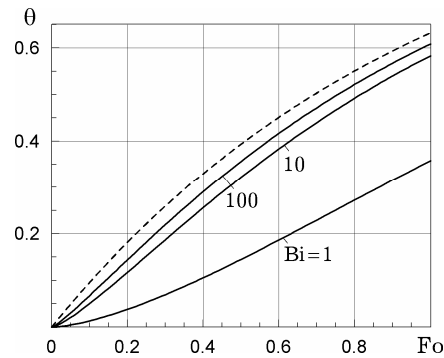


Рис. 3

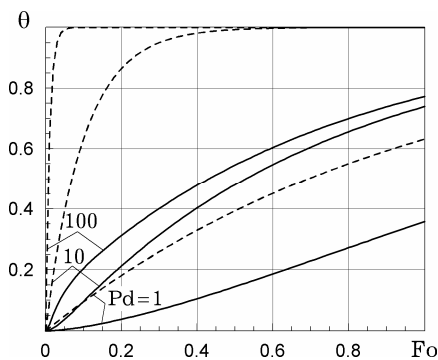


Рис. 4

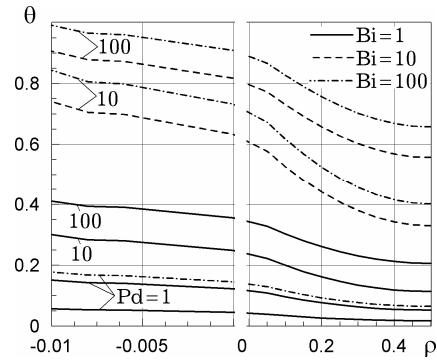


Рис. 5

Як і слід було очікувати, наявність покриття призводить до зменшення контактної температури (крива  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  на рис. 2 – покриття відсутнє). Збільшення інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає збільшенню критерію Біо  $Bi$ ) та швидкості підвищення температури середовища (що відповідає збільшенню критерію Предводителя  $Pd$ ) сприяє зростанню контактної температури (див. рис. 3 і рис. 4 відповідно).

На рис. 5 показано розподіл температури за просторовою координатою  $\rho$  у системі пластини – двостороннє тришарове покриття для моменту часу  $Fo = 0.2$  при значеннях  $Bi = 1, 10, 100$  і  $Pd = 1, 10, 100$  за таких співвідношень геометричних і теплофізичних параметрів шарів покриття:  $\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1$ ,  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 3 : 10 : 2$ ,  $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 3 : 6 : 1$  при  $\lambda^{(0)}/\lambda_1 = 10$ ,  $\omega^{(0)}/\omega_1 = 1$ ,  $\delta/h = 0.01$ . Зважаючи на симетрію задачі, результати наведено для півпластини  $0 \leq \rho \leq 0.5$  з покриттям  $-0.01 \leq \rho \leq 0$ .

Як бачимо на рис. 5, зі збільшенням критеріїв  $Bi$  та  $Pd$  зростають як значення температури, так і температурні перепади в системі пластини – тришарове покриття.

**Висновки.** На основі застосування математичної моделі з узагальненими граничними умовами теплообміну тіл із середовищем через тонкі багатшарові покриття методом інтегрального перетворення Лапласа з використанням інтегральних співвідношень Дюамеля отримано аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для пластини з двостороннім багатшаровим покриттям за умов нестационарного конвективного нагріву при довільних функціях температур зовнішніх середовищ. Записано конкретні вирази розв'язків задачі для випадків лінійної, експоненціальної, логарифмічної і періодичної зміни функцій температур зовнішнього середовища. Детально розглянуто задачу про симетричний нагрів пластини з ідентичними тришаровими покриттями для випадку експоненціального закону зміни температури зовнішнього середовища. Проаналізовано вплив ефективних теплофізичних характеристик покриття – зведених термоопору і теплоємності, а також умов теплообміну із зовнішнім середовищем на контактну температуру поверхні пластини – покриття. Встановлено, що збільшення інтенсивності тепловіддачі з поверхні покриття і швидкості підвищення температури зовнішнього середовища суттєво впливають на температурні перепади за товщиною пластини та шарів покриття.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного гранту НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (номер держреєстрації проекту 0114U005082).

1. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы нестационарной теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1978. – 328 с.
2. *Веселовский В. Б.* Методы расчета и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях. – Днепропетровск: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2002. – 436 с.
3. *Веселовский В. Б.* Решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных теплозащитных покрытий // Прикл. вопросы аэрогазодинамики. – Киев: Наук. думка, 1987. – С. 95–100.
4. *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка, 1979. – 360 с.
5. *Гаврись А. П., Иващук Д. В., Шевчук П. Р.* Определение остаточных напряжений в системе слой – покрытие при двустороннем высокотемпературном напылении // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 29. – С. 8–12.  
Te same: *Gavris' A. P., Ivashchuk D. V., Shevchuk P. R.* Determination of residual stresses in a layered system during two-sided high-temperature spray-coating // J. Soviet Math. – 1993. – **65**, No. 4. – P. 1715–1719.
6. *Гембара Н. О.* Вплив протикорозійного багатшарового покриття на термомужність круглих пластин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – **49**, № 6. – С. 50–54.

- Te same: *Hembara N. O.* Effect of a multilayer anticorrosion coating on the thermoelasticity of round plates // *Mater. Sci.* – 2014. – **49**, No. 6. – P. 761–767.
7. *Дяконюк Л. М., Савула Я. Г.* Комп'ютерне моделювання теплоперенесення у шарі з тонким покриттям // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 1998. – Вип. 50. – С. 93–95.
  8. *Евдокимов Д. В., Ивасишина Д. Н., Кочубей А. А., Поляков Н. В.* Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое // *Диференціальні рівняння та їх застосування.* – Дніпропетровськ: Дніпропетр. нац. ун-т, 2006. – С. 141–156.
  9. *Ержанов Р. Ж., Мацевитый Ю. М., Султангазин У. М., Шершнев В. П.* Сосредоточенная емкость в задачах теплофизики и микроэлектроники. – Киев: Наук. думка, 1992. – 296 с.
  10. *Зарубин В. С.* Расчет и оптимизация термоизоляции. – Москва: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
  11. *Ильченко О. Т.* Температурное поле двухслойной пластины при переменных во времени граничных условиях теплообмена // *Инж.-физ. журн.* – 1970. – **19**, № 6. – С. 1094–1099.  
Te same: *Il'chenko O. T.* Temperature field of a two-layered plate with time-varying heat-transfer conditions // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 1970. – **19**, No. 6. – P. 1567–1570.
  12. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – Москва: Высш. шк., 1985. – 480 с.
  13. *Кирсанов Ю. А.* Тепловое состояние твердых тел с покрытием при несимметричном циклическом теплообмене с внешними средами // *Инж.-физ. журн.* – 1996. – **69**, № 1. – С. 123–128.  
Te same: *Kirsanov Yu. A.* Thermal state of coated solids in asymmetric cyclic heat exchange with ambient media // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 1996. – **69**, No. 1. – P. 104–108.
  14. *Коляно Ю. М., Кушнир Р. М.* Температурные напряжения в нагреваемых источниками тепла пластинках с двусторонними покрытиями // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1980. – Вып. 11. – С. 72–75.
  15. *Комаров Г. М.* Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності // *Доп. НАН України.* – 1996. – № 7. – С. 26–32.
  16. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2002. – **38**, № 6. – С. 31–38.  
Te same: *Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange // *Mater. Sci.* – 2002. – **38**, No. 6. – P. 798–808.
  17. *Лучко Й. Й., Гембара В. М., Гембара Н. О.* Моделювання теплопровідності тонких плит з багатошаровим покриттям // *Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій.* – 2004. – Вип. 6. – С. 65–70.
  18. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
  19. *Люкшин П. А., Люкшин Б. А., Матольгина Н. Ю., Панин С. В.* Расчет температуры и температурных напряжений в многослойном покрытии // *Механика композиц. материалов и конструкций.* – 2010. – **16**, № 4. – С. 563–574.
  20. *Ляшенко Б. А., Терлецкий В. А., Долгов Н. А., Сорока Е. Б.* Распределение температур в пластине с однослойным покрытием при интенсивном нагреве // *Проблемы прочности.* – 1998. – № 3. – С. 128–133.  
Te same: *Lyashenko B. A., Terletskii V. A., Dolgov N. A., Soroka E. B.* Distribution of temperature in a plate with a single layer coating subjected to intense heating // *Strength Mater.* – 1998. – **30**, No. 3. – P. 340–344.
  21. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
  22. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Иващук Д. В.* Влияние тонких покрытий на напряженно-деформированное состояние слоя с двусторонним покрытием при диффузионном насыщении // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1974. – **10**, № 1. – С. 74–80.  
Te same: *Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. R., Ivashchuk D. V.* Effect of thin coatings on the stress-strain state of a layer with a two-sided coating in diffusion impregnation // *Mater. Sci.* – 1974. – **10**, No. 1. – P. 69–74.
  23. *Приходько И. М.* Теплопроводность двухслойной стенки при изменяющихся во времени коэффициентах теплообмена и температуре окружающей среды // *Инж.-физ. журн.* – 1970. – **18**, № 2. – С. 323–327.  
Te same: *Prikhod'ko I. M.* Thermal conductivity of a two-layer wall for a time-varying heat-transfer coefficient and ambient temperature // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 1970. – **18**, No. 2. – P. 239–242.

24. Савула Я. Г. Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1995. – Вип. 42. – С. 3–7.
25. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
26. Третьяченко Г. Н., Барило В. Г. Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий // Проблемы прочности. – 1993. – № 1. – С. 41–49.  
Те саме: *Tret'yachenko G. N., Barilo V. G. Thermal and stressed states of multilayered coatings // Strength Mater.* – 1993. – **25**, No. 1. – P. 34–41.
27. Третьяченко Г. Н., Кравчук Л. В., Курият Р. И., Карпинос Б. С., Семенов Г. Р. Термическая усталость материалов в условиях неоднородного термонапряженного состояния. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
28. Флейшман Н. П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 30–34.
29. Шевчук В. А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.
30. *Al-Nimr M. A., Alkam M. K. A generalized thermal boundary condition // Heat Mass Transf.* – 1997. – **33**, No. 1-2. – P. 157–161.
31. *Du F., Lovell M. R., Wu T. W. Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools // Int. J. Solids Struct.* – 2001. – **38**, No. 26-27. – P. 4557–4570.
32. *Elperin T., Rudin G. Temperature field in multilayer assembly affected by a local laser heating // Int. J. Heat Mass Transf.* – 1995. – **38**, No. 17. – P. 3143–3147.
33. *Heijnen L. M., Kuijpers T. W., Klostermann J. A. Model description and experiments on carbon diffusion through protective layers // High Temp.-High Press.* – 1988. – **20**, No. 3. – P. 305–313.
34. *Mezin A., Lepage J., Abel P. B. An analytical solution for non-steady-state diffusion through thin films // Thin Solid Films.* – 1996. – **272**, No. 1. – P. 124–131.
35. *Sarikaya O., Islamoglu Y., Celik E. Finite element modeling of the effect of the ceramic coatings on heat transfer characteristics in thermal barrier applications // Mater. Design.* – 2005. – **26**, No. 4. – P. 357–362.
36. *Shevchuk V. A. Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings // Lect. Notes in Comput. Sci.* – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – **2330**. – P. 500–509.
37. *Shevchuk V. A. Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses.* – Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 1942–1953.
38. *Shevchuk V. A. Modeling and computation of heat transfer in a system “body-multilayer coating” // Heat Transf. Res.* – 2006. – **37**, No. 5. – P. 421–433.
39. *Zhao J., Li Y., Ai X. Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings // Thin Solid Films.* – 2008. – **516**, No. 21. – P. 7581–7587.

#### ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАСТИНЫ С ТОНКИМ ДВУСТОРОННИМ МНОГОСЛОЙНЫМ ПОКРЫТИЕМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРЕВЕ

На основе аналитического решения одномерной нестационарной задачи теплопроводности для пластины с двусторонним тонким многослойным покрытием, полученным на основе обобщенных граничных условий, проведено исследование и выявлены закономерности протекания теплового процесса в теле и покрытии при нагреве внешней средой с переменной температурой.

#### HEAT CONDUCTION IN PLATE WITH THIN DOUBLE-SIDED MULTILAYER COATING UNDER NONSTATIONARY HEATING

Based on the analytical solution of a one-dimensional nonstationary problem of heat conduction for a plate with a double-sided thin multilayer coating, obtained with the use of the generalized boundary conditions, the analysis is performed and regularities of the heat transfer process in the body and coating under heating by ambient media with variable temperature are revealed.